ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 3, стр. 543–547

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. И. Рязанов*

Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 сентября 2003 г.

Показано, что магнитное поле, действующее на вылетающую из проводника ультрарелятивистскую заряженную частицу, изменяет интенсивность переходного излучения. Найдено распределение переходного излучения в магнитном поле по углам и частотам. Обсуждена возможность определения энергии ультрарелятивистской частицы по измерению азимутальной асимметрии переходного излучения этой частицы в магнитном поле.

PACS: 41.60.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, законы сохранения энергии и импульса при излучении фотона свободной ультрарелятивистской частицей выполняются при передаче малого продольного (вдоль скорости частицы) импульса

$$\Delta p \sim \frac{h\omega}{c}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2,$$

так что волновой процесс формирования излучения происходит на длине пути частицы

$$\frac{h}{\Delta p} = \frac{c}{\omega}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2.$$

Для ультрарелятивистских частиц длина формирования излучения (длина когерентности) может иметь макроскопические размеры. На таком большом пути конкурирующие процессы могут существенно изменить движение частицы в области формирования излучения, уменьшая тем самым его интенсивность. Примером может служить влияние многократного рассеяния на тормозное излучение [1–3] или влияние поляризации среды на тормозное излучение [4].

Переходное излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей поверхности раздела сред [5–7], в случае ультрарелятивистской частицы и границы раздела проводник-вакуум формируется также в области пространства длиной $(c/\omega)(E/mc^2)^2$ и с намного меньшими поперечными размерами. Большая длина когерентности приводит к тому, что действие внешнего поля на частицу может успеть изменить характер движения частицы за время формирования излучения. Из-за этого процесс формирования излучения нарушается, угловое распределение излучения меняется и его интенсивность падает.

Для электрического внешнего поля при вылете частицы из проводника вдоль нормали к поверхности раздела этот эффект приводит к появлению сильно зависящей от лоренц-фактора γ азимутальной асимметрии распределения переходного излучения [8]. Действие магнитного поля на переходное излучение отличается от действия электрического поля, поэтому представляет интерес оценить влияние магнитного поля на переходное излучение ультрарелятивистской частицы.

2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Пусть частица с зарядом e вылетает в момент времени $t = 0$ со скоростью $v \approx c$ из проводника ($z < 0$) в вакуум ($z > 0$), где на нее действует постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное

*E-mail: ryazanov@theor.mephi.msk.su

поверхности проводника. Выберем направление оси x вдоль магнитного поля и рассмотрим переходное излучение частицы, вылетающей вдоль оси z перпендикулярно поверхности проводника. Закон движения частицы можно записать в форме

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{s}(t),$$

где $\mathbf{R}(t)$ — нормальная к поверхности, а $\mathbf{s}(t)$ — тангенциальная компоненты радиуса-вектора частицы. Как известно, поле вне проводника при таком движении заряда совпадает с полем вылетающих из одной точки $\mathbf{r} = 0$ в момент времени $t = 0$ двух зарядов: заряда e, движущегося по закону $\mathbf{r}(t)$ и заряда-изображения $-e$, движущегося по закону

$$\mathbf{r}(t) = -\mathbf{R}(t) + \mathbf{s}(t)$$

(см. [9]).

При таком движении двух зарядов распределение излученной энергии по углам и частотам имеет вид ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt$, $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{s}/dt$):

$$\frac{d^2E}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int\limits_0^\infty dt\,[\mathbf{n}\{\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\}] \times \right. \times \exp\{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(t) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}(t)\} + + \int\limits_0^\infty dt\,[\mathbf{n}\{\mathbf{v}(t)-\mathbf{u}(t)\}] \times \left. \times\ \exp\{i(\omega + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(t) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}(t)\}\right|^2. \quad (1)$$

Действие поля может быть существенным, если не зависящие от поля слагаемые частично сокращаются. Так, в ультрарелятивистском случае показатель одной экспоненты порядка $\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ и мал по сравнению с показателем другой экспоненты порядка $\omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$. Интеграл с быстроосциллирующей экспонентой мал и может быть опущен. Всюду, где не происходит взаимного сокращения основных членов, в первом приближении влиянием внешнего поля можно пренебречь. Это позволяет преобразовать (1) к виду

$$\frac{d^2E}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int\limits_0^\infty dt\,[\mathbf{n}\{\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\}] \times \right. \left. \times\ \exp\{i(\omega - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(t) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}(t)\}\right|^2. \quad (2)$$

3. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При сделанном выборе осей компоненты скорости ультрарелятивистской частицы в магнитном поле имеют вид ($\Omega \equiv eH/mc\gamma$):

$$u_x(t) = 0, \quad u_y(t) = v_0\sin\Omega t, \quad v(t) = v_0\cos\Omega t. \quad (3)$$

Отсюда следует, что закон движения частицы можно записать в форме

$$x(t) = 0, \quad y(t) = (v_0/\Omega)(1-\cos\Omega t), \quad z(t) = (v_0/\Omega)\sin\Omega t. \quad (4)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда изменение скорости частицы из-за действия магнитного поля в интересующей нас области формирования излучения мало по сравнению с начальной скоростью частицы. Это означает, что выполнено неравенство $u_y \ll v_0$, т. е. $\Omega t \ll 1$. В этом случае закон движения заряда можно представить в форме

$$u_x(t) = 0, \quad u_y(t) \approx v_0\Omega t, \quad v(t) \approx v_0, \quad x(t) = 0, \quad y(t) = (v_0\Omega)\,t^2/2, \quad z(t) = v_0 t. \quad (5)$$

Закон движения заряда-изображения в этом приближении имеет вид

$$u_x(t) = 0, \quad u_y(t) \approx v_0\Omega t, \quad v(t) \approx -v_0, \quad x(t) = 0, \quad y(t) = (v_0\Omega)\,t^2/2, \quad z(t) = -v_0 t. \quad (6)$$

Учитывая, что $v_0 \gg u$, можно пренебречь величиной u в предэкспоненциальном множителе в выражении (2), после чего распределение энергии переходного излучения по углам и частотам может быть записано как ($Q \equiv k_y v_0\Omega/2$)

$$\frac{d^2E}{d\omega\, d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_0]^2 \times \left|\int\limits_0^\infty dt\exp\left\{i\left(\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 t - iQt^2\right)\right\}\right|^2. \quad (7)$$

Содержащийся в (7) интеграл не сводится к элементарным функциям и может быть выражен через интегралы Френеля

$$S(x) = (2/\pi)^{1/2}\int\limits_0^x \sin^2 t\,dt, \qquad C(x) = (2/\pi)^{1/2}\int\limits_0^x \cos^2 t\,dt. \quad (8)$$

Интегрирование в случае $\Omega < 0$, т. е. $k_y = k\sin\vartheta\sin\varphi < 0$ дает

$$\int_0^\infty dt \exp\left\{i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,t + i|Q|t^2\right\} = \left(\frac{\pi}{2|Q|}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{i(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}{4|Q|}\right\} \times \left\{\left[\frac{1}{2} - C\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right] + i\left[\frac{1}{2} - S\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]\right\}. \quad (9)$$

Распределение переходного излучения по углам и частотам при $\sin\vartheta\sin\varphi < 0$ имеет вид

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{\pi c^3}\,\frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{v}]^2}{|Q|}\left\{\left[\frac{1}{2} - C\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]^2\right\}. \quad (10)$$

В случае $\Omega > 0$, т. е. $k_y = k\sin\vartheta\sin\varphi > 0$, интегрирование дает

$$\int_0^\infty dt \exp\left\{i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,t - i|Q|r^2\right\} = \left(\frac{\pi}{2|Q|}\right)^{1/2} \times \exp\left\{\frac{i(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}{4|Q|}\right\}\left\{\left[\frac{1}{2} + C\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right] - i\left[\frac{1}{2} + S\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]\right\}. \quad (11)$$

В отличие от (10), распределение переходного излучения по углам и частотам при $\sin\vartheta\sin\varphi > 0$ принимает вид

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{\pi c^3}\left([\mathbf{n}\times\mathbf{v}]^2/|Q|\right) \times \left\{\left[\frac{1}{2} + C\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2} + S\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right]^2\right\}. \quad (12)$$

Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ при больших x осциллируют вблизи значения $1/2$ с медленно убывающей при возрастании x амплитудой

$$\begin{aligned} S(x) &= 1/2 - (1/2\pi)^{1/2}(1/x)\cos x^2, \\ C(x) &= 1/2 + (1/2\pi)^{1/2}(1/x)\sin x^2. \end{aligned} \quad (13)$$

При малых x интегралы Френеля быстро возрастают от нуля при $x = 0$ до значений порядка единицы при $x \sim 1$. Вблизи нуля

$$S(x) = (2/\pi)^{1/2}(x^3/3), \quad C(x) = (2/\pi)^{1/2}x. \quad (14)$$

Введем вспомогательные функции $f(x)$ и $g(x)$, определяемые уравнениями

$$1/2 - S(x) = g(x)\sin(\pi x^2/2) + f(x)\cos(\pi x^2/2), \quad (15)$$

$$1/2 - C(x) = g(x)\cos(\pi x^2/2) - f(x)\sin(\pi x^2/2). \quad (16)$$

Распределение излученной энергии (10) при $\sin\vartheta\sin\varphi < 0$ запишется как

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{\pi^2 c^3}\left(\frac{[\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}]^2}{|Q|}\right) \times \left\{g^2\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right) + f^2\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right)\right\}. \quad (17)$$

Вспомогательные функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть аппроксимированы в области $0 \le x < \infty$ с погрешностью, меньшей чем $2\cdot 10^{-3}$, выражениями [10]

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{1 + 0.926x}{2 + 1.792x + 3.104x^2}, \\ g(x) &\approx \frac{1}{2 + 4.142x + 3.492x^2 + 6.670x^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Более точные приближения можно найти в [11].

4. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

При стремлении магнитного поля к нулю аргумент интегралов Френеля в (10) и (12), $(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})/2|Q|^{1/2}$, стремится к бесконечности. Поэтому в области частот и углов, для которых

$$(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \gg |Q|^{1/2} \sim \left|\frac{k_y v_0 eH}{mc\gamma}\right|^{1/2},$$

магнитное поле практически не влияет на переходное излучение. Распределение переходного излучения по углам и частотам деформируется магнитным полем при выполнении противоположного неравенства

$$\left|\frac{v_0 eH\omega\vartheta\sin\varphi}{mc^2\gamma}\right|^{1/2} \gg (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2 \sim \omega^2\left(\vartheta + \frac{1}{\gamma^2}\right)^2. \quad (19)$$

Для характерных углов вылета излучения $\vartheta \sim 1/\gamma$ это неравенство принимает вид

$$\left|\frac{eH\sin\varphi}{mc^2}\right| \gg \frac{\omega}{\gamma^4}. \quad (20)$$

При выполнении неравенств (19), (20) аргумент интегралов Френеля мал, поэтому можно воспользоваться приближенными выражениями (14) для интегралов Френеля. В области (20)

$$C\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right) \approx \frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{|\pi Q|^{1/2}} \gg S\left(\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}}\right), \quad (21)$$

так что распределение переходного излучения (10) при $\sin\varphi < 0$ запишется в виде

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{\pi c^3}\,\frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{v}]^2}{|Q|}\left\{\frac{1}{2} - \frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{|\pi Q|^{1/2}}\right\}. \quad (22)$$

В области углов $\sin\varphi > 0$ распределение переходного излучения (12) имеет вид

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{\pi c^3}\,\frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{v}]^2}{|Q|}\left\{\frac{1}{2} + \frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{|\pi Q|^{1/2}}\right\}. \quad (23)$$

Подчеркнем, что при малых значениях угла φ условия применимости (22) и (23) нарушаются, поэтому непосредственный переход от (22) к (23) невозможен.

5. АЗИМУТАЛЬНАЯ АСИММЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Если заряженная частица вылетает из проводника перпендикулярно поверхности проводника, то угловое распределение излучения в отсутствие магнитного поля имеет азимутальную симметрию. Действие магнитного поля нарушает осевую симметрию углового распределения. Задавая направление выхода излучения углами ϑ и φ сферической системы координат с осью вдоль начальной скорости частицы и учитывая, что излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в области малых углов ϑ, представим аргумент интегралов Френеля $C(x)$ и $S(x)$ в (10) и (12) как

$$\frac{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{2|Q|^{1/2}} = \frac{(\omega/2)(\vartheta^2+\gamma^{-2})}{[(\Omega\omega/2)\vartheta\sin\varphi]^{1/2}}. \quad (24)$$

Предельный случай, в котором значение (24) стремится к бесконечности, соответствует переходному излучению в отсутствие магнитного поля. Тогда распределение излучения по углам и частотам (2) переходит в обычное распределение для переходного излучения

$$\frac{d^2E}{d\omega\,d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c}\,\frac{[\mathbf{n}\times\mathbf{v}]^2}{\{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}/c)^2\}^2}. \quad (25)$$

Из (24) видно, что этот предельный случай возникает при $\varphi = 0$, а также если $\vartheta \to 0$. Но область $\vartheta \ll 1/\gamma$ дает малый вклад в интенсивность излучения и может не рассматриваться. Таким образом, излучение, вылетающее в плоскости, проходящей через скорость частицы и магнитное поле (т. е. при $\varphi = 0$), вообще не зависит от напряженности магнитного поля. Однако интенсивность излучения, распространяющегося в плоскости, перпендикулярной магнитному полю и проходящей через начальную скорость частицы (т. е. при $\varphi = \pi/2$), может существенно уменьшиться в зависимости от напряженности внешнего поля. Очевидно, что отношение интенсивностей излучения под углом $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ близко к единице, если аргумент функций $C(x)$ и $S(x)$ намного больше единицы. Существенные отличия этого отношения от единицы соответствуют малым значениям величины (24), т. е. области, где выполняется неравенство

$$(\omega/2)(\vartheta^2+\gamma^{-2}) \ll [(\Omega\omega/2)\vartheta\sin\varphi]^{1/2} \approx \approx [(\omega\vartheta/\gamma)(eH/mc)\sin\varphi]^{1/2}. \quad (26)$$

Для характерных углов $\vartheta \sim 1/\gamma$ при $\varphi \sim \pi/2$ это неравенство приобретает вид

$$\frac{eH}{mc} \gg \frac{\omega}{\gamma^3}. \quad (27)$$

Отношение интенсивностей излучения под углом $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ можно получить в форме

$$\frac{d^2E(\omega,\vartheta,\varphi=\pi/2)}{d^2E(\omega,\vartheta,\varphi=0)} = \frac{\pi\omega^3 mc}{8ceH}\,\frac{\{1+(\gamma\vartheta)^2\}^2}{\vartheta\gamma^3}. \quad (28)$$

При очень малых углах ϑ неравенство (27) нарушается и соотношение (28) становится неприменимым. Из сказанного следует, что азимутальная асимметрия углового распределения переходного излучения сильно зависит от энергии частицы. По наличию или отсутствию азимутальной асимметрии можно судить о том, достаточна ли напряженность поля для влияния на переходное излучение.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из сказанного выше следует, что влияние внешнего магнитного поля на процесс формирования переходного излучения ультрарелятивистской частицы возможно только при достаточно большой длине формирования излучения и поэтому сильно зависит от частоты излучения и лоренц-фактора частицы. Так, для миллиметровых длин волн и лоренц-фактора 10^3 длина когерентности порядка нескольких метров, и на такой длине магнитное поле должно заметно изменить движение частицы, чтобы проявился обсуждаемый эффект. Тогда при вылете частицы вдоль нормали к поверхности раздела проводник–вакуум во внешнем постоянном и однородном магнитном поле возникает азимутальная асимметрия переходного излучения, если выполнено неравенство (26).

Напряженность магнитного поля, при которой возникает заметная асимметрия, определяется неравенством (27) и сильно зависит от лоренц-фактора частицы и от частоты излучения.

Измерение азимутальной анизотропии переходного излучения в магнитном поле достаточно просто, а ее сильная зависимость от лоренц-фактора обеспечивает достаточную точность измерения энергии. Отсюда можно сделать вывод, что измерение азимутальной асимметрии углового распределения переходного излучения во внешнем поле может стать удобным методом измерения энергии ультрарелятивистских частиц.

Полезно подчеркнуть, что выше рассматривалось только переходное излучение, сформировавшееся вблизи поверхности проводника, на длине пути частицы порядка длины когерентности. Действие поля на частицу приводит также и к излучению на дальнейшем пути частицы, однако это излучение уже не связано с пересечением поверхности раздела частицей и представляет собой обычное излучение при движении частицы в магнитном поле. Свойства такого излучения определяются конкретным характером дальнейшего движения частицы в поле, и его вклад в полное излучение может быть различным. При сравнении с экспериментом вклад такого излучения нужно учитывать, но включать его в общее рассмотрение нецелесообразно. Это связано с тем, что такое излучение, во-первых, зависит от скорости частицы, а не от ее энергии, а во-вторых, его распределение сильно зависит от условий дальнейшего движения частицы в экспериментальной установке.

Автор пользуется приятной возможностью поблагодарить Б. А. Долгошеина за интересные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **92**, 535, 735 (1953).

2. А. Б. Мигдал, Phys. Rev. **103**, 1811 (1956).

3. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **32**, 633 (1957).

4. М. Л. Тер-Микаелян, ДАН СССР **94**, 1033 (1954).

5. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ **16**, 15 (1946).

6. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ **33**, 1074 (1957).

7. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ **33**, 1403 (1957).

8. М. И. Рязанов, ЖЭТФ **122**, 999 (2002).

9. В. Е. Пафомов, Известия ВУЗов, Радиофизика **10**, 240 (1967).

10. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

11. J. Boersma, Math. Comp. **14**, 380 (1960).