ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 5, стр. 1082–??

РЕЖИМЫ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА В МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

И. Л. Драников, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук 113191, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2003 г.

В общем виде решена задача стохастической адвекции–диффузии во фрактальной среде с дальнодействующими корреляциями флуктуирующих в пространстве характеристик. Два основных параметра определяют режим переноса: показатель степенного убывания парного коррелятора скорости $2h$ и средняя скорость адвекции u. Определены значения этих параметров, приводящие к режиму аномальной диффузии, и описано поведение концентрации частиц в этом режиме для различных комбинаций значений u и h. Установлено, что на больших расстояниях концентрация убывает экспоненциально, в отличие от степенного убывания, к которому приводят уравнения с дробной пространственной производной. Указаны уравнения с совместными пространственно-временными дробно-дифференциальными операторами, которые описывают все основные свойства решения. Вывод проведен на основе диаграммной техники с использованием представлений о масштабной инвариантности среды.

PACS: 66.30.Jt, 05.40.Fb, 47.53.+n

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях процессы переноса в сильно неупорядоченных средах не описываются классическим уравнением диффузии [1]. Это касается, в частности, фрактальных сред, где пространственные корреляции флуктуирующих характеристик являются дальнодействующими. Один из подходов к решению таких задач основан на применении уравнений в дробных производных (см., например, [2–4]). Их решения содержат возможность аномальной временной зависимости размера облака частиц на больших временах ($R \propto t^\gamma$ с $\gamma \neq 1/2$) и степенного (вместо гауссова) убывания концентрации на больших ($r \gg R$) расстояниях. Вопрос о «тяжелых» степенных хвостах в распределении концентрации примесей представляет исключительно прикладное значение (например, для обоснования надежности радиоактивных захоронений): ведь разница между степенным и гауссовым убыванием огромна. Вместе с этим следует подчеркнуть, что стандартный дробно-диффузионный подход является, вообще говоря, формально математическим и требует как дальнейшего обоснования (см., например, [5, 6]), так и обобщения (см. [6–12]). Выводы, вытекающие из него, нуждаются поэтому в проверке на конкретных физических моделях.

Одна из них — модель стохастической адвекции–диффузии с медленным (степенным) убыванием корреляторов на больших расстояниях. Ранее она исследовалась в работе [13], где ряд результатов был получен в рамках упрощающих предположений и совпал со следствиями из решения дробно-диффузионных уравнений. (Посвященные связи между двумя подходами исторический обзор и библиографию см. в [14].) Возникает вопрос, насколько эти результаты чувствительны к используемым приближениям и подтверждаются ли выводы из модели дробной диффузии точным решением адвективно-диффузионной задачи.

В настоящей работе это решение проведено в общем виде на основе анализа группы масштабных преобразований [15] и с использованием аппарата фейнмановских диаграмм [16]. Во втором разделе дана постановка задачи и построено диаграммное представление для функции Грина. В третьем разделе проанализировано поведение концентрации частиц на больших и малых расстояниях в случае, ко-

*E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

гда средняя скорость адвекционного течения равна нулю. В четвертой части исследован случай, когда она отлична от нуля. В заключительном разделе кратко сформулированы и обсуждены основные результаты.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основу модели составляет уравнение для концентрации $c(\mathbf{r}, t)$, учитывающее процессы адвекции и молекулярной диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} - D\nabla)c = 0. \tag{1}$$

Здесь и далее для определенности будем иметь в виду задачу с заданным начальным (при $t = 0$) распределением частиц в отсутствие источника (учет действия источника, если он имеется, тривиален), $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ — адвекционная скорость, $D(\mathbf{r})$ — коэффициент диффузии. Обе эти величины являются случайными функциями координат.

Будем считать, что рассматриваемая среда обладает свойствами статистической однородности и изотропии, и представим величины $\mathbf{v}$ и D в виде сумм

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}'(\mathbf{r}), \quad D(\mathbf{r}) = \overline{D} + D'(\mathbf{r}), \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle$, $\overline{D} = \langle D(\mathbf{r}) \rangle$ — не зависящие от координат средние по ансамблю реализаций значения скорости и коэффициента диффузии, а $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$, $\mathbf{D}'(\mathbf{r})$ — флуктуационные части: $\langle \mathbf{v}'(\mathbf{r}) \rangle = 0$, $\langle D'(\mathbf{r}) \rangle = 0$.

Поле скоростей удовлетворяет уравнению несжимаемости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0. \tag{3}$$

Мы полагаем, что среда обладает фрактальными свойствами, так что корреляции флуктуаций ее характеристик являются дальнодействующими: соответственно, корреляционные функции случайных величин $\mathbf{v}'$ и D' убывают на больших расстояниях по степенным законам. В частности, парная функция корреляции скоростей, определенная соотношением

$$K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle v_i'(\mathbf{r}_1) v_j'(\mathbf{r}_2) \rangle, \tag{4}$$

при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg a$ такова, что

$$K_{ii}^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \approx V^2 \left(\frac{a}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)^{2h}. \tag{5}$$

Здесь $h > 0$, a — параметр длины, имеющий смысл ближнего радиуса корреляции, V^2 определяет характерную величину $K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$ при $|\mathbf{r}| \lesssim a$. Таким образом, при $|\mathbf{r}| \gg a$ $K_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$ является однородной функцией своего аргумента порядка $-2h$. Аналогично, n-точечный коррелятор скоростей, определенный формулой

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \\ = \langle v_{i_1}'(\mathbf{r}_1) v_{i_2}'(\mathbf{r}_2) \dots v_{i_n}'(\mathbf{r}_n) \rangle, \tag{6}$$

в области $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \gg a$ (для всех пар переменных $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$) удовлетворяет соотношению

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\lambda\mathbf{r}_1, \lambda\mathbf{r}_2, \dots, \lambda\mathbf{r}_n) = \\ = \lambda^{-nh} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n). \tag{7}$$

По аналогии с теорией критических явлений [15] параметр h будем называть масштабной размерностью флуктуации скорости $\mathbf{v}'$. В соответствии с (7) для фурье-образа n-точечного коррелятора,

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n \times \\ \times \exp\left[-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n)\right] \times \\ \times K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \equiv \\ \equiv (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) \times \\ \times \tilde{K}_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{n-1}), \tag{8}$$

справедливо масштабное соотношение

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\lambda\mathbf{k}_1, \lambda\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\} = \\ = \lambda^{n(h-3)} K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\}. \tag{9}$$

Показатель степени $n(h-3)$ в правой части (9) будем называть масштабным индексом величины $K_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\}$.

Из равенств (5) и (9) вытекает, что в области малых волновых векторов ($ka \ll 1$, $k \equiv |\mathbf{k}|$) фурье-образ парного коррелятора таков, что

$$\tilde{K}_{ii}^{(2)}(\mathbf{k}) \sim V^2 a^{2h} k^{2h-3}. \tag{10}$$

Аналогичные (4)–(10) соотношения могут быть выписаны и для корреляционных функций флуктуаций коэффициента диффузии.

Концентрацию, удовлетворяющую уравнению (1), в произвольный момент времени можно выразить через ее начальное распределение:

$$c(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) c(\mathbf{r}', 0), \tag{11}$$

где функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x_i} D \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = 0 \tag{12}$$

с начальным условием

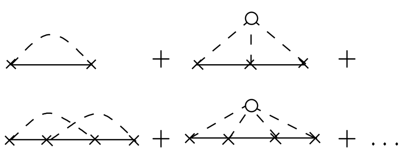
$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{13}$$

Практический интерес представляет распределение концентрации, усредненное по ансамблю реализаций среды $\overline{c}(\mathbf{r},t)\equiv\langle c(\mathbf{r},t)\rangle$. Выражение для него получается из (11) путем замены $c\to\overline{c}$, $G\to\overline{G}$, где $\overline{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)\equiv\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}';t)\rangle$ — функция Грина, усредненная по ансамблю реализаций (далее для краткости называем ее просто функцией Грина). Вычисление $\overline{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$ удобно проводить методами квантовой теории поля на основе разработанной в [17] «крестовой» диаграммной техники, которая получила развитие в теории переноса в неупорядоченных средах [18, 19].

В представлениях Фурье по пространственным переменным и Лапласа по времени с учетом уравнения (12), начального условия (13) и равенств (2), функция $\overline{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$ принимает вид

$$\overline{G}\{\mathbf{k},p\}=\frac{1}{p+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}+\overline{D}k^2-M(\mathbf{k},p)}, \tag{14}$$

где $\mathbf{k}$ и p — переменные Фурье и Лапласа, а $M(\mathbf{k},p)$ — поляризационный оператор, представляющий собой сумму неприводимых скелетных диаграмм [16]:

$M(\mathbf{k},p) =$  (15)

Здесь горизонтальные линии соответствуют функции $\overline{G}$, кресты — оператору возмущения

$$\hat{T}=-v_i'(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}D'(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{16}$$

а штриховые линии объединяют кресты, относящиеся к одному из кумулянтов, разложение по которым составляет суть процедуры усреднения по ансамблю реализаций. Помимо флуктуации скорости и коэффициента диффузии, каждый крест, согласно определению (16), содержит градиенты. В представлении Фурье они сводятся к волновым векторам, причем для слагаемого с D' получается произведение волновых векторов, относящихся к двум $\overline{G}$-линиям (один к правой относительно креста, другой к левой), а для члена с $\mathbf{v}'$, в соответствии с (3), возникает только один волновой вектор любой из этих линий. Каждой исходящей из креста штриховой линии отвечает свой волновой вектор, по которому происходит интегрирование. После подстановки равенства (14) в диаграммное разложение (15) последнее превращается в интегральное уравнение для функции $M(\mathbf{k},p)$.

Следующие разделы посвящены анализу его решения.

3. ПЕРЕНОС ПРИ НУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ АДВЕКЦИИ

Проанализируем сначала роль флуктуаций коэффициента диффузии. Рассуждения проведем на примере первой диаграммы для поляризационного оператора в (15). В соответствии с (16) она разбивается на два слагаемых:

$$M_2=M_2^{(A)}+M_2^{(D)}.$$

Первое обусловлено вкладом флуктуаций скорости адвекции, второе — коэффициента диффузии. С точностью до постоянных множителей они определяются выражениями

$$M_2^{(A)}\sim k^2\int d\mathbf{q}\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{2h-3}}{p+\overline{D}q^2-M(\mathbf{q},p)}, \tag{17}$$

$$M_2^{(D)}\sim k^2\int d\mathbf{q}\frac{q^2|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{2g-3}}{p+\overline{D}q^2-M(\mathbf{q},p)}. \tag{18}$$

Здесь на месте парных корреляторов (скорости и коэффициента диффузии) стоят соответствующие им асимптотики на малых волновых векторах. Величина g в (18) есть масштабная размерность коэффициента диффузии, и потому $g>0$. В предположении, что в области малых волновых векторов $M(\mathbf{q},p)\sim q^2$, интеграл в (18) на малых значениях $\mathbf{q}$ сходится даже при $\mathbf{k}=0$, $p=0$. Кажущаяся расходимость интеграла на больших волновых векторах связана с тем, что при этом становится неверной использованная в подынтегральном выражении длинноволновая асимптотика для парного коррелятора. Это означает, что в интересующей нас области малых k ($k\ll a^{-1}$) интеграл с точностью до малых поправок равен константе, и из (18) следует, что $M_2^{(D)}(\mathbf{k},p)\sim k^2$. В выражении для функции Грина (14) слагаемое $M_2^{(D)}(\mathbf{k},p)\sim k^2$ объединяется с членом $\overline{D}k^2$, приводя к перенормировке среднего значения коэффициента диффузии. Этот вывод сохраняет свою силу и с учетом всех диаграмм более высокого порядка. Поэтому в дальнейшем в диаграммном разложении поляризационного оператора мы будем учитывать лишь вклад флуктуаций скорости адвекции (т. е. только первое слагаемое в (16)).

Аналогично из (17) мы приходим к заключению, что при $h > 1$ в области малых волновых векторов имеет место зависимость $M_2^{(A)}(\mathbf{k}, p) \sim k^2$, подтверждающаяся во всех диаграммах более высокого порядка, и что, следовательно, в этом случае стохастическая адвекция также сводится к классической диффузии.

Таким образом, как флуктуации коэффициента диффузии любой размерности, так и флуктуации скорости с масштабной размерностью $h > 1$ не являются релевантными по отношению к выходу системы из режима классической диффузии. При $h \le 1$ ситуация радикально меняется.

Далее мы отдельно проанализируем случаи $h < 1$ и $h = 1$.

3.1. Масштабная размерность флуктуаций скорости $h < 1$

Если в этом случае предположить, что при $p \to 0$ в подынтегральном выражении (17) $M(\mathbf{q}, p) \sim q^2$, то в пределе $\mathbf{k}, p \to 0$ интеграл разойдется на малых волновых векторах. Поскольку на больших волновых векторах он сходится, использование длинноволновой асимптотики коррелятора скоростей правомерно, и указанная расходимость означает, что в области $\mathbf{k}$, $p \to 0$ справедливо неравенство $M(\mathbf{k}, p) \gg \overline{D} k^2$, так что в процессе дальнейшего анализа функцию Грина при $\mathbf{u} = 0$ (см. (14)) можно положить равной

$$\overline{G}\{\mathbf{k}, p\} = \frac{1}{p - M(\mathbf{k}, p)}\,. \tag{19}$$

Диаграммное разложение поляризационного оператора (15) происходит по корреляционным функциям, которые обладают свойством масштабной инвариантности (9). Естественно поэтому предположить (и затем доказать), что и сам поляризационный оператор, а с ним и функция Грина, обладают этим свойством. Из выражения (19) следует, что масштабные индексы поляризационного оператора и переменной Лапласа p совпадают. Поэтому масштабные соотношения для функций $M(\mathbf{k}, p)$ и $\overline{G}\{\mathbf{k}, p\}$ должны иметь вид

$$M\left(\lambda\mathbf{k}, \lambda^{\Delta} p\right) = \lambda^{\Delta} M(\mathbf{k}, p), \tag{20}$$

$$\overline{G}\left(\lambda\mathbf{k}, \lambda^{\Delta} p\right) = \lambda^{-\Delta} \overline{G}(\mathbf{k}, p). \tag{21}$$

Здесь Δ — масштабный индекс, подлежащий определению.

Займемся доказательством (20), (21). Исходя из диаграммного представления (15), запишем $M(\mathbf{k}, p)$ в виде суммы, n-е слагаемое которой есть вклад всех диаграмм с n крестами:

$$M(\mathbf{k}, p) = k^2 L(\mathbf{k}, p) = k^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_n(\mathbf{k}, p). \tag{22}$$

Множитель k^2 соответствует градиентам двух крайних крестов (правого и левого). Масштабный индекс n-го слагаемого в (22), Δ_n, складывается из индексов элементов соответствующей диаграммы. Это n-точечная группа корреляторов скорости — индекс $n(h-3)$, n градиентов — индекс n, $n-1$ функций Грина — индекс $-(n-1)\Delta$ и, наконец, $3n$-мерный дифференциал волновых векторов — индекс $3n$ (поскольку внутренние волновые векторы, по которым происходит интегрирование, входят в подынтегральные выражения аддитивно с волновым вектором $\mathbf{k}$, их индексы совпадают с индексом $\mathbf{k}$). Приравнивая сумму всех перечисленных индексов индексу Δ оператора M, приходим к уравнению

$$nh + n + (n-1)\Delta = \Delta, \tag{23}$$

из которого сразу следует не зависящее от порядка диаграммы значение масштабного индекса поляризационного оператора:

$$\Delta = 1 + h. \tag{24}$$

Поскольку, таким образом, (20) выполняется для всех слагаемых (22) с одним и тем же $\Delta = 1 + h$, оно выполняется и для всего ряда в целом. Доказанное соотношение (20) с учетом (24) дает основание представить поляризационный оператор в виде

$$M(\mathbf{k}, p) = V a^h k^{1+h} \varphi(\xi), \tag{25}$$

где $\varphi(\xi)$ — безразмерная функция безразмерной автомодельной переменной

$$\xi = \frac{p}{V a^h k^{1+h}}\,. \tag{26}$$

Множитель $V a^h$ в (25) и (26) получен с учетом (5).

Проанализируем поведение функции $\varphi(\xi)$ при больших и малых значениях аргумента. Легко видеть, что при $\xi \to 0$ величина $\varphi(\xi)$ должна стремиться к конечному не равному нулю пределу. В самом деле, если бы имело место соотношение $\lim\limits_{\xi\to 0} \varphi(\xi) = \infty$, то согласно (25), (26) и (19) выполнялись бы равенства $M(\mathbf{k}, 0) = \infty$ и $\overline{G}\{\mathbf{k}, 0\} = 0$. Но тогда из диаграммного разложения (15) получилось бы равенство $M(\mathbf{k}, 0) = 0$, которое противоречит предположению $\lim\limits_{\xi\to 0} \varphi(\xi) = \infty$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\xi\to 0} \varphi(\xi) \ne 0$. Таким образом, $\lim\limits_{\xi\to 0} \varphi(\xi) = A \sim 1$, и мы имеем

$$M(\mathbf{k},0) = AVa^h k^{1+h}. \tag{27}$$

Сравнивая эту формулу с (22), получаем $L_n(\mathbf{k},0) \propto \propto k^{-(1-h)}$. Вытекающая отсюда расходимость интегралов $L_n(\mathbf{k},p)$ при $p=0$, $\mathbf{k}\to 0$ означает, что при ненулевых значениях переменных $\mathbf{k}$ и p они сходятся на малых волновых векторах ($q_i \ll a^{-1}$), т. е. применение соответствующих этому пределу асимптотик скоростных корреляторов правомерно. Полученная для $\xi = 0$ формула (27) может быть обобщена и на случай ненулевых p при сохранении неравенства $\xi \ll 1$. Следующий член разложения по ξ будет тогда с точностью до коэффициента равен p при $h < 1/2$ (и не повлияет на вид знаменателя (19)), а при $h > 1/2$ он окажется пропорциональным $k^{2h-1}p^{(2-h)/(1+h)}$, превосходя p в (19) по порядку величины. (Напомним, что p соответствует первой производной по времени в дробно-диффузионном подходе.)

В обратном предельном случае, $\xi \gg 1$ (k^{1+h} стремится к нулю быстрее, чем p), в первом приближении по $\mathbf{k}$ можно в соответствии с (22) положить

$$M(\mathbf{k},p) \approx k^2 L(0,p), \tag{28}$$

причем масштабное соотношение (20) с учетом (24) позволяет восстановить вид функции $L(0,p)$:

$$L(0,p) \propto p^{-(1-h)/(1+h)}. \tag{29}$$

В этом случае в области $p \gg Va^h k^{1+h}$ асимптотика поляризационного оператора имеет вид $M \propto k^2 p^{-(1-h)/(1+h)}$ (ясно, однако, что здесь при $p\to 0$ нет сингулярности M). Отсюда с учетом (25) и (26) получаем первый член разложения $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) \sim \xi^{-(1-h)/(1+h)} \quad \text{при} \quad \xi \gg 1. \tag{30}$$

В интегралах для $L_n(\mathbf{k},p)$ при $p\neq 0$ точка $\mathbf{k}=0$ не является особой, поэтому при $\mathbf{k}\to 0$ имеет место аналитическое разложение по целым степеням $\mathbf{k}^2$, и в соответствии с (20) и (24) для функции

$$f(\xi) \equiv \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \equiv \frac{M(\mathbf{k},p)}{p} \tag{31}$$

существует представление

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^{-2n/(1+h)}, \quad \xi \gg 1, \tag{32}$$

где b_n — безразмерные коэффициенты. Подчеркнем, что равенство (32) соответствует аналитическому разложению функции $M(\mathbf{k},p)$ по вектору $\mathbf{k}$ в области, где $\xi \gg 1$ (см. (26)). Сопоставляя этот факт с выражением (27) для $M(\mathbf{k},p)$ при больших k, приходим к выводу, что $M(\mathbf{k},p)$ по отношению к k имеет точку ветвления при

$$k \sim \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{1/(1+h)}$$

(соответственно, $f(\xi)$ имеет точку ветвления при $|\xi| \sim 1$), а вид пропагатора (19) принципиально различен в зависимости от соотношения между p и k^{1+h} даже в области пространства Фурье–Лапласа, где обе величины малы (это поведение аналогично поведению вершинных частей в теории ферми-жидкости Ландау [20]). Такая неуниверсальность вида вполне масштабно инвариантного пропагатора несвойственна моделям с обычными уравнениями дробной диффузии [2, 3], но возможна в обобщениях, включающих в себя совместные пространственно-временные дробно-дифференциальные операторы (как в [9, 11]).

В нашем случае нетрудно подобрать такие интерполяционные операторы, которые соответствовали бы всем описанным асимптотическим свойствам пропагатора. При $h < 1/2$ это, например, $\partial_t - \mathfrak{D}^{(1+h)/2}$, а при $h > 1/2$ — например, $\partial_t^{(2-h)/(1+h)}\mathfrak{D}^{h-1/2} - \mathfrak{D}^{(1+h)/2}$, где ∂_t — дифференцирование по времени, $\mathfrak{D}$ — линейная комбинация $\partial_t^{2/(1+h)}$ и лапласиана с коэффициентом размерности $(Va^h)^{2/(1+h)}$.

Проанализируем поведение функции Грина в координатно-временном представлении. Применяя к (19) обратное преобразование Фурье–Лапласа, находим

$$\overline{G}(\mathbf{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} I\left(Va^h k^{1+h} t\right), \tag{33}$$

где функция $I(s)$ определена равенством

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0+i\infty} \frac{d\xi}{\xi}\,\frac{e^{is\xi}}{1+f(\xi)}, \quad \xi_0 > 0. \tag{34}$$

Из формул (33), (34) следует общий вид функции Грина:

$$\overline{G}(\mathbf{r},t) = (Va^h t)^{-3/(1+h)}\,\Phi\left(\frac{r^{1+h}}{Va^h t}\right), \tag{35}$$

где $\Phi(x)$ — функция с характерным масштабом аргумента единица, причем $\Phi(0) \sim 1$. Это значит, в частности, что размер области локализации частиц на больших временах имеет порядок

$$R \sim (Va^h t)^{1/(1+h)}. \tag{36}$$

В области малых расстояний от начала координат, удовлетворяющих неравенству $r \ll (Va^h t)^{1/(1+h)}$, экспонентой в (33) можно пренебречь, и мы получаем оценку

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) \sim (Va^h t)^{-3/(1+h)}, \tag{37}$$

которая вытекает и из (36), если учесть свойство сохранения полного числа частиц. Формула (37) определяет убывание концентрации в фиксированной точке пространства на больших временах.

Займемся выяснением асимптотики функции Грина в далекой по сравнению с R области пространства, т. е. при $r \gg (Va^h t)^{1/(1+h)}$. Здесь возможность (или невозможность) степенного убывания $\overline{G}(\mathbf{r}, t)$ определяется, согласно (33), поведением функции $I(s)$ при $s \ll 1$. Подстановка разложения (32) в (34) приводит к такому виду $I(s)$:

$$I(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^{2n/(1+h)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[(Va^h t)^{2/(1+h)} k^2\right]^n. \tag{38}$$

Подставляя эту формулу в (33), получаем выражение для функции $\overline{G}$ в виде суммы, первый член которой равен $\delta(\mathbf{r})$, а n-ый член пропорционален результату n-кратного действия лапласиана на $\delta(\mathbf{r})$. Другими словами, при $\mathbf{r} \neq 0$ каждый член этой суммы равен нулю. Математически это означает, что точка $r^{1+h}/Va^h t = \infty$ является существенно особой для функции $\Phi(x)$ и что разложение функции Грина по обратным степеням комбинации $r^{1+h}/Va^h t$ отсутствует.

Асимптотику $\overline{G}$-функции при $r \gg (Va^h t)^{1/(1+h)}$ можно получить сдвигом контура интегрирования в (33) по k (после выполнения интегрирования по угловым переменным) с действительной оси в верхнюю полуплоскость. Это в интересующем нас пределе дает

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) \propto \exp(ik_s r), \tag{39}$$

где k_s — ближайшая к действительной оси особая точка функции $I(Va^h k^{1+h} t)$ по переменной k в верхней полуплоскости. По самому своему определению (11)–(13) функция $\overline{G}$ не может быть знакопеременной (она, как и концентрация, должна быть положительной), поэтому показатель экспоненты в (39) является вещественной величиной. Отсюда следует, что k_s лежит на мнимой оси, причем в соответствии с разложением (38) имеем $\operatorname{Im} k_s \sim (Va^h t)^{-1/(1+h)}$. В итоге асимптотика функции Грина при больших значениях пространственного аргумента имеет вид

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) \propto \exp\left[-\frac{Br}{(Va^h t)^{1/(1+h)}}\right], \quad B \sim 1. \tag{40}$$

Вместе с нормировкой $(Va^h t)^{-3/(1+h)}$ из (35) эта формула определяет поведение концентрации на больших расстояниях, $r \gg (Va^h t)^{1/(1+h)}$: как ее нарастание в фиксированной далекой точке, так и мгновенный профиль. Таким образом, в модели стохастической адвекции, несмотря на медленное ($h < 1$) степенное убывание корреляторов, «тяжелые» степенные хвосты пространственной функции распределения отсутствуют.

3.2. Масштабная размерность флуктуаций скорости $h = 1$

Подстановка $M(\mathbf{q}, p) \sim q^2$ в интеграл (17) при $h = 1$ приводит к его логарифмической расходимости: $M_2^{(A)} \sim Vak^2 \ln \mu$, где

$$\mu = \left(\max\left\{\frac{pa}{V}, (ka)^2\right\}\right)^{-1}. \tag{41}$$

Это дает основание в логарифмическом приближении искать поляризационный оператор в виде

$$M(\mathbf{k}, p) \sim Vak^2 \ln^\alpha \mu \tag{42}$$

с показателем $\alpha > 0$. В произвольной диаграмме порядка $n > 2$ от интегрирования по волновым векторам тоже возникает логарифм, но такая диаграмма по сравнению с диаграммой второго порядка содержит дополнительно произведение $n - 2$ функций $\overline{G}$, которое в соответствии с (42) и (19) дает малый множитель $\ln^{-\alpha(n-2)} \mu$. Из этого следует, что при вычислении поляризационного оператора можно ограничиться скелетной диаграммой с двумя крестами и (17) превращается в уравнение

$$M(\mathbf{k}, p) \sim k^2 V^2 a^2 \int d\mathbf{q} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^{-1}}{p - M(\mathbf{q}, p)}. \tag{43}$$

Подстановка сюда (42) дает $\alpha = 1 - \alpha$, откуда $\alpha = 1/2$. Таким образом, при масштабной размерности скорости, равной единице ($h = 1$), функция Грина имеет вид

$$\overline{G}\{\mathbf{k}, p\} = \frac{1}{p + D_{ef} k^2 \ln^{1/2} \mu}, \tag{44}$$

где аргумент логарифма μ определен формулой (41), а $D_{ef} \sim Va$. Поступая, как при выводе (36), находим, что область локализации частиц на больших временах имеет размер

$$R \sim (Vat)^{1/2} \ln^{1/4}\left(\frac{Vt}{a}\right) \tag{45}$$

и, как и при $h < 1$, делаем вывод об отсутствии степенных членов разложения в распределении концентрации на больших расстояниях.

4. ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В СРЕДЕ С НЕНУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ СКОРОСТЬЮ АДВЕКЦИИ ($\mathbf{u} \neq 0$)

Перенос за счет средней скорости адвекции сам по себе значительно более эффективен, чем благодаря флуктуациям скорости. Поэтому реальный смысл имеет постановка задачи (именно этот случай мы и рассмотрим), в которой средняя скорость значительно меньше флуктуационной:

$$u \ll V. \tag{46}$$

Для удобства введем новую переменную

$$p' = p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}. \tag{47}$$

Ее использование вместо p соответствует переходу в координатно-временном представлении в движущуюся со скоростью $\mathbf{u}$ систему координат: $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Функция Грина (14) выражается через p' следующим образом:

$$\tilde{\tilde{G}}\{\mathbf{k}, p'\} = \frac{1}{p' - \tilde{M}(k, p')}. \tag{48}$$

В общем случае отличие от нуля средней скорости адвекции приводит к потере свойства масштабной инвариантности (20), (21). Задача, однако, поддается анализу в двух важных предельных случаях.

При таких значениях переменных $\mathbf{k}$ и p', что

$$\max\left\{|p'|, |\tilde{M}(\mathbf{k}, p')|\right\} \gg uk, \tag{49}$$

слагаемыми типа $-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}$ в знаменателях функций Грина, имеющих вид

$$\tilde{\tilde{G}}\{\mathbf{k} - \mathbf{q}, p'\} = \left[p' - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \tilde{M}(\mathbf{k}, p')\right]^{-1},$$

можно пренебречь. Тогда полученные выше результаты остаются в силе и для $\mathbf{u} \neq 0$ независимо от масштабной размерности h. Используя выражение (27) в качестве оценки $\tilde{M}(\mathbf{k}, p')$, вместо (49) можно записать

$$\max\left\{k, \frac{|p'|}{u}\right\} \gg k_*, \tag{50}$$

где

$$k_* \sim \frac{1}{a}\left(\frac{u}{V}\right)^{1/h}. \tag{51}$$

Сформулированный результат означает, что расплывание облака частиц на временах $t \ll t_* \equiv (uk_*)^{-1}$ происходит по тем же законам, что и в отсутствие средней скорости адвекции. При этом размер области расплывания превосходит расстояние переноса облака средним течением ($R \gg ut$).

Рассмотрим поведение поляризационного оператора в другой области переменных, $\max\{k, |p'|/u\} \ll k_*$. Оно принципиально различается для масштабных размерностей $h > 1/2$, $h < 1/2$ и $h = 1/2$. Проанализируем каждый из этих случаев отдельно.

1. Случай $\max\{k, |p'|/u\} \ll k_*$, $h > 1/2$.

Здесь главный вклад в интегралы, соответствующие выражениям для $\tilde{M}(\mathbf{k}, p')$, дает область интегрирования $|\mathbf{q}_i| > k_*$. Поэтому величина $\tilde{L}(\mathbf{k}, p')$, аналогичная $L(\mathbf{k}, p)$ из (22), не зависит от переменных $\mathbf{k}$, p' и имеет порядок $\tilde{L} \sim Va^h k_*^{h-1} \sim u^2 t_*$. Соответственно,

$$\tilde{M} \sim u^2 t_* k^2. \tag{52}$$

Отсюда следует, что при $h > 1/2$ на временах $t \gg t_*$ адвекционный перенос происходит по законам классической диффузии.

2. Случай $\max\{k, |p'|/u\} \ll k_*$, $h < 1/2$.

В этих условиях, как можно легко убедиться на примере диаграммы с двумя крестами, интегралы по волновым векторам сходятся при $|\mathbf{q}_i| \ll k$, и поэтому функции Грина типа

$$\tilde{\tilde{G}}\{\mathbf{k} - \mathbf{q}, p'\} = \left[p' - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \tilde{M}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, p')\right]^{-1}$$

могут быть аппроксимированы как

$$\tilde{\tilde{G}}\{\mathbf{k} - \mathbf{q}, p'\} \approx \left[p' - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \tilde{M}(\mathbf{k}, p')\right]^{-1}. \tag{53}$$

По той же причине можно провести аналогичную замену и в множителях типа $\mathbf{k} - \mathbf{q}$, возникающих от градиентов в крестах (16):

$$\mathbf{k} - \mathbf{q} \to \mathbf{k}. \tag{54}$$

В результате свойство масштабной инвариантности, выражаемое соотношениями (20) и (21), восстанавливается, но, естественно, с другим масштабным индексом Δ. При вычислении Δ следует учесть одно отличие от случая $\mathbf{u} = 0$. Теперь из-за (53) и (54) волновым векторам $\mathbf{q}$, по которым происходит интегрирование, следует приписать масштабный индекс Δ. Масштабный индекс диаграммы n-го порядка для $\tilde{M}(\mathbf{k}, p')$ складывается, таким образом, из n — индекса n множителей $\mathbf{k}$ от градиентов в крестах, $n(h-3)\Delta$ — индекса n-точечной группы корреляторов скорости, $-(n-1)\Delta$ — индекса произведения

$n-1$ функций Грина и $3n\Delta$ — индекса произведения дифференциалов. Итак, мы имеем уравнение

$$n + nh\Delta - (n-1)\Delta = \Delta, \tag{55}$$

откуда

$$\Delta = \frac{1}{1-h}. \tag{56}$$

Соотношения (20) и (56) позволяют представить поляризационный оператор в форме, аналогичной (25):

$$\tilde{M} \sim \frac{1}{t_*}(ut_*k)^{1/(1-h)}\psi(\zeta), \tag{57}$$

где $\psi(\zeta)$ — безразмерная функция безразмерной автомодельной переменной

$$\zeta = p' t_* (ut_*k)^{-1/(1-h)}. \tag{58}$$

В предельном случае при $\zeta \ll 1$, когда $\tilde{M} \gg p'$, в знаменателях, как в (53), следует пренебречь слагаемым p'. Функция $\tilde{M}(\mathbf{k}, p')$ оказывается поэтому не зависящей от p', что с точностью до численного множителя порядка единицы позволяет, основываясь на (57), (58), определить ее однозначно:

$$\tilde{M} \sim t_*^{-1}(ut_*k)^{1/(1-h)}. \tag{59}$$

В обратном предельном случае при $\zeta \gg 1$, когда $\tilde{M} \ll p'$, в главном порядке вклад поляризационного оператора дается диаграммой с двумя крестами, где функцию Грина можно аппроксимировать выражением $\overline{G}(\mathbf{k}-\mathbf{q}, p') \approx (p' - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{u})^{-1}$. Вычисление этой диаграммы дает

$$\tilde{M} \sim \frac{k^2u^2}{p'}(p't_*)^{2h}. \tag{60}$$

Формулы (57)–(60) для $\mathbf{u} \neq 0$ по структуре аналогичны формулам (25)–(29) для $\mathbf{u} = 0$. Поступая, как при выводе выражений (35), (36) и (40), мы применяем к (48) с учетом (47) и (57), (58) обратное преобразование Фурье–Лапласа и получаем, что при $h < 1/2$ на временах $t \gg t_*$ функция Грина имеет вид

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(ut_*)^3}\left(\frac{t_*}{t}\right)^{3(1-h)} \times \\ \times \Psi\left[\frac{t_*}{t}\left(\frac{r'}{ut_*}\right)^{1/(1-h)}\right], \tag{61}$$

где $\Psi(0) \sim 1$ и характерный масштаб аргумента функции $\Psi(x)$ имеет порядок единицы. Отсюда следует оценка размера области локализации частиц на указанных временах:

$$R \sim ut_*\left(\frac{t}{t_*}\right)^{1-h}. \tag{62}$$

В пределах этой области (т. е. при $r' \ll ut_*(t/t_*)^{1-h}$)

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t) \sim \left[\frac{1}{ut_*}\left(\frac{t_*}{t}\right)^{1-h}\right]^3. \tag{63}$$

При анализе поведения функции Грина на больших расстояниях рассуждаем, как в случае $\mathbf{u} = 0$. Учитывая, что ближайшая к вещественной оси переменной k особая точка фурье-образа $\overline{G}$-функции

$$k_s \sim i\frac{1}{ut_*}\left(\frac{t_*}{t}\right)^{1-h},$$

находим асимптотику функции Грина при больших r':

$$G(\mathbf{r}, t) \propto \exp\left[-C\frac{r'}{ut_*}\left(\frac{t_*}{t}\right)^{1-h}\right], \quad C \sim 1. \tag{64}$$

3. Случай $\max\{k, |p'|/u\} \ll k_*$, $h = 1/2$.

Ситуация с $\mathbf{u} \neq 0$, $h = 1/2$ аналогична случаю с $\mathbf{u} = 0$, $h = 1$, но отличается от него независимостью подынтегрального выражения от $\tilde{M}(\mathbf{q}, p')$ в логарифмической области изменения переменных. В итоге

$$\tilde{M} \sim u^2 t_* k^2 \ln\nu, \\ \nu = \left(\max\left\{\frac{p'}{uk_*}, \left(\frac{k}{k_*}\right)^2\right\}\right)^{-1} \tag{65}$$

(для получения этого результата по-прежнему достаточно решать укороченное уравнение с двухкрестовой диаграммой). Как при выводе (45), мы находим, что на временах $t \gg t_*$

$$R \sim \left[u^2 t_* t \ln\left(\frac{t_*}{t}\right)\right]^{1/2}. \tag{66}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим и кратко обсудим основные результаты.

В работе на основе диаграммной техники и представлений о масштабной инвариантности без использования упрощающих предположений получен ряд принципиальных результатов, касающихся процессов переноса пассивного скаляра в сильно неупорядоченных средах с дальними корреляциями.

Тип закономерностей существенно зависит от определяемой показателями степеней в корреляционных функциях масштабной размерности пространственных флуктуаций адвекционной скорости. Флуктуации скорости с масштабной размерностью

$h > 1$ так же, как и флуктуации коэффициента диффузии любой размерности, не приводят к выходу из режима классической диффузии.

В среде с флуктуациями скорости размерности $h < 1$ устанавливается режим переноса типа супердиффузии. Одна из его характеристик состоит в том, что при нулевой средней величине скорости адвекции расплывание облака частиц на больших временах происходит по закону $R \propto t^{1/(1+h)}$ — более быстрому, чем в классической диффузии. Эта закономерность качественно совпадает с вытекающей из дробно-диффузионной модели, в которой уравнение переноса содержит (в отличие, к примеру, от [21]) первую производную по времени и производную $(1+h)$-го порядка по пространственным координатам. Однако на больших расстояниях ($r \gg R$), где согласно такой модели дробной диффузии концентрация уменьшается по степенному закону (см., например, [2,14]), выводы двух моделей резко различаются. В этой области, согласно нашему анализу, концентрация убывает экспоненциально с показателем $-(r/R)$. То есть в модели стохастической адвекции нет степенных хвостов функции распределения даже при наличии дальних (степенных) корреляций скоростей.

На наш взгляд, это расхождение не случайно. Физическая по своей природе модель стохастической адвекции учитывает, что высокие скорости распространения частиц очень редки, и это делает невозможным медленное степенное убывание концентрации на больших расстояниях. Как стандартная модель дробной диффузии [2,3], так и ее обобщения с произвольными параметрами [11] (не такова модель [9]), будучи чисто математическими, указанный физический принцип игнорируют, и ограничений на характер убывания концентрации на больших расстояниях в них нет. С точки зрения блужданий Леви рассмотренная задача соответствует некоторому классу вероятностей перескока с неразделяющимися переменными, в которых пространственно-временная связь не может быть выражена δ-функцией.

Результаты работы, относящиеся к случаю отличной от нуля средней скорости адвекции ($\mathbf{u} \neq 0$), состоят в следующем. На малых временах $t \ll t_*$, когда аномально-диффузионное расплывание доминирует над дрейфовым сносом ($R \gg ut$), процессы переноса идут так же, как при $\mathbf{u} = 0$. Положение меняется на больших временах ($t \gg t_*$), когда дрейф преобладает ($R \ll ut$). Здесь в сопутствующей системе координат процессы переноса идут по-разному в зависимости от знака неравенства между h и $1/2$. При $h > 1/2$ расплывание плотности распределения частиц происходит по закону классической диффузии с эффективным коэффициентом, зависящим от u. При $h < 1/2$ расплывание идет в режиме супердиффузии с $R \propto t^{1-h}$.

Отдельное положение занимают размерности $h = 1$ при $\mathbf{u} = 0$ и $h = 1/2$ при $\mathbf{u} \neq 0$, соответствующие границам между различными режимами переноса. В обоих случаях степенные закономерности для $R(t)$ модифицируются логарифмическими множителями.

Авторы глубоко благодарны А. М. Дыхне за полезное обсуждение и интересные замечания и С. А. Рыбаку за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992); S.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).

2. G. M. Zaslavsky, in *Levy Flights and Related Topics in Physics*, ed. by M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frish, Lect. Notes in Phys. Vol. 450, Berlin, Springer (1995); В. В. Учайкин, УФН **173**, 847 (2003).

3. A. Compte, Phys. Rev. E **53**, 4191 (1996).

4. M. M. Meerschaert, D. A. Benson, H.-P. Scheffler, and B. Baeumer, Phys. Rev. E **65**, 041103 (2002).

5. M. Bologna, P. Grigolini, and J. Riccardi, Phys. Rev. E **60**, 6435 (1999); R. Metzler, J. Klafter, and I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **58**, 1621 (1998).

6. I. M. Sokolov and R. Metzlez, Phys. Rev. E **67**, 010101(R) (2003).

7. R. Metzler and T. F. Nonnenmacher, Phys. Rev. E **57**, 6409 (1998).

8. I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **63**, 011104 (2000).

9. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **121**, 299 (2002).

10. A. V. Chechkin, R. Gorenflo, and I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **66**, 046129 (2002).

11. M. M. Meerschaert, D. A. Benson, H.-P. Scheffler, and P. Becker-Kern, Phys. Rev. E **66**, 060102(R) (2002).

12. K. V. Chukbar and V. Yu. Zaburdaev, Phys. Rev. E **68**, 033101 (2003).

13. D. L. Koch and J. F. Brady, Phys. Fluids A **1**, 47 (1989); D. L. Koch and J. F. Brady, Phys. Fluids **31**, 965 (1988).

14. О. Г. Бакунин, УФН **173**, 757 (2003).

15. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1975).

16. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ИФМЛ, Москва (1962).

17. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1158 (1958); **36**, 319 (1959).

18. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **53**, 40 (1967).

19. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **63**, 242 (1972).

20. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97 (1958).

21. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **109**, 1335 (1996).

22. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Process: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman and Hall, New York (1994).