ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 5, стр. 963–981

ПОСТ-ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Ч. Янкевич [*], ***И. Новак*** [**]

Институт физики Жешувского университета
PL 35-310, Жешув, Польша

Поступила в редакцию 11 июля 2003 г.

В работе методом Эйнштейна–Инфельда–Гофмана из уравнений поля тяготения Эйнштейна выведены пост-постньютоновские уравнения движения точечных частиц. Для вывода этих уравнений использован тензор энергии-импульса, предложенный Инфельдом и Плебаньским [5, 6]. Полученные уравнения движения совпадают с уравнениями, выведенными Копейкиным [10] методом Фока.

PACS: 04.25.-g, 04.25.Nx

1. ВВЕДЕНИЕ

Эйнштейн, Инфельд и Гофман, а также независимо Фок разработали два метода вывода ньютоновских и постньютоновских уравнений движения точечных частиц из уравнений поля тяготения Эйнштейна. Эти методы подробно изложены в книге Фока [1, гл. 6] и в книге Инфельда и Плебаньского [2, гл. 3].

Основные черты метода Фока таковы: используются уравнения поля с тензором энергии-импульса сплошной среды; метрический тензор разлагается в ряды по малому параметру, что формально соответствует разложению по обратным степеням скорости света; в гармонических координатах эти разложения сводят приближенные уравнения поля к волновым уравнениям; в решениях этих волновых уравнений учитываются поправки на запаздывание; уравнения движения выводятся из условий интегрируемости уравнений поля в виде ковариантных законов сохранения тензора энергии-импульса, которые следуют из тождеств Бианки; в частности, точечные частицы определяются как центры масс упругих сферически-симметричных, необращающихся тел, размеры которых малы в сравнении с расстояниями между ними; конечные значения метрического тензора на мировых линиях центров масс получаются применением уравнений внутренней структуры тел. В пионерских работах [3, 4] уравнения движения выводятся не из ковариантных законов сохранения тензора энергии-импульса, а из уравнений, определяющих гармонические координаты.

В методе Эйнштейна–Инфельда–Гофмана (EIH), как и в методе Фока, метрический тензор разлагается в ряды по обратным степеням скорости света. Дополнительно предполагается, что производные по времени и пространственным координатам от коэффициентов разложения метрического тензора не изменяют их порядка малости. Это добавочное предположение, являющееся сутью метода последовательных приближений EIH, позволяет свести приближенные уравнения поля к уравнениям типа уравнений Пуассона. Уравнения движения выводятся из ковариантных законов сохранения тензора энергии-импульса. В частности, точечные частицы определяются как сингулярности метрического тензора, удовлетворяющего уравнениям поля с тензором энергии-импульса, содержащим $\hat{\delta}$-функции Инфельда–Плебаньского [5, 6]. Эти $\hat{\delta}$-функции обеспечивают также регуляризацию метрического тензора на мировых линиях сингулярностей. В первых работах [7–9] Эйнштейн, Инфельд и Гофман уравнения движения выводят не из ковариантных законов сохранения тензора энергии-импульса, а из условий интегрируемости уравнений поля в виде двумерных

[*] E-mail: czjan@univ.rzeszow.pl
[**] E-mail: iwnow@univ.rzeszow.pl

поверхностных интегралов, окружающих сингулярности.

Копейкин [10], продолжая метод Фока, получил из уравнений поля пост-постньютоновские уравнения движения точечных частиц с радиационными поправками к этим уравнениям.

В этой работе мы выводим пост-постньютоновские уравнения движения точечных частиц из уравнений поля с тензором энергии-импульса Инфельда–Плебаньского методом последовательных приближений EIH.

Уравнения движения, выведенные Копейкиным и нами, совпадают с уравнениями движения, полученными раннее в работах [11, 12], в которых применяется метод регуляризации «*partie finie*» Адамара.

Для получения уравнений движения используется также метод Арновита–Десера–Миснера (ADM) [13, 14]. К этому направлению принадлежат, например, работы [15, 16]. Поскольку в этом методе гармонические координаты, используемые Копейкиным [10] и нами, не допускаются, в результате получаются другие пост-постньютоновские уравнения движения.

2. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Уравнения поля тяготения Эйнштейна запишем в виде

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2} T^*_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

где

$$T^*_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\varrho} g_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\varrho\sigma} \right) T^{\varrho\sigma}.$$

В гармонических координатах, определяемых уравнениями

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \right) = 0, \tag{2.2}$$

тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} - \\ - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} (\Gamma_{\rho\mu\alpha} \Gamma_{\sigma\nu\beta} + \Gamma_{\mu\rho\alpha} \Gamma_{\sigma\nu\beta} + \Gamma_{\nu\rho\alpha} \Gamma_{\sigma\mu\beta}), \tag{2.3}$$

где

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

Для N точечных частиц тензор энергии-импульса, предложенный Инфельдом и Плебаньским [2, гл. 1], есть

$$\sqrt{-g} T^{\mu\nu} = \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{x} - \bar{\xi}_A) \times \\ \times \left(g_{\rho\sigma} \frac{d\xi^\rho_A}{dx^0} \frac{d\xi^\sigma_A}{dx^0} \right)^{-1/2} \frac{d\xi^\mu_A}{dx^0} \frac{d\xi^\nu_A}{dx^0}. \tag{2.4}$$

Из уравнений поля (2.1) и тождеств Бианки следуют уравнения движения точечных частиц, рассматриваемых как сингулярности метрического тензора [2, гл. 1]:

$$\frac{d^2 \xi^a_A}{(dx^0)^2} + \left(\overset{A}{\overline{\Gamma^a_{\mu\nu}}} - \frac{d\xi^a_A}{dx^0} \overset{A}{\overline{\Gamma^0_{\mu\nu}}} \right) \frac{d\xi^\mu_A}{dx^0} \frac{d\xi^\nu_A}{dx^0} = 0. \tag{2.5}$$

Мы используем следующие обозначения: k — гравитационная постоянная; c — скорость света; греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские индексы, если не указано другое, 1, 2, 3, повторение этих индексов обозначает соответствующее суммирование; индексы A, B, C принимают значения $1, 2, \ldots, N$, где N — число частиц; $(\bar{x}) = (x^a)$ и $x^0 = ct$ — соответственно пространственные и временные координаты точки поля; $(\bar{\xi}_A) = (\xi^a_A)$ и $\xi^0_A = x^0$ — соответственно пространственные и временные координаты точечных частиц;

$$|\bar{x}| = r, \quad \bar{x} - \bar{\xi}_A = \bar{r}_A, \quad |\bar{x} - \bar{\xi}_A| = r_A,$$

$$\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B = \bar{r}_{AB}, \quad |\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B| = r_{AB},$$

$$N^a_A = r^{-1}_A (x^a - \xi^a_A), \quad N^a_{AB} = r^{-1}_A (\xi^a_A - \xi^a_B),$$

$$V^a_A = \frac{d\xi^a_A}{dt}, \quad W^a_A = \frac{d^2 \xi^a_A}{dt^2},$$

$\Delta = \partial_a \partial_a$, ∂_μ — производные по координатам x^μ, ∂^A_a — производные по координатам ξ^a_A, точка над функцией обозначает производную по времени t; сигнатура метрического тензора совпадает с сигнатурой тензора Минковского, равной $(+, -, -, -)$.

Введенная Инфельдом и Плебаньским $\hat{\delta}$-функция обладает всеми свойствами δ-функции Дирака и добавочным свойством (см. Приложение в работе [2])

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r^{-p}_A (d\bar{x}) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, L. \tag{2.6}$$

Мы используем также следующее обозначение:

$$\overset{A}{\overline{(\ldots)}} = \int (\ldots) \hat{\delta}(\bar{r}_A)(d\bar{x}).$$

Будем искать решения уравнений поля (2.1) методом последовательных приближений EIH, предполагая, что а) метрический тензор можно разложить в степенные ряды

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1+c^{-2} \underset{(2)}{h_{00}} +c^{-4} \underset{(4)}{h_{00}} +c^{-6} \underset{(6)}{h_{00}} + \ldots, \\
g_{0n} &= c^{-3} \underset{(3)}{h_{0n}} +c^{-5} \underset{(5)}{h_{0n}} + \ldots, \\
g_{mn} &= -\delta_{mn}+c^{-2} \underset{(2)}{h_{mn}} +c^{-4} \underset{(4)}{h_{mn}} + \ldots,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

б) производные по времени t и по пространственным координатам x^a коэффициентов разложения метрического тензора не изменяют их порядка малости:

$$
\underset{(i)}{h_{\mu\nu}} \sim \frac{\partial}{\partial t} \underset{(i)}{h_{\mu\nu}} \sim \frac{\partial}{\partial x^a} \underset{(i)}{h_{\mu\nu}} . \tag{2.8}
$$

Предположения **а** и **б** позволяют свести приближенные уравнения поля к уравнениям типа Пуассона, вообще говоря, с неограниченным носителем источников поля.

Вместо разложения (2.7) можно взять более общее разложение

$$
g_{\mu\nu} = \underset{(0)}{g_{\mu\nu}} + \sum_{i=1}^{\infty} c^{-i} \underset{(i)}{h_{\mu\nu}} , \tag{2.9}
$$

однако в гармонической системе координат [17, 18] уравнения поля дают

$$
\underset{(0)}{g_{\mu\nu}} = \eta_{\mu\nu},
$$

а равенства

$$
\underset{(2i-1)}{h_{00}} = 0, \quad \underset{(2i)}{h_{0n}} = 0, \quad \underset{(2i-1)}{h_{mn}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,
$$

являются предположениями метода EIH, учитывающего только стоячие волны [7–9, 19].

Для приведения приближенных уравнений поля к уравнениям Пуассона с ограниченным носителем источников поля, будем использовать тождества

$$
\partial_a (fg) \equiv f\partial_a g + g\partial_a f, \tag{2.10}
$$

$$
\partial_a\partial_b (fg) \equiv f\partial_a\partial_b g+g\partial_a\partial_b f+\partial_a f\partial_b g+\partial_a g\partial_b f. \tag{2.11}
$$

Для сингулярных функций f и g эти тождества определяют производные произведения функций через произведение производных этих функций. Тождества (2.10) и (2.11) будем применять (см. Приложение А) к сингулярным функциям

$$
f = r_A^{-1}, r_A^{-2}, \ldots , \quad g = r_B^{-1}, r_B^{-2}, \ldots
$$

3. ПОСТ-НЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Используя формулы (2.3), (2.4), (2.7) и (2.8), из уравнений поля (2.1) получаем

$$
\begin{aligned}
\Delta \underset{(2)}{h_{00}} &= 8\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A), \\
\Delta \underset{(2)}{h_{mn}} &= 8\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A)\delta_{mn}, \\
\Delta \underset{(3)}{h_{0n}} &= -16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) V_A^n.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Решениями уравнений (3.1) являются

$$
\underset{(2)}{h_{00}} = -2\Phi, \quad \underset{(2)}{h_{mn}} = -2\Phi\delta_{mn}, \quad \underset{(3)}{h_{0n}} = 4\Phi_n, \tag{3.2}
$$

где

$$
\Phi = k \sum_A m_A r_A^{-1}, \quad \Phi_n = k \sum_A m_A V_A^n r_A^{-1}. \tag{3.3}
$$

Используя (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), а также решения (3.2), из уравнений (2.1) получаем

$$
\Delta \underset{(4)}{h_{00}} + 2\ddot{\Phi} + 4\Phi\Delta\Phi - 4\partial_k\Phi\partial_k\Phi = 16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) \left(\frac{3}{4} V_A^2 - \frac{5}{2}\Phi \right). \tag{3.4}
$$

Учитывая, что

$$
\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\Delta\ddot{\chi}, \quad \chi = k \sum_A m_A r_A, \tag{3.5}
$$

$$
\Delta\Phi = -4\pi \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A), \tag{3.6}
$$

и тождество

$$
\Delta\Phi^2 \equiv 2\Phi\Delta\Phi + 2\partial_k\Phi\partial_k\Phi,
$$

которое следует из (А.5) и (А.6), имеем

$$
\Delta \left(\underset{(4)}{h_{00}} + \ddot{\chi} - 2\Phi^2 \right) = 16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) \left(\frac{3}{4} V_A^2 - \frac{1}{2}\Phi \right). \tag{3.7}
$$

Для решения этого уравнения, учитывая первую формулу (3.3), рассмотрим интеграл

$$\int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A)\Phi'|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}') = km_A \int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A) r_A^{'-1}|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}') + \\ + k \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B \int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A) r_B^{'-1}|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}'). \quad (3.8)$$

Первый интеграл справа дает ненулевой вклад только для $\bar{x}' - \bar{\xi}_A = 0$. Для его вычисления разлагаем $|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}$ в ряд по $r'_A = |\bar{x'} - \bar{\xi}_A| \approx 0$:

$$|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(N_A^k N_A^{'k}) r_A^{-(m+1)} r_A^{'m}, \quad (3.9)$$

где $P_m(N_A^k N_A^{'k})$ — полиномы Лежандра. Свойство (2.6) $\hat{\delta}$-функции приводит к тому, что

$$\int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A) r_A^{'-1}|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}') = \int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A) P_1(N_A^k N_A^{'k}) r_A^{-2}(d\bar{x}') = 0, \quad (3.10)$$

поскольку выражение $P_1(N_A^k N_A^{'k}) = N_A^k N_A^{'k}$ является нечетной функцией переменной $\bar{r}'_A$. Второй интеграл справа в (3.8) легко вычисляется, так как подынтегральная функция является непрерывной для $\bar{x}' = \bar{\xi}_A$. Таким образом, имеем

$$\int \hat{\delta}(\bar{x'} - \bar{\xi}_A)\Phi'|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}') = \overline{\Phi}^{A} r_A^{-1}, \quad (3.11)$$

где

$$\overline{\Phi}^{A} = k \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B r_{AB}^{-1}.$$

Учитывая (3.10) и (3.11), из (3.7) получаем

$$\underset{(4)}{h_{00}} = 2\Phi^2 - \ddot{\chi} + k \sum_A m_A \left(2 \overline{\Phi}^{A} - 3V_A^2\right) r_A^{-1}. \quad (3.12)$$

Решений (3.2) и (3.12) достаточно для вывода постньютоновских уравнений движения.

Из формул (2.5) и (2.7) в постньютоновском приближении имеем

$$\frac{d^2\xi_A^n}{dt^2} = \underset{(0)}{F_A^n} + c^{-2} \underset{(2)}{F_A^n}, \quad (3.13)$$

где

$$\underset{(0)}{F_A^n} = -\frac{1}{2} \overline{\partial_n \underset{(2)}{h_{00}}}^{A}, \quad (3.14)$$

$$\underset{(2)}{F_A^n} = -\frac{1}{2} \overline{\partial_n \underset{(4)}{h_{00}}}^{A} - \frac{1}{2} \overline{\underset{(2)}{h_{nk}} \partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{A} + \overline{\underset{(3)}{\dot{h}_{0n}}}^{A} + \frac{1}{2} \overline{\underset{(2)}{\dot{h}_{00}}}^{A} V_A^n + \overline{\underset{(2)}{\dot{h}_{nk}}}^{A} V_A^k - \\ - \overline{\partial_n \underset{(3)}{h_{0k}}}^{A} V_A^k + \overline{\partial_k \underset{(3)}{h_{0n}}}^{A} V_A^k + \overline{\partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{A} V_A^k V_A^n - \frac{1}{2} \overline{\partial_n \underset{(2)}{h_{ks}}}^{A} V_A^k V_A^s + \overline{\partial_k \underset{(2)}{h_{ns}}}^{A} V_A^k V_A^s. \quad (3.15)$$

Подставляя решения (3.2) и (3.12) в (3.15), получаем следующие интегралы с сингулярными функциями, которые в результате интегрирования дают:

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} N_A^k (d\bar{x}) = 0,$$

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-3} N_A^k N_A^b N_A^s (d\bar{x}) = 0,$$

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} N_A^k N_A^b (d\bar{x}) = \frac{1}{3}\delta_{kb} \int \delta(\bar{r}_A) r_A^{-2} (d\bar{x}) = 0,$$

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} r_B^{-2} N_B^k (d\bar{x}) = 0, \quad A \neq B,$$

$$\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} r_B^{-1} N_A^n (d\bar{x}) = 0, \quad A \neq B.$$

Два первых интеграла равны нулю вследствие нечетности подынтегральных функций, а третий интеграл равен нулю благодаря свойству (2.6) $\hat{\delta}$-функции и четности подынтегральных выражений. Последние два интеграла вычисляем, разлагая r_B^{-M} в ряд по $r_A \approx 0$:

$$r_B^{-L} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\frac{1}{2}L} (N_A^k N_{BA}^k) \frac{r_A^m}{r_{AB}^{m+L}}, \tag{3.16}$$

где $C_m^L(N_A^k N_{BA}^k)$ — полиномы Гегенбауэра.

Таким образом, из (3.2) и (3.12), учитывая также (3.13)–(3.15), получаем

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\xi_A^n}{dt^2} = k \sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A \partial_n^A r_{AB}^{-1} + c^{-2} \left\{ k \sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_B \left[\frac{1}{2} V_B^k V_B^s \partial_n^A \partial_k^A \partial_s^A r_{AB} + (4V_B^n V_A^k - 4V_A^n V_A^k - \right.\right. \\
\left. - 4V_B^n V_B^k + 3V_A^n V_B^k)\partial_k^A r_{AB}^{-1} + \left(V_A^2 - 4V_A^k V_B^k + \frac{3}{2} V_B^2 \right) \partial_n^A r_{AB}^{-1} - k(5m_A + 4m_B) r_{AB}^{-1} \partial_n^A r_{AB}^{-1} \right] - \\
\left. - \frac{1}{2} k^2 \sum_{\substack{B \\ B\neq A \\ B\neq C}} \sum_{\substack{C \\ C\neq A}} m_B m_C (\partial_k^B r_{BC}^{-1} \partial_k^B \partial_n^B r_{AB} - 8 r_{AB}^{-1} \partial_n^B r_{BC}^{-1} - 2 r_{BC}^{-1} \partial_n^B r_{AB}^{-1} - 8 r_{AB}^{-1} \partial_n^C r_{AC}^{-1}) \right\}.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Для двух тел ($N = 2$) из (3.17) имеем

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\xi_1^n}{dt^2} = k m_2 \partial_n^1 r_{12}^{-1} + c^{-2} \left\{ k m_2 \left[\frac{1}{2} V_2^k V_2^s \partial_n^1 \partial_k^1 \partial_s^1 r_{12} + (4V_2^n V_1^k - 4V_1^n V_1^k - 4V_2^n V_2^k + 3V_1^n V_2^k) \partial_k^1 r_{12}^{-1} + \right.\right. \\
\left.\left. + \left(V_1^2 - 4V_1^k V_2^k + \frac{3}{2} V_2^2 \right) \partial_n^1 r_{12}^{-1} - k(5m_1 + 4m_2) r_{12}^{-1} \partial_n^1 r_{12}^{-1} \right] \right\}.
\end{gathered} \tag{3.18}$$

Заменяя индекс «1» на «2» в (3.18), получаем уравнения движения для второго тела. Уравнения (3.18) впервые были выведены из полевых уравнений Эйнштейном, Инфельдом, Гофманом [7] в координатах, определяемых условиями

$$\partial_m \gamma_{mn} = 0, \quad \partial_m \gamma_{m0} - c^{-1} \dot{\gamma}_{00} = 0, \tag{3.19}$$

где

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu},$$

а также Петровой методом Фока в гармонических координатах [4].

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ПОСТ-ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Учитывая решения (3.2), (3.12), а также формулы (2.3), (2.4), (2.7) и (2.8), из уравнения (2.1) получаем

$$\begin{gathered}
\Delta \underset{(4)}{h_{mn}} + 4\Phi\Delta\Phi\delta_{mn} + 4\partial_k\Phi\partial_k\Phi\delta_{mn} - 4\partial_m\Phi\partial_n\Phi + 2\ddot{\Phi}\delta_{mn} = \\
= 16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) \left[V_A^m V_A^n - \frac{1}{4} V_A^2 \delta_{mn} - \frac{1}{2} \Phi \delta_{mn} \right].
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Преобразуем эти уравнения с помощью формул

$$\Delta \ln S_{AB} = r_A^{-1} r_B^{-1}, \quad S_{AB} = r_A + r_B + r_{AB}. \tag{4.2}$$

$$\Delta \ln r_A = r_A^{-2}, \tag{4.3}$$

$$\partial_a \partial_b r_A^{-1} = r_A^{-3}(3N_A^a N_A^b - \delta_{ab}) - \frac{4}{3}\pi \hat{\delta}(\bar{r}_A)\delta_{ab}, \tag{4.4}$$

а также тождества, которое следует из (A.3) для $L = 2$,

$$\partial_a \partial_b r_A^{-2} = 2\partial_a r_A^{-1} \partial_b r_A^{-1} + 2r_A^{-1} \partial_a \partial_b r_A^{-1}. \tag{4.5}$$

Из (4.2)–(4.5) и первого выражения из (3.3), а также из (A.13) получаем

$$\partial_m \Phi \partial_n \Phi = \Delta \left[k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_A m_B \partial_m^A \partial_n^B \ln S_{AB} + \frac{1}{8} k^2 \sum_A m_A^2 (\partial_m \partial_n \ln r_A + r_A^{-2} \delta_{mn}) \right] + \\ + \frac{4}{3}\pi k^2 \sum_A m_A^2 \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} \delta_{mn}. \tag{4.6}$$

Используя выражения (3.5) и (4.6), из уравнения (4.1) имеем

$$\Delta \left[\underset{(4)}{h_{mn}} + \ddot{\chi}\delta_{mn} + 2\Phi^2 \delta_{mn} - 4k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_A m_B \partial_m^A \partial_n^B \ln S_{AB} - \frac{1}{2} k^2 \sum_A m_A^2 (\partial_m \partial_n \ln r_A + r_A^{-2} \delta_{mn}) \right] = \\ = \frac{16}{3}\pi k^2 \sum_A m_A^2 \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} \delta_{mn} + 16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) \left[V_A^n V_A^m - \frac{1}{4} V_A^2 \delta_{mn} - \frac{1}{2} \Phi \delta_{mn} \right]. \tag{4.7}$$

С учетом формулы (3.10) решение уравнения (4.7) имеет вид

$$\underset{(4)}{h_{mn}} = -\ddot{\chi}\delta_{mn} - 2\Phi^2 \delta_{mn} + 4k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_A m_B \partial_m^A \partial_n^B \ln S_{AB} + \frac{1}{2} k^2 \sum_A m_A^2 (\partial_m \partial_n \ln r_A + r_A^{-2} \delta_{mn}) - \\ - k \sum_A m_A \left[4r_A^{-1} V_A^m V_A^n - 2 \left(\overset{A}{\Phi} + \frac{1}{2} V_A^2 \right) r_A^{-1} \delta_{mn} \right]. \tag{4.8}$$

Используя решение (3.2) и формулы (2.3), (2.4), (2.7) и (2.8), из уравнения (2.1) получаем

$$\Delta \underset{(5)}{h_{0n}} - 4\ddot{\Phi}_n + 16\partial_k \Phi \partial_n \Phi_k + 12\dot{\Phi}\partial_n \Phi - 8\Phi \Delta \Phi_n = 16\pi k \sum_A m_A \hat{\delta}(\bar{r}_A) \left[\Phi V_A^n + 2\Phi_n - \frac{1}{2} V_A^2 V_A^n \right]. \tag{4.9}$$

Аналогично (4.6) преобразуем последовательно третье и четвертое слагаемые в левой части уравнения (4.9):

$$\partial_k \Phi \partial_n \Phi_k = \Delta \left[k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_A m_B \partial_k^A \partial_n^B \ln S_{AB} V_A^k + \frac{1}{8} k^2 \sum_A m_A^2 (\partial_k \partial_n \ln r_A + r_A^{-2} \delta_{kn}) V_A^k \right] + \\ + \frac{4}{3}\pi k^2 \sum_A m_A^2 \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} V_A^n, \tag{4.10}$$

$$\dot{\Phi} \partial_n \Phi = \Delta \left[-k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_A m_B \partial_k^A \partial_n^B \ln S_{AB} V_A^k - \frac{1}{8} k^2 \sum_A m_A^2 (\partial_k \partial_n \ln r_A + r_A^{-2} \delta_{kn}) V_A^k \right] - \\ - \frac{4}{3}\pi k^2 \sum_A m_A^2 \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} V_A^n. \tag{4.11}$$

Кроме того, имеем

$$\Phi_n = \frac{1}{2}\Delta\chi_n, \quad \chi_n = k\sum_A m_A V_A^n r_A, \tag{4.12}$$

$$\ddot{\Phi}_n = \frac{1}{2}\Delta\ddot{\chi}_n. \tag{4.13}$$

Подставляя выражения (4.10), (4.11) и (4.13) в уравнение (4.9), получаем

$$\Delta\left[\underset{(5)}{h_{0n}} - 2\ddot{\chi}_n + 4k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \partial_k^A\partial_n^B \ln S_{AB}(4V_B^k - 3V_A^k) + \frac{1}{2}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_n \ln r_A + r_A^{-2}\delta_{kn})V_A^k\right] =$$
$$= -\frac{16}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2\delta(\bar{r}_A)r_A^{-1}V_A^n + 16\pi k\sum_A m_A\delta(\bar{r}_A)\left[2\Phi_n - \Phi V_A^n - \frac{1}{2}V_A^2V_A^n\right]. \tag{4.14}$$

Используя формулу (3.11) и подобные ей для Φ_n, получаем решение уравнения (4.14) в виде

$$\underset{(5)}{h_{0n}} = 2\ddot{\chi}_n + 2k\sum_A m_A r_A^{-1}V_A^2V_A^n - \frac{1}{2}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_n \ln r_A + r_A^{-2}\delta_{kn})V_A^k -$$
$$-4k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B\left[\partial_k^A\partial_n^B \ln S_{AB}(4V_B^k - 3V_A^k) - r_A^{-1}r_{AB}^{-1}(V_A^n - 2V_B^n)\right]. \tag{4.15}$$

Несколько труднее найти $\underset{(6)}{h_{00}}$. Учитывая выражения (3.2), (3.12), (4.8), (4.15), а также (2.2), (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), из уравнения (2.1) получаем

$$\Delta\underset{(6)}{h_{00}} + 12\dot{\Phi}\dot{\Phi} - 16\partial_k\Phi_s\partial_s\Phi_k + 4\Phi\ddot{\Phi} + 16\Phi_k\partial_k\dot{\Phi} - 4\partial_k\Phi\partial_k\ddot{\chi} + 16\partial_k\Phi_s\partial_k\Phi_s +$$
$$+ 8\Phi\partial_k\Phi\partial_k\Phi + (\chi)^{\cdots\cdot} - 12\Phi^2\Delta\Phi + 2\ddot{\chi}\Delta\Phi + 8k\sum_A m_A r_A^{-1}\partial_k\partial_s\Phi V_A^kV_A^s +$$
$$+ 4k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\partial_k\Phi\partial_k r_A^{-1} - \left[k\sum_A m_A(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2)r_A^{-1}\right]^{\cdot\cdot} +$$
$$+ 4k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-5} - 2k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\Phi\Delta r_A^{-1} - 4k\sum_A m_A\left(\overset{A}{\Phi} + \frac{1}{2}V_A^2\right)r_A^{-1}\Delta\Phi -$$
$$- k^3\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A^2 m_B\partial_k\partial_s r_B^{-1}\partial_k\partial_s \ln r_A - 8k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B\partial_k\partial_s\Phi\partial_k^A\partial_s^B \ln S_{AB} =$$
$$= 16\pi k\sum_A m_A\hat{\delta}(\bar{r}_A)\left\{\frac{25}{4}\Phi^2 - \frac{3}{4}\Phi V_A^2 - \frac{5}{4}\ddot{\chi} + 2\Phi_k V_A^k + \frac{7}{16}V_A^4 + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}k\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_B\left(5\overset{B}{\Phi} - \frac{7}{2}V_B^2\right)r_B^{-1} + \frac{1}{2}km_A\left(5\overset{A}{\Phi} - \frac{7}{2}V_A^2\right)r_A^{-1} + \frac{1}{4}k^2\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_B^2 r_B^{-2} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}k^2m_A^2r_A^{-2} + \frac{1}{2}k^2\sum_B\sum_{\substack{C\\C\neq B}} m_B m_C(r_B^{-1}r_C^{-1} - r_B^{-1}r_{BC}^{-1} - r_C^{-1}r_{BC}^{-1})\right\}. \tag{4.16}$$

Используя формулы (4.2)–(4.4), а также (A.9), (A.13), можно преобразовать выражения, стоящие в левой части уравнения (4.16). Действительно, в порядке возрастания номеров слагаемых в левой части уравнения (4.16) для второго члена имеем

$$\dot{\Phi}\dot{\Phi} = \Delta\left\{k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \partial_k^A\partial_s^B \ln S_{AB} V_A^k V_B^s + \frac{1}{8}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^s V_A^k + r_A^{-2}V_A^2)\right\} + \\ + \frac{4}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2 r_A^{-1}\hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2, \quad (4.17)$$

для третьего —

$$\partial_k\Phi_s\partial_s\Phi_k = \Delta\left\{k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \partial_k^B\partial_s^A \ln S_{AB} V_A^k V_B^s + \frac{1}{8}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s + r_A^{-2}V_A^2)\right\} + \\ + \frac{4}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2 \hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2 r_A^{-1}, \quad (4.18)$$

для четвертого —

$$\Phi\ddot{\Phi} = \Delta\left\{k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \left[\partial_k^B\partial_s^B \ln S_{AB} V_B^k V_B^s + \partial_k^B \ln S_{AB} W_B^k\right] + \right. \\ \left. + k^2\sum_A m_A^2\left[\frac{3}{8}\left(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s - \frac{1}{3}r_A^{-2}V_A^2\right) - \frac{1}{2}\partial_k \ln r_A W_A^k\right]\right\} - \frac{4}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2\hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2 r_A^{-1}, \quad (4.19)$$

для пятого —

$$\Phi_k\partial_k\dot{\Phi} = \Delta\left[-k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \partial_k^B\partial_s^B \ln S_{AB} V_A^s V_B^k - \frac{3}{8}k^2\sum_A m_A^2\left(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s - \frac{1}{3}r_A^{-2}V_A^2\right)\right] + \\ + \frac{4}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2\hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2 r_A^{-1}, \quad (4.20)$$

для двенадцатого —

$$k\sum_A m_A r_A^{-1}\partial_k\partial_s\Phi V_A^k V_A^s = \Delta\left\{k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B \partial_k^B\partial_s^B \ln S_{AB} V_A^k V_A^s + \right. \\ \left. + \frac{3}{8}k^2\sum_A m_A^2\left(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s - \frac{1}{3}r_A^{-2}V_A^2\right)\right\} - \frac{4}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2\hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2 r_A^{-1}. \quad (4.21)$$

Шестое, седьмое, восьмое и тринадцатое слагаемые, стоящие слева в формуле (4.16), преобразуем, учитывая выражения (3.5) и (4.12). Согласно формулам (A.1)–(A.6), имеем

$$
\begin{gathered}
\partial_k\Phi\partial_k\ddot{\chi} = \frac{1}{2}\Delta(\Phi\ddot{\chi}) - \frac{1}{2}\ddot{\chi}\Delta\Phi - \frac{1}{2}\Phi\Delta\ddot{\chi} = \frac{1}{2}\Delta(\Phi\ddot{\chi}) - \frac{1}{2}\ddot{\chi}\Delta\Phi - \Phi\ddot{\Phi},\\
\partial_k\Phi_s\partial_k\Phi_s = \frac{1}{2}\Delta\Phi_k^2 - \Phi_k\Delta\Phi_k,\\
\Phi\partial_k\Phi\partial_k\Phi = \frac{1}{6}\Delta\Phi^3 - \frac{1}{2}\Phi\Delta\Phi,\\
k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\partial_k\Phi\partial_k r_A^{-1} = \frac{1}{2}\Delta\left\{k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\Phi r_A^{-1}\right\} - \\
- \frac{1}{2}k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)r_A^{-1}\Delta\Phi - \frac{1}{2}k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\Phi\Delta r_A^{-1}.
\end{gathered}
\tag{4.22}
$$

Из формулы (3.5) для четырнадцатого члена в левой части уравнения (4.16) получаем

$$
\left[k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)r_A^{-1}\right]^{\cdot\cdot} = \frac{1}{2}\Delta\left[k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)r_A\right]^{\cdot\cdot}. \tag{4.23}
$$

С учетом формулы (A.13) девятое и пятнадцатое слагаемые можем записать в виде

$$
\begin{gathered}
(\chi)^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = -\frac{1}{12}\Delta k\sum_A m_A(r_A^3)^{\cdot\cdot\cdot\cdot},\\
k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-5} = \frac{1}{6}\Delta k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-3} + 2\pi k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-2}\hat{\delta}(\bar{x} - \bar{\xi}_A),
\end{gathered}
\tag{4.24}
$$

С целью преобразования выражения (см. [12])

$$
\sum_A\sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_A^2 m_B\partial_k\partial_s r_B^{-1}\partial_k\partial_s\ln r_A
$$

учтем снова тождество (A.14), а также зависимости

$$
\begin{gathered}
\hat{\delta}(\bar{r}_A)\ln r_B = \hat{\delta}(\bar{r}_A)\ln r_{AB}, \quad A\neq B,\\
N_A^k N_B^k = \frac{1}{2}(r_A^{-1}r_B + r_B^{-1}r_A - r_{AB}^2 r_A^{-1}r_B^{-1}).
\end{gathered}
\tag{4.25}
$$

В результате получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_A\sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_A^2 m_B\partial_k\partial_s r_B^{-1}\partial_k\partial_s\ln r_A = -\frac{1}{2}\Delta\left\{\sum_A\sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_A^2 m_B\left[\partial_k^A\partial_k^B(r_B^{-1}\ln r_A - r_B^{-1}\ln r_{AB}) - \right.\right.\\
\left.\left. -\frac{1}{2}r_B^{-1}r_A^{-2} + \frac{1}{2}r_{AB}^{-2}r_B^{-1} + \frac{1}{2}r_B r_A^{-2}r_{AB}^{-2}\right]\right\} + 4\pi\hat{\delta}(\bar{r}_A)r_A^{-1}(r_B r_{AB}^{-2} - r_B^{-1}).
\end{gathered}
\tag{4.26}
$$

Остальные члены в (4.16), кроме девятнадцатого, содержат под интегралом $\hat{\delta}$-функцию. Подставляя (4.17)–(4.24) и (4.26) в (4.16), получаем окончательное уравнение для $\underset{(6)}{h_{00}}$ в виде

$$\Delta\left\{ \underset{(6)}{h_{00}} + 8\Phi_b^2 + \frac{4}{3}\Phi^3 - 2\Phi\ddot{\chi} + \frac{1}{12}k\sum_A m_A (r_A^3)^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{2}{3}k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-3} - \right.$$
$$- 4k^2\sum_A m_A^2 \partial_k \ln r_A W_A^k - \frac{1}{2}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s + r_A^{-2}V_A^2) +$$
$$+ 2k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right)\Phi r_A^{-1} - \frac{1}{2}\left[k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\Phi} - 3V_A^2\right) r_A\right]^{\cdot\cdot} -$$
$$- \frac{1}{2}k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A^2 m_B\left[\partial_k^A\partial_k^B(r_B^{-1}\ln r_A - r_B^{-1}\ln r_{AB}) - \frac{1}{2}r_B^{-1}r_A^{-2} + \frac{1}{2}r_{AB}^{-2}r_B^{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}r_B r_A^{-2} r_{AB}^{-2}\right] - k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B[(16V_A^s V_B^k - 12V_A^k V_B^s)\partial_k^A\partial_s^B \ln S_{AB} +$$
$$\left. +(16V_B^s V_A^k - 8V_B^s V_B^k - 8V_A^s V_A^k)\partial_k^B\partial_s^B \ln S_{AB} - 8\partial_k^B \ln S_{AB} W_B^k]\right\} =$$
$$= 16\pi k\sum_A m_A\hat{\delta}(\bar{r}_A)\left\{\frac{1}{4}\Phi^2 + \frac{9}{4}\Phi V_A^2 - \frac{1}{4}\ddot{\chi} - 2\Phi_n V_A^n + \frac{7}{16}V_A^4 + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}k\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_B(\overset{B}{\Phi} - \frac{3}{2}V_B^2)r_B^{-1} + \frac{1}{4}k^2\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_B^2 r_B^{-2} - 2k^2\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B r_B^{-1} r_{AB}^{-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}k^2\sum_{\substack{B\\B\neq A}}\sum_{\substack{C\\C\neq A\\C\neq B}} m_C m_B(r_B^{-1}r_C^{-1} - r_B^{-1}r_{BC}^{-1} - r_C^{-1}r_{BC}^{-1}) +$$
$$+ \frac{1}{8}k^2\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B r_A^{-1}(r_B r_{AB}^{-2} + 15r_B^{-1} - 16r_{AB}^{-1}) + km_A\left(\overset{A}{\Phi} - \frac{3}{2}V_A^2\right)r_A^{-1} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}k^2 m_A^2 r_A^{-2}\right\} - 16\pi\sum_A m_A\partial_a\hat{\delta}(\bar{r}_A)\dot{\chi}_a + \frac{16}{3}\pi k^2\sum_A m_A^2\hat{\delta}(\bar{r}_A)V_A^2 r_A^{-1} -$$
$$- 8\pi k^3\sum_A m_A^3\hat{\delta}(\bar{r}_A)r_A^{-2} + 8k^2\sum_A\sum_{\substack{B\\B\neq A}} m_A m_B\partial_k\partial_s\Phi\partial_k^A\partial_s^B \ln S_{AB}. \tag{4.27}$$

Для решения уравнения (4.27) необходимо провести регуляризацию следующих интегралов, содержащих сингулярные функции:

$$\int\hat{\delta}(\bar{r}'_A)r_A^{'-1}N_A^{'k}N_A^{'s}|\bar{x}-\bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}'), \quad \int\hat{\delta}(\bar{r}'_A)r_A^{'-1}r_B^{'-1}|\bar{x}-\bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}'),$$
$$\int\hat{\delta}(\bar{r}'_A)r_A^{'-2}|\bar{x}-\bar{x}'|^{-1}(d\bar{x}'). \tag{4.28}$$

Из разложений (3.9) и (3.16), а также из свойства (2.6) $\hat{\delta}$-функции, следует, что интегралы (4.28) равны нулю.

Таким образом, решение уравнения (4.27) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\underset{(6)}{h_{00}} &= 2\Phi\ddot{\chi} - 8\Phi_k^2 - \frac{4}{3}\Phi^3 - \frac{1}{12}k\sum_A m_A (r_A^3)^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{2}{3}k^3\sum_A m_A^3 r_A^{-3} - \\
&- \frac{7}{4}k\sum_A m_A V_A^4 r_A^{-1} - 2k\sum_A m_A \left(2\overset{A}{\overline{\Phi}} - 3V_A^2\right)\Phi r_A^{-1} + 4k^2\sum_A m_A^2 \partial_k \ln r_A W_A^k + \\
&+ \frac{1}{2}k^2\sum_A m_A^2(\partial_k\partial_s \ln r_A V_A^k V_A^s + r_A^{-2}V_A^2) + 8k\sum_A m_A \overset{A}{\overline{\Phi_k}} V_A^k r_A^{-1} - \\
&- k\sum_A m_A \overset{A}{\overline{\Phi}}\left(\overset{A}{\overline{\Phi}} + 9V_A^2\right) r_A^{-1} + \frac{1}{2}\left[k\sum_A m_A\left(2\overset{A}{\overline{\Phi}} - 3V_A^2\right) r_A\right]^{\cdot\cdot} + k\sum_A m_A \overset{A}{\overline{\ddot{\chi}}} r_A^{-1} - \\
&- 2k^2\sum_A \sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A m_B \left(\overset{B}{\overline{\Phi}} - \frac{3}{2}V_B^2\right) r_{AB}^{-1} r_A^{-1} + 4k^3\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A^2 m_B r_{AB}^{-2} r_A^{-1} - \\
&- 2k^3\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A m_B^2 r_{AB}^{-2} r_A^{-1} + k^2\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A m_B[(16V_A^s V_B^k - \\
&- 12V_A^k V_B^s)\partial_k^A \partial_s^B \ln S_{AB} + (16V_B^s V_A^k - 8V_B^s V_B^k - 8V_A^s V_A^k)\partial_k^B \partial_s^B \ln S_{AB} - \\
&- 8\partial_k^B \ln S_{AB} W_B^k] + \frac{1}{2}k^3\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A^2 m_B \Big[\partial_k^A \partial_k^B (r_B^{-1}\ln r_A - r_B^{-1}\ln r_{AB}) - \\
&- \frac{1}{2}r_B^{-1}r_A^{-2} + \frac{3}{2}r_{AB}^{-2}r_B^{-1} + \frac{1}{2}r_B r_A^{-2} r_{AB}^{-2}\Big] + 4k^3\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}}\sum_{\substack{C \\ C\neq A \\ C\neq B}} m_A m_B m_C r_{AB}^{-1} r_{BC}^{-1} r_A^{-1} - \\
&- 2k^3\sum_A\sum_{\substack{B \\ B\neq A}}\sum_{\substack{C \\ C\neq A}} m_A m_B m_C r_{AB}^{-1} r_{AC}^{-1} r_A^{-1} + H,
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

где H является решением уравнения

$$
\Delta H = 8k^2 \sum_A \sum_{\substack{B \\ B\neq A}} m_A m_B \partial_k \partial_s \Phi \partial_k^A \partial_s^B \ln S_{AB}. \tag{4.30}
$$

Дальнейшие расчеты проведем для системы двух тел ($N = 2$). Для этого случая функция H имеет вид [12]

$$
\begin{aligned}
H = k^3 m_1^2 m_2 \{4\Delta_1 \partial_k^1 \partial_k^2 [(r_1 + r_{12})\ln S_{12}] + 8\partial_k^1 \ln S_{12} \partial_k^1 r_{12}^{-1} - 4r_2 r_1^{-2} r_{12}^{-2} + 4r_{12}^{-2} r_1^{-1} - \\
- 2r_{12}^{-1} r_1^{-2} + 4r_2^2 r_1^{-3} r_{12}^{-2} + 6r_2^2 r_1^{-2} r_{12}^{-3} - 4r_1^{-3} - 6r_{12}^{-3}\} + (1 \leftrightarrow 2).
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Приведенное выше выражение для двух тел получено при учете тождества (A.14), формул (4.2), (4.3), а также $\hat{\delta}(\bar{r}_1) r_2 = \hat{\delta}(\bar{r}_1) r_{12}$ и зависимостей

$$
\Delta_1 \ln S_{12} = r_1^{-1} r_{12}^{-1},
$$

$$
S_{12}^{-1}(1 + N_1^k N_{12}^k) = \frac{1}{2}(r_2^{-1} + r_1^{-1} - r_{12} r_A^{-1} r_2^{-1}),
$$

$$
\partial_k^1 \partial_k^2 \ln S_{12} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} r_2^{-1} - r_1^{-1} r_{12}^{-1} - r_2^{-1} r_{12}^{-1}).
$$

Окончательно для двух тел наши решения (3.2), (3.12), (4.8), (4.15) и (4.30) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\underset{(2)}{h_{00}} &= -2km_1 r_1^{-1} - 2km_2 r_2^{-1}, \\
\underset{(2)}{h_{mn}} &= -2km_1 r_1^{-1}\delta_{mn} - 2km_2 r_2^{-1}\delta_{mn}, \\
\underset{(3)}{h_{0n}} &= 4km_1 r_1^{-1} V_1^n + 4km_2 r_2^{-1} V_2^n,
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

$$\underset{(4)}{h_{00}} = km_1r_1^{-1}[(N_1V_1)^2 - 4V_1^2] + 2k^2m_1^2r_1^{-2} + k^2m_1m_2\left[2r_1^{-1}r_2^{-1} + \frac{1}{2}r_1r_{12}^{-3} + \frac{5}{2}r_2^{-1}r_{12}^{-1} - \frac{1}{2}r_1^2r_2^{-1}r_{12}^{-3}\right] + (1\leftrightarrow 2), \quad (4.33)$$

$$\underset{(4)}{h_{mn}} = km_1r_1^{-1}(N_1V_1)^2\delta_{mn} - 4km_1r_1^{-1}V_1^mV_1^n - k^2m_1^2r_1^{-2}[\delta_{mn} + N_1^mN_1^n] + k^2m_1m_2\left[\left(\frac{1}{2}r_1r_{12}^{-3} + \frac{5}{2}r_1^{-1}r_{12}^{-1} - 2r_1^{-1}r_2^{-1} - \frac{1}{2}r_1^2r_2^{-1}r_{12}^{-3} - 4r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}\right)\delta_{mn} + 4N_{12}^mN_{12}^n(S_{12}^{-2} + r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}) - 4S_{12}^{-2}(N_1^mN_2^n + N_1^nN_2^m + 2N_1^mN_{12}^n + 2N_1^nN_{12}^m)\right] + (1\leftrightarrow 2), \quad (4.34)$$

$$\underset{(5)}{h_{0n}} = 4km_1r_1^{-1}V_1^nV_1^2 + k^2m_1^2r_1^{-2}[(N_1V_1)N_1^n - V_1^n] + k^2m_1m_2\{N_1^nS_{12}^{-2}[16(N_{12}V_1) + 16(N_2V_1) - 12(N_{12}V_2) - 12(N_2V_2)] + N_{12}^n[16S_{12}^{-2}(N_1V_2) - 12S_{12}^{-2}(N_1V_1) - 4S_{12}^{-2}(N_{12}V_1) - 4S_{12}^{-1}r_{12}^{-1}(N_{12}V_1)] + V_1^n[r_2^2r_1^{-1}r_{12}^{-3} + 3r_1^{-1}r_{12}^{-1} - 8r_2^{-1}r_{12}^{-1} + 4r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}]\} - k^2m_1m_2[6(N_{12}V_1)^2N_{12}^n + 4r_{12}^{-2}N_{12}^n] + k^2m_1m_2V_1^n(2r_2r_{12}^{-3} - 3r_1^{-1}r_{12}^{-3}] + (1\leftrightarrow 2), \quad (4.35)$$

$$\underset{(6)}{h_{00}} = km_1r^{-1}\left[3(N_1V_1)^2V_1^2 - 4V_1^4 - \frac{3}{4}(N_1V_1)^4\right] + k^2m_1^2r_1^{-2}[V_1^2 - 3(N_1V_1)^2] + k^2m_1m_2\left\{V_1^2\left[\frac{3}{8}r_1^2r_2r_{12}^{-5} - \frac{3}{8}r_1^3r_{12}^{-5} + \frac{3}{8}r_1r_2^2r_{12}^{-5} - \frac{3}{8}r_2^3r_{12}^{-5} + \frac{37}{8}r_1r_{12}^{-3} - r_1^2r_2^{-1}r_{12}^{-3} - \frac{3}{8}r_2r_{12}^{-3} - 2r_2^2r_1^{-1}r_{12}^{-3} - 6r_1^{-1}r_{12}^{-1} + 5r_2^{-1}r_{12}^{-1} + 8r_{12}r_1^{-1}r_2^{-1}S_{12}^{-1} - 16r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}\right] + (V_1V_2)\left[\frac{3}{4}r_1^3r_{12}^{-5} - 8r_1^{-1}r_2^{-1} - \frac{3}{4}r_1^2r_2r_{12}^{-5} - \frac{13}{4}r_1r_{12}^{-3} + 2r_1^2r_2^{-1}r_{12}^{-3} + 6r_1^{-1}r_{12}^{-1} + 16r_1^{-1}S_{12}^{-1} + 12r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}\right] + (N_{12}V_1)^2\left[\frac{15}{8}r_1^3r_{12}^{-5} - \frac{15}{8}r_1^2r_2r_{12}^{-5} - \frac{15}{8}r_1r_2^2r_{12}^{-5} + \frac{15}{8}r_2^3r_{12}^{-5} - \frac{57}{8}r_1r_{12}^{-3} + \frac{3}{4}r_1^2r_2^{-1}r_{12}^{-3} + \frac{33}{8}r_2r_{12}^{-3} - \frac{7}{4}r_2^{-1}r_{12}^{-1} + 16S_{12}^{-2} + 16r_{12}^{-1}S_{12}^{-1}\right] + (N_{12}V_1)(N_{12}V_2)\left[\frac{15}{4}r_1^2r_2r_{12}^{-5} - \frac{15}{4}r_1^3r_{12}^{-5} + \frac{9}{4}r_1r_{12}^{-3} - 12S_{12}^{-2} - 12r_{12}S_{12}^{-1}\right] + (N_1V_1)^2\left[\frac{3}{4}r_2^2r_1^{-1}r_{12}^{-3} - 2r_2^{-1}r_1^{-1} + \frac{1}{4}r_1r_{12}^{-3} - \frac{7}{4}r_1^{-1}r_{12}^{-1} + 8S_{12}^{-2} + 8r_1^{-1}S_{12}^{-1}\right] - (N_1V_1)(N_1V_2)[r_1r_{12}^{-3} + 16S_{12}^{-2} + 16r_1^{-1}S_{12}^{-1}] + (N_1V_2)^2[8S_{12}^{-2} + 8r_1^{-1}S_{12}^{-1}] + (N_{12}V_1)(N_1V_1)\left[3r_1^2r_{12}^{-4} - \frac{3}{2}r_2^2r_{12}^{-4} - \frac{3}{2}r_{12}^{-2} - 16S_{12}^{-2}\right] + (N_{12}V_2)(N_1V_1)\left[-3r_1^2r_{12}^{-4} + \frac{3}{2}r_2^2r_{12}^{-4} - \frac{13}{2}r_{12}^{-2} + 40S_{12}^{-2}\right] + (N_{12}V_1)(N_1V_2)\left[-\frac{3}{2}r_1^2r_{12}^{-4} - 4r_{12}^{-2} - 16S_{12}^{-2}\right] + (N_{12}V_2)(N_1V_2)\left[\frac{3}{2}r_1^2r_{12}^{-4} + 3r_{12}^{-2} - 16S_{12}^{-2}\right] - 16S_{12}^{-2}(N_1V_2)(N_2V_1) + 12S_{12}^{-2}(N_1V_1)(N_2V_2) - 2k^3m_1^3r_1^{-3} + k^3m_1^2m_2\left[\frac{1}{4}r_1^3r_{12}^{-6} - 4r_1^{-3} - \frac{1}{2}r_2^{-3} - \frac{9}{2}r_1^{-2}r_2^{-1} - \frac{3}{16}r_1^4r_2^{-1}r_{12}^{-6} + \frac{1}{8}r_1^2r_2r_{12}^{-6} - \right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{4}r_2^2 r_1 r_{12}^{-6} + \frac{1}{16}r_2^3 r_{12}^{-6} - \frac{5}{4}r_1 r_{12}^{-4} + \frac{23}{8}r_1^2 r_2^{-1} r_{12}^{-4} - \frac{43}{8}r_2 r_{12}^{-4} + \frac{5}{2}r_2^2 r_1^{-1} r_{12}^{-4} + \\
&+ 3r_{12}^{-3} - 3r_1 r_2^{-1} r_{12}^{-3} - r_2 r_1^{-1} r_{12}^{-3} + 5r_2^2 r_1^{-2} r_{12}^{-3} - 4r_2^3 r_1^{-3} r_{12}^{-3} + \frac{3}{2}r_1^{-1} r_{12}^{-2} + \\
&+ \frac{1}{4}r_1^2 r_2^{-3} r_{12}^{-2} - \frac{3}{16}r_2^{-1} r_{12}^{-2} - \frac{15}{4}r_2 r_1^{-2} r_{12}^{-2} + 4r_2^2 r_1^{-3} r_{12}^{-2} - 5r_1^{-2} r_{12}^{-1} - \\
&\left. -5r_1^{-1} r_2^{-1} r_{12}^{-1} + 4r_2 r_1^{-3} r_{12}^{-1} + \frac{1}{4}r_1^{-2} r_2^{-3} r_{12}^2 \right]\Bigg\} + (1 \leftrightarrow 2),
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

где

$$
(N_A V_A) \equiv N_A^k V_A^k, \quad (N_A V_B) \equiv N_A^k V_B^k, \quad (N_{AB} V_B) \equiv N_{AB}^k V_B^k, \quad (V_A V_B) \equiv V_A^k V_B^k.
$$

Полученные нами решения (4.32)–(4.36) совпадают с решениями, приведенными в [12].

5. ПОСТ-ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения в пост-постньютоновском приближении можно записать в виде

$$
\frac{d^2\xi_1^n}{dt^2} = \underset{(0)}{F_1^n} + c^{-2} \underset{(2)}{F_1^n} + c^{-4}\left[\underset{(4)}{F_1^{'n}} + \underset{(4)}{F_1^{''n}} + \underset{(4)}{F_1^{'''n}} \right],
\tag{5.1}
$$

где равенства

$$
\underset{(4)}{F_1^{'n}} = -\frac{1}{2}km_2 \overline{\partial_n\partial_k r_2 \underset{(2)}{W_2^k}}^{\,1}, \qquad \underset{(4)}{F_1^{''n}} = 4km_2 \overline{r_2^{-1} \underset{(2)}{W_2^n}}^{\,1}
\tag{5.2}
$$

следуют соответственно из выражений для $\overline{\partial_n \underset{(4)}{h_{00}}}^{\,1}$ и $\overline{\underset{(3)}{\dot h_{0n}}}^{\,1}$, входящих в $\underset{(2)}{F_1^n}$.

Для $\underset{(4)}{F_1^{'''n}}$ из уравнений (2.5) и (2.7) получаем

$$
\begin{aligned}
\underset{(4)}{F_1^{'''n}} = &-\frac{1}{2}\overline{\partial_n \underset{(6)}{h_{00}}}^{\,1} - \frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\partial_k \underset{(4)}{h_{00}}}^{\,1} + \overline{\underset{(5)}{\dot h_{0n}}}^{\,1} + \frac{1}{2}\overline{\underset{(4)}{\dot h_{00}}}^{\,1} V_1^n + \overline{\underset{(4)}{\dot h_{nk}}}^{\,1} V_1^k - \\
&- \overline{\partial_n \underset{(5)}{h_{0k}}}^{\,1} V_1^k + \overline{\partial_k \underset{(5)}{h_{0n}}}^{\,1} V_1^k + \overline{\partial_k \underset{(4)}{h_{00}}}^{\,1} V_1^k V_1^n - \frac{1}{2}\overline{\partial_n \underset{(4)}{h_{ks}}}^{\,1} V_1^k V_1^s + \\
&+ \overline{\partial_k \underset{(4)}{h_{ns}}}^{\,1} V_1^k V_1^s - \frac{1}{2}\overline{\underset{(3)}{h_{0n}}\,\underset{(2)}{\dot h_{00}}}^{\,A} + \overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\underset{(3)}{\dot h_{0k}}}^{\,1} + \overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\underset{(2)}{\dot h_{ks}}}^{\,1} V_1^s - \\
&- \frac{1}{2}\overline{\underset{(4)}{h_{nk}}\,\partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1} - \frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{00}}\,\underset{(2)}{\dot h_{00}}}^{\,1} V_1^n - \frac{1}{2}\overline{\underset{(3)}{h_{0k}}\,\partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1} V_1^n - \\
&- \overline{\underset{(2)}{h_{00}}\,\partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1} V_1^k V_1^n - \overline{\underset{(3)}{h_{0n}}\,\partial_k \underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1} V_1^k + \overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\partial_s \underset{(3)}{h_{0k}}}^{\,1} V_1^s - \\
&- \overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\partial_k \underset{(3)}{h_{0s}}}^{\,1} V_1^s + \overline{\underset{(2)}{h_{na}}\,\partial_k \underset{(2)}{h_{as}}}^{\,1} V_1^k V_1^s + \overline{\partial_k \underset{(3)}{h_{0s}}}^{\,1} V_1^s V_1^k V_1^n - \\
&- \frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{\dot h_{ks}}}^{\,1} V_1^k V_1^s V_1^n - \frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\underset{(2)}{h_{ks}}\,\partial_s \underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1} - \frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{na}}\,\partial_a \underset{(2)}{h_{ks}}}^{\,1} V_1^k V_1^s.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Используя формулу (3.18) и регуляризуя расходящиеся интегралы (см. Приложение В), получаем

$$
\begin{aligned}
\underset{(4)}{F}{}_1^{\prime n} &= -\frac{1}{2}k^2m_1m_2[3N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 + 4N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 7N_{12}^n(N_{12}V_1)(N_{12}V_2) + \\
&\quad + 4V_1^n(N_{12}V_2) - 4V_2^n(N_{12}V_2) - 3V_1^n(N_{12}V_1) + 3V_2^n(N_{12}V_1)], \\
\underset{(4)}{F}{}_1^{\prime\prime n} &= -16k^3m_1^2m_2r_{12}^{-4}N_{12}^n - 20k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n - k^2m_1m_2r_{12}^{-3}[-8N_{12}^nV_1^2 - \\
&\quad - 4N_{12}^nV_2^2 + 16N_{12}^n(V_1V_2) + 6N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 + 16V_2^n(N_{12}V_2) - \\
&\quad - 16V_1^n(N_{12}V_2) - 12V_2^n(N_{12}V_1) + 12V_1^n(N_{12}V_1)].
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Для расчета $\underset{(4)}{F}{}_1^{\prime\prime\prime n}$ используем решения (4.33)–(4.37), а также формулу (5.3). После регуляризации (см. Приложение В) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\partial_n \underset{(6)}{h_{00}}}} &= 3k^3m_2^3r_{12}^{-4}N_{12}^n - \frac{7}{4}k^3m_1^2m_2r_{12}^{-4}N_{12}^n + \frac{23}{2}k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n + k^2m_2^2r_{12}^{-3}[-N_{12}^nV_2^2 + \\
&\quad + 6N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 3V_2^n(N_{12}V_2)] + k^2m_1m_2r_{12}^{-3}\left[\frac{3}{4}N_{12}^nV_1^2 + \frac{35}{4}N_{12}^nV_2^2 - \frac{5}{2}N_{12}^n(V_1V_2) - \right.\\
&\quad - \frac{23}{2}N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 - \frac{37}{2}N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 + 25N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) + \\
&\quad \left. + \frac{31}{4}V_2^n(N_{12}V_2) - \frac{39}{4}V_1^n(N_{12}V_2) - \frac{3}{4}V_2^n(N_{12}V_1) + \frac{31}{4}V_1^n(N_{12}V_1)\right] + \\
&\quad + km_2r_{12}^{-2}\left[-\frac{9}{2}N_{12}^n(N_{12}V_2)^2V_2^2 + 3V_2^n(N_{12}V_2)V_2^2 + 2N_{12}^nV_A^4 + \frac{15}{8}N_{12}^n(N_{12}V_2)^4 - \frac{3}{2}V_2^n(N_{12}V_2)^3\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\partial_k\,\underset{(4)}{h_{00}}}} &= 4k^3m_2^3r_{12}^{-4}N_{12}^n + 2k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n + k^2m_2^2r_{12}^{-3}[3N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 2V_2^n(N_{12}V_2) - 4N_{12}^nV_2^2], \\
\frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\underset{(4)}{h_{nk}}\,\partial_k\,\underset{(2)}{h_{00}}}} &= -2k^3m_2^3r_{12}^{-4}N_{12}^n + 7k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n + k^2m_2^2r_{12}^{-3}[N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 4V_2^n(N_{12}V_2)], \\
\frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\underset{(2)}{h_{nm}}\,\underset{(2)}{h_{mb}}\,\partial_b\,\underset{(2)}{h_{00}}}} &= 4k^3m_2^3r_{12}^{-4}N_{12}^n, \\
\overset{1}{\overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\,\underset{(3)}{\dot h_{0k}}}} &= 8k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n - 8k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_2^n(N_{12}V_2), \\
\frac{1}{2}\overset{1}{\overline{\underset{(3)}{h_{0n}}\,\underset{(2)}{\dot h_{00}}}} &= -4k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_2^n(N_{12}V_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\overset{1}{\overline{\underset{(5)}{\dot h_{0n}}}} &= -14k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n + k^2m_2^2r_{12}^{-3}[N_{12}^nV_2^2 - 4N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 + 3V_2^n(N_{12}V_2)] + \\
&\quad + k^2m_2m_1r_{12}^{-3}[-6N_{12}^nV_2^2 + 10N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 10V_2^n(N_{12}V_2) - 17N_{12}^n(V_2V_1) - \\
&\quad - 42N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 + 12N_{12}^nV_1^2 + 46N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) + 12V_1^n(N_{12}V_2) - \\
&\quad - 21V_2^n(N_{12}V_1) + 6V_1^n(N_{12}V_1)] + km_2r_{12}^{-2}[-8V_2^n(N_{12}V_2)V_1^2 + 6V_2^n(N_{12}V_2)^3],
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\overline{\underset{(4)}{\dot{h}_{00}}}^{\,1}\;V_1^n = k^2m_1m_2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_1) - 2k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_2) + km_2r_{12}^{-2}\left[3V_1^nV_2^2(N_{12}V_2)^2 + \frac{3}{2}V_1^n(N_{12}V_2)\right],$$

$$\frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{00}}\;\underset{(2)}{\dot{h}_{00}}}^{\,1}\;V_1^n = 2k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_2), \qquad \frac{1}{2}\overline{\underset{(3)}{h_{0k}}\;\partial_k\;\underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1}\;V_1^n = 4k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_2),$$

$$\overline{\underset{(3)}{h_{0n}}\;\partial_k\;\underset{(2)}{h_{00}}}^{\,A}\;V_1^k = 8k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_2^n(N_{12}V_1), \qquad -\overline{\underset{(2)}{h_{nb}}\;\partial_k\;\underset{(3)}{h_{0b}}}^{\,1}\;V_1^k = -8k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_2^n(N_{12}V_1),$$

$$\overline{\underset{(2)}{h_{nb}}\;\partial_b\;\underset{(3)}{h_{0k}}}^{\,1}\;V_1^k = 8k^2m_2^2r_{12}^{-3}N_{12}^n(V_1V_2), \qquad -\overline{\underset{(2)}{h_{nk}}\;\underset{(2)}{\dot{h}_{kb}}}^{\,1}\;V_1^b = -4k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_2),$$

$$\begin{aligned} -\overline{\underset{(4)}{\dot{h}_{nk}}}^{\,1}\;V_1^k &= k^2m_2^2r_{12}^{-3}[-V_2^n(N_{12}V_1) - N_{12}^n(V_1V_2) + 4N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) + 2V_1^n(N_{12}V_2)] + \\ &+ k^2m_1m_2r_{12}^{-3}[-5N_{12}^nV_1^2 + 12N_{12}^n(V_1V_2) + 24N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 - 32N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) - \\ &-7V_1^n(N_{12}V_1)+12V_2^n(N_{12}V_1)]+km_2r_{12}^{-2}[-3V_1^n(N_{12}V_2)^3+2V_1^n(N_{12}V_2)V_2^2+4V_2^n(N_{12}V_2)(V_1V_2)], \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \overline{\partial_n\;\underset{(5)}{h_{0k}}}^{\,1}\;V_1^k - \overline{\partial_k\;\underset{(5)}{h_{0n}}}^{\,1}\;V_1^k &= k^2m_2^2r_{12}^{-3}[-V_2^n(N_{12}V_1) + N_{12}^n(V_1V_2)] + k^2m_1m_2r_{12}^{-3}[7N_{12}^nV_1^2 - \\ &- 6N_{12}^n(V_2V_1) - 7V_1^n(N_{12}V_1) + 6V_2^n(N_{12}V_1)] + km_2r_{12}^{-2}[4V_2^n(N_{12}V_1)V_2^2 - \\ &- 4N_{12}^nV_2^2(V_1V_2) - 6N_{12}^n(N_{12}V_2)(V_1V_2) - 6V_2^n(N_{12}V_1)(N_{12}V_2) - 2N_{12}^nV_2^2(V_1V_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\overline{\partial_k\;\underset{(4)}{h_{00}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^n &= km_2r_{12}^{-2}[-4V_1^n(N_{12}V_1)V_2^2 - 2V_1^n(N_{12}V_2)(V_1V_2) + \\ &+ 3V_1^n(N_{12}V_1)(N_{12}V_2)^2] + 4k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_1) + 2k^2m_2m_1r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_1), \end{aligned}$$

$$\overline{\underset{(2)}{h_{00}}\;\partial_k\;\underset{(2)}{h_{00}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^n = -4k^2m_2m_1r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_1),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overline{\partial_n\;\underset{(4)}{h_{mk}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^m &= k^2m_2^2r_{12}^{-3}[-V_1^n(N_{12}V_1) + N_{12}^nV_1^2 + 2N_{12}^n(N_{12}V_1)^2] + k^2m_1m_2r_{12}^{-3}[-4N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 + \\ &+ 3V_1^n(N_{12}V_1)] + km_2r_{12}^{-2}\left[V_2^n(N_{12}V_2)V_1^2 - \frac{3}{2}N_{12}^n(N_{12}V_2)^2V_1^2 + 2N_{12}^n(V_1V_2)^2\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\overline{\partial_b\;\underset{(4)}{h_{nk}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^b &= k^2m_2^2r_{12}^{-3}[-V_1^n(N_{12}V_1) + N_{12}^nV_1^2 - 4N_{12}^n(N_{12}V_1)^2] + k^2m_1m_2r_{12}^{-3}[8N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 - \\ &- 3V_1^n(N_{12}V_1) - 3N_{12}^nV_1^2] + km_2r_{12}^{-2}[3V_1^n(N_{12}V_2)^2(N_{12}V_1) - \\ &- 4V_2^n(N_{12}V_1)(V_1V_2) - 2V_1^n(V_1V_2)(N_{12}V_2)], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{h_{ns}}\;\partial_s\;\underset{(2)}{h_{kb}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^b = -2k^2m_2^2r_{12}^{-3}N_{12}^nV_1^2, \qquad -\overline{\underset{(2)}{h_{ns}}\;\partial_m\;\underset{(2)}{h_{ks}}}^{\,1}\;V_1^kV_1^m = 4k^2m_2^2r_{12}^{-3}V_1^n(N_{12}V_1),$$

$$-\overline{\partial_s\;\underset{(3)}{h_{0b}}}^{\,1}\;V_1^bV_1^sV_1^n = 4km_2r_{12}^{-2}(V_1V_2)V_1^n(N_{12}V_1), \qquad -\frac{1}{2}\overline{\underset{(2)}{\dot{h}_{mk}}}^{\,1}\;V_1^mV_1^nV_1^k = -km_2r_{12}^{-2}V_1^2V_1^n(N_{12}V_2),$$

При этом нами введены следующие обозначения:

$$(N_{12}V_2) \equiv N_{12}^k V_2^k, \quad (V_1V_2) \equiv V_1^k V_2^k.$$

Из выражений (3.18), (5.1) и (5.4), (5.5) получаем пост-постньютоновские уравнения движения для двух точечных частиц:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_1^n}{dt^2} = & -km_2r_{12}^{-2}N_{12}^n + c^{-2}\left\{km_2r_{12}^{-2}\left[\frac{3}{2}N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 2N_{12}^nV_2^2 + 4N_{12}^n(V_1V_2)-\right.\right.\\
& \left.-N_{12}^nV_1^2 + 3V_2^n(N_{12}V_2) - 4V_2^n(N_{12}V_1) + 4V_1^n(N_{12}V_1) - 3V_1^n(N_{12}V_2)\right] +\\
& \left.+k^2m_2(5m_1+4m_2)r_{12}^{-3}N_{12}^n\right\} + c^{-4}\left\{km_2r_{12}^{-2}\left[4N_{12}^nV_2^2(V_1^kV_2^k) - 2N_{12}^nV_2^4-\right.\right.\\
& -2N_{12}^n(V_1^kV_2^k)^2 + \frac{3}{2}N_{12}^nV_1^2(N_{12}V_2)^2 + \frac{9}{2}N_{12}^nV_2^2(N_{12}V_2)^2 - 6N_{12}^n(V_1^kV_2^k)(N_{12}V_2)^2 -\\
& -\frac{15}{8}N_{12}^n(N_{12}V_2)^4 + -5V_1^nV_2^2(N_{12}V_2) - 3V_2^nV_1^2(N_{12}V_2) + V_1^nV_1^2(N_{12}V_2) +\\
& +4V_1^nV_2^2(N_{12}V_1) - 4V_2^nV_2^2(N_{12}V_1) + 5V_2^nV_2^2(N_{12}V_2) - 4V_1^n(V_1^kV_2^k)(N_{12}V_1) +\\
& +4V_2^n(V_1^kV_2^k)(N_{12}V_1) + 4V_1^n(V_1^kV_2^k)(N_{12}V_2) - 4V_1^n(V_1^kV_2^k)(N_{12}V_2) +\\
& \left.+6V_2^n(N_{12}V_1)(N_{12}V_2)^2 - 6V_1^n(N_{12}V_1)(N_{12}V_2)^2 + \frac{9}{2}V_1^n(N_{12}V_2)^3 - \frac{9}{2}V_2^n(N_{12}V_2)^3\right] +\\
& +k^2m_1m_2r_{12}^{-3}\left[-\frac{15}{4}N_{12}^nV_1^2 + \frac{5}{4}N_{12}^nV_2^2 - \frac{5}{2}N_{12}^nV_2^kV_1^k + \frac{39}{2}N_{12}^n(N_{12}V_1)^2+\right.\\
& +\frac{17}{2}N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 - 39N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) - \frac{55}{4}V_2^n(N_{12}V_2) +\\
& \left.+\frac{55}{4}V_1^n(N_{12}V_2) + \frac{63}{4}V_2^n(N_{12}V_1) - \frac{63}{4}V_1^n(N_{12}V_1)\right] +\\
& +k^2m_2^2r_{12}^{-3}[4N_{12}^nV_2^2 - 8N_{12}^n(V_1V_2) - 6N_{12}^n(N_{12}V_2)^2 + 2N_{12}^n(N_{12}V_1)^2 -\\
& -4N_{12}^n(N_{12}V_2)(N_{12}V_1) + 2V_2^n(N_{12}V_2) - 2V_1^n(N_{12}V_2) + 2V_2^n(N_{12}V_1) -\\
& \left.-2V_1^n(N_{12}V_1)] - 9k^3m_2^3r_{12}^{-4}N_{12}^n - \frac{57}{4}k^3m_1^2m_2r_{12}^{-4}N_{12}^n - \frac{69}{2}k^3m_2^2m_1r_{12}^{-4}N_{12}^n\right\}. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Уравнения движения для второй частицы получаем, заменяя нижние индексы «1» на «2».

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения движения (5.6), полученные нами методом EIH, совпадают с уравнениями, полученными Копейкиным [10] методом Фока. Тем самым мы доказали, что оба метода, метод EIH и метод Фока, которые можно уже считать классическими, дают в гармонических координатах одинаковые не только постньютоновские, но также и пост-постньютоновские уравнения движения точечных частиц.

Необходимо заметить, что в методе Фока определение точечных частиц физически очень наглядно. В методе EIH эта наглядность теряется, зато упрощаются математические выкладки. В работе мы приводим почти все вычисления, кроме самых простых.

Если в разложениях метрического тензора (2.9) вместо стоячих волн взять запаздывающие волны, то пост-постньютоновские уравнения движения точечных частиц не изменятся, различие появится только в дальнейших приближениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Производные произведений сингулярных функций

Применим тождества (2.10), (2.11) к сингулярным функциям r_A^{-L}, r_B^{-M}, $L = 1,2,3,\ldots$, $M = 1,2,3\ldots$

Подставляя в (2.10) $f = r_A^{-1}$ и последовательно $g = r_A^{-1}, r_A^{-2}, \ldots$, получаем

$$\partial_a r_A^{-L} \equiv L r_A^{-L+1} \partial_a r_A^{-1}. \tag{A.1}$$

Подставляя r_A^{-1}, r_B^{-M} в (2.10) и используя (A.1), имеем

$$\partial_a (r_A^{-L} r_B^{-M}) \equiv L r_B^{-M} r_A^{-L+1} \partial_a r_A^{-1} + M r_A^{-L} r_B^{-M+1} \partial_a r_B^{-1}. \tag{A.2}$$

Подобная подстановка функций $f = r_A^{-L}$, $g = r_A^{-1}, r_A^{-2}, \ldots$ в (A.1) дает

$$\partial_a \partial_b r_A^{-L} \equiv L(L-1) r_A^{-L+2} \partial_a r_A^{-1} \partial_b r_A^{-1} + L r_A^{-L+1} \partial_a \partial_b r_A^{-1}. \tag{A.3}$$

Из (2.11) и (A.3) получаем для r_A^{-L}, r_B^{-M}

$$\begin{aligned}\partial_a \partial_b (r_A^{-L} r_B^{-M}) \equiv{}& L r_B^{-M} r_A^{-L+1} \partial_a \partial_b r_A^{-1} + M r_A^{-L} r_B^{-M+1} \partial_a \partial_b r_B^{-1} + L(L-1) r_B^{-M} r_A^{-L+2} \partial_a r_A^{-1} \partial_b r_A^{-1} + \\ &+ M(M-1) r_A^{-L} r_B^{-M+2} \partial_a r_B^{-1} \partial_b r_B^{-1} + LM r_A^{-L+1} r_B^{-M+1} [\partial_a r_A^{-1} \partial_b r_B^{-1} + \partial_a r_B^{-1} \partial_b r_A^{-1}].\end{aligned} \tag{A.4}$$

В частности, формулы (A.3) и (A.4) дают

$$\Delta r_A^{-L} \equiv L(L-1) r_A^{-L+2} \partial_a r_A^{-1} \partial_a r_A^{-1} + L r_A^{-L+1} \Delta r_A^{-1}, \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}\Delta (r_A^{-L} r_B^{-M}) \equiv{}& L r_B^{-M} r_A^{-L+1} \Delta r_A^{-1} + M r_A^{-L} r_B^{-M+1} \Delta r_B^{-1} + L(L-1) r_B^{-M} r_A^{-L+2} \partial_a r_A^{-1} \partial_a r_A^{-1} + \\ &+ M(M-1) r_A^{-L} r_B^{-M+2} \partial_a r_B^{-1} \partial_a r_B^{-1} + 2LM r_A^{-L+1} r_B^{-M+1} \partial_a r_A^{-1} \partial_a r_B^{-1}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

Подставляя в (A.1)–(A.6) формулы

$$\partial_a r_A^{-1} = -r_A^{-2} N_A^a, \tag{A.7}$$

$$\partial_a \partial_b r_A^{-1} = r_A^{-3} [3 N_A^a N_A^b - \delta_{ab}] - \frac{4}{3} \pi \delta(\bar{r}_A) \delta_{ab} \tag{A.8}$$

(которые, как и в работах [10, 16], заимствованы из теории обобщенных функций [20]), получаем формулы, определяющие производные произведений функций r_A^{-L}, r_B^{-M} через произведения производных этих функций:

$$\partial_a r_A^{-L} = -L r_A^{-L-1} N_A^a, \tag{A.9}$$

$$\partial_a (r_A^{-L} r_B^{-M}) = -L r_B^{-M} r_A^{-L-1} N_A^a - M r_A^{-L} r_B^{-M-1} N_B^a, \tag{A.10}$$

$$\partial_a \partial_b r_A^{-L} = L r_A^{-L-2} [(L+2) N_A^a N_A^b - \delta_{ab}] - \frac{4}{3} \pi L r_A^{-L+1} \delta(\bar{r}_A) \delta_{ab}, \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}\partial_a \partial_b (r_A^{-L} r_B^{-M}) ={}& LM r_A^{-L-1} r_B^{-M-1} (N_A^a N_B^b + N_A^b N_B^a) + M r_A^{-L} r_B^{-M-2} [(M+2) N_B^a N_B^b - \delta_{ab}] + \\ &+ L r_B^{-M} r_A^{-L-2} [(L+2) N_A^a N_A^b - \delta_{ab}] - \frac{4}{3} \pi M r_A^{-L} r_B^{-M+1} \delta(\bar{r}_B) \delta_{ab} - \frac{4}{3} \pi L r_B^{-M} r_A^{-L+1} \delta(\bar{r}_A) \delta_{ab},\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\Delta r_A^{-L} = L(L-1) r_A^{-L-2} - 4\pi L r_A^{-L+1} \delta(\bar{r}_A), \tag{A.13}$$

$$\Delta (r_A^{-L} r_B^{-M}) = L(L-1) r_B^{-M} r_A^{-L-2} + M(M-1) r_A^{-L} r_B^{-M-2} - 4\pi L r_B^{-M} r_A^{-L+1} \delta(\bar{r}_A) - 4\pi M r_A^{-L} r_B^{-M+1} \delta(\bar{r}_B). \tag{A.14}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Регуляризация расходящихся интегралов

Для получения уравнений движения (5.6) необходимо вычислить следующие расходящиеся интегралы в (5.2), (5.3):

$$
\begin{gathered}
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_B^n d(\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n N_A^k d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n N_B^k d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_B^n N_B^k d(\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n N_A^k N_A^s d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n N_A^k N_B^s d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_A^n N_B^k N_B^s d(\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^K r_B^M N_B^n N_B^k N_B^s d(\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_b^A \ln S_{AB} (d\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_b^B \ln S_{AB} (d\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_k^A \partial_b^B \ln S_{AB} (d\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n^B \partial_k^A \partial_b^A \ln S_{AB} (d\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n^B \partial_k^B \partial_b^A \ln S_{AB} (d\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} N_A^a \partial_n^B \partial_a^A \ln S_{AB} (d\bar{x}), \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_B^{-2} N_B^a \partial_n^B \partial_a^A \ln S_{AB} (d\bar{x}), \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} N_A^a \partial_n^A \partial_a^B \ln S_{AB} (d\bar{x}), \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_B^{-2} N_A^a \partial_n^A \partial_a^B \ln S_{AB} (d\bar{x}).
\end{gathered} \tag{B.1}
$$

для $K = -4, -3, -2, -1, 0, 1$, $M = -4, -3, -2, -1, 0, 1$. Учитывая (3.16), получаем разложение $r_B^K N_B^a$ и S_{AB}^M в степенные ряды по $r_A \approx 0$:

$$
\begin{aligned}
r_B^K N_B^a = {} & r_{AB}^K N_{AB}^a + \{ r_{AB}^{(K-1)} N_A + (K-1) r_{AB}^{(K-1)} N_{AB}^a N_{AB}^b N_A^b \} r_A + \\
& + \left\{ (K-1) r_{AB}^{(K-2)} N_{AB}^b N_A^a N_A^b + \frac{1}{2}(K-1)(K-3) r_{AB}^{(K-2)} N_{AB}^a N_{AB}^b N_{AB}^s N_A^b N_A^s + \frac{1}{2}(K-1) r_{AB}^{(K-2)} N_{AB}^a \right\} r_A^2 + \\
& + \left\{ \frac{1}{6}(K-1)(K-3)(K-5) r_{AB}^{(K-3)} N_{AB}^a N_{AB}^b N_{AB}^s N_{AB}^j N_A^b N_A^s N_A^j + \frac{1}{2}(K-1)(K-3) r_{AB}^{(K-3)} N_{AB}^a N_{AB}^b N_A^b + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(K-1) r_{AB}^{(K-3)} N_{AB}^a + \frac{1}{2}(K-1)(K-3) r_{AB}^{(K-3)} N_{AB}^b N_{AB}^s N_A^b N_A^s N_A^a \right\} r_A^3 + O(r_A^4),
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{AB}^M = {} & (2r_{AB})^M + M(2r_{AB})^{M-1}(1 + N_{AB}^K N_A^k) r_A + \frac{1}{2}\{ M(M-1)(2r_{AB})^{M-2}(1 + 2N_{AB}^k N_A^k + \\
& + N_{AB}^k N_{AB}^s N_A^k N_A^s) + M(2r_{AB})^{M-1}(r_{AB}^{-1} - r_{AB}^{-1} N_{AB}^k N_{AB}^s N_A^k N_A^s) \} r_A^2 + \\
& + \left\{ \frac{1}{6} M(M-1)(M-2)(2r_{AB})^{M-3}(1 + N_{AB}^k N_{AB}^s N_{AB}^b N_A^k N_A^s N_A^b + 3N_{AB}^k N_A^k + 3N_{AB}^k N_{AB}^k N_A^s N_A^s) + \right. \\
& + \frac{1}{2} M(M-1)(2r_{AB})^{M-2}(r_{AB}^{-1} + r_{AB}^{-1} N_{AB}^k N_A^k - r_{AB}^{-2} N_{AB}^k N_{AB}^s N_A^k N_A^s - r_{AB}^{-1} N_{AB}^k N_{AB}^s N_{AB}^b N_A^k N_A^s N_A^b) + \\
& \left. + \frac{1}{2}(2r_{AB})^{M-1}(r_{AB}^{-2} N_{AB}^k N_{AB}^s N_{AB}^b N_A^k N_A^s N_A^b - r_{AB}^{-2} N_{AB}^k N_A^k) \right\} r_A^3 + O(r_A^4).
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

Используя формулы [1]

$$
\int \hat{\delta}(\bar{r}'_A)(N_A^k N_A^{'k})^{2p} (d\bar{x}') = \frac{1}{2p+1}, \quad p = 1, 2, \ldots,
$$

$$
\int \hat{\delta}(\bar{r}'_A)(N_A^k N_A^{'k})^{2p-1} (d\bar{x}') = 0, \quad p = 1, 2, \ldots,
$$

и свойства (2.6) $\hat{\delta}$-функции, получаем интегралы, дающие ненулевой вклад в уравнения движения (5.6):

$$
\begin{gathered}
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-1} r_B^{-2} N_A^n N_A^b N_A^s (d\bar{x}) = -\frac{2}{15} r_{AB}^{-3} [N_{AB}^n \delta_{bs} + N_{AB}^b \delta_{ns} + N_{AB}^s \delta_{nb}], \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} N_B^n (d\bar{x}) = -\frac{1}{3} r_{AB}^{-2} N_{AB}^n, \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-3} r_B N_A^n (d\bar{x}) = -\frac{1}{15} r_{AB}^{-2} N_{AB}^n, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-3} r_B^{-3} N_A^n (d\bar{x}) = -r_{AB}^{-6} N_{AB}^n, \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_A^{-2} r_B^{-4} N_B^n (d\bar{x}) = \frac{5}{3} r_{AB}^{-6} N_{AB}^n, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_b^A \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \left[\frac{1}{4}\delta_{nb} - \frac{1}{4} N_{AB}^n N_{AB}^b\right] r_{AB}^{-2}, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_b^B \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \left[N_{AB}^n N_{AB}^b - \frac{1}{2}\delta_{nb}\right] r_{AB}^{-2}, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n \partial_a^A \partial_b^B \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \left[\frac{1}{2} N_{AB}^b \delta_{an} + \frac{1}{4} N_{AB}^n \delta_{ab} + \frac{1}{4} N_{AB}^a \delta_{nb} - N_{AB}^n N_{AB}^a N_{AB}^b\right] r_{AB}^{-3}, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n^B \partial_a^A \partial_b^A \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \left[\frac{3}{4} N_{AB}^b \delta_{an} + \frac{3}{4} N_{AB}^a \delta_{bn} + \frac{1}{2} N_{AB}^n \delta_{ab} - 3 N_{AB}^n N_{AB}^a N_{AB}^b\right] r_{AB}^{-3}, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) \partial_n^B \partial_b^B \partial_a^A \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \left[-N_{AB}^b \delta_{an} - N_{AB}^n \delta_{ab} - N_{AB}^a \delta_{nb} + 4 N_{AB}^n N_{AB}^a N_{AB}^b\right] r_{AB}^{-3}, \\
\int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_B^{-2} N_B^a \partial_n^B \partial_a^A \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \frac{1}{2} r_{AB}^{-4} N_{AB}^n, \quad \int \hat{\delta}(\bar{r}_A) r_B^{-2} N_A^a \partial_n^A \partial_a^B \ln S_{AB} (d\bar{x}) = \frac{1}{2} r_{AB}^{-4} N_{AB}^n.
\end{gathered}
\tag{B.4}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Физматгиз, Москва (1961).

2. L. Infeld and J. Plebanski, *Motion and Relativity*, Pergamon Press, New York (1960).

3. В. А. Фок, ЖЭТФ **9**, 375 (1939).

4. Н. М. Петрова, ЖЭТФ **19**, 989 (1949).

5. L. Infeld and J. Plebanski, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III, Vol. 4, 689 (1956).

6. L. Infeld and J. Plebanski, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III, Vol. 5, 51 (1957).

7. A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann, Ann. Math. **39**, 65 (1938).

8. A. Einstein and L. Infeld, Ann. Math. **41**, 455 (1940).

9. A. Einstein and L. Infeld, Canad. J. Math. **1**, 209 (1949).

10. С. М. Копейкин, Астрон. ж. **62**, 889 (1985).

11. T. Damour, *Gravitational Radiation*, ed. by N. Deruelle and T. Piran, North-Holland, Amsterdam (1983).

12. L. Blanchet, G. Faye, and B. Ponsot, Phys. Rev. D **58**, 124002 (1998).

13. R. Arnowitt, S. Deser, and C. M. Misner, Phys. Rev. **120**, 313 (1960).

14. R. Arnowitt, S. Deser, and C. M. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. by L. Witten, Wiley, New York (1962), p. 227.

15. T. Ohta, H. Okamura, T. Kimura, and K. Hiida, Prog. Theor. Phys. **51**, 1220 (1974).

16. G. Schafer, in *Mathematics of Gravitation*, Banach Center Publications, part II, Vol. 41, ed. by A. Królak, Polish Academy of Sciences, Warsaw (1997), p. 43.

17. Ч. Янкевич, ЖЭТФ **44**, 649 (1963).

18. Г. Воевода, ЖЭТФ **45**, 2051 (1963).

19. L. Infeld, Rev. Mod. Phys. **29**, 398 (1957).

20. Н. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, Москва (1959).