ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 395–398

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ УРАВНЕНИИ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИМПУЛЬСА В СЛУЧАЙНО-АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

И. В. Колоколов [a,b*], *К. С. Турицын* [b**]

[a] *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук 630090, Новосибирск, Россия*

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 29 мая 2003 г.

Рассматривается распространение светового импульса в слабонеоднородном оптическом волокне. Вид нелинейного уравнения для огибающей, описывающего эволюцию поляризованных импульсов, определяется статистикой неоднородностей в оптоволокне. Показано, что при большой частоте мелкомасштабных дефектов волокна применима изотропная система Манакова. Динамика сигнала при наличии только крупномасштабных неоднородностей описывается анизотропной системой уравнений.

PACS: 42.81.Dp, 42.81.Gs, 02.30.Ik

Оптоволоконные системы связи считаются в настоящий момент наиболее перспективными для передачи информации на большие расстояния. Такая система представляет собой последовательность оптических волокон и усилителей, необходимых для компенсации потерь внутри волокна. В линейном режиме (когда мощность импульсов мала) основным ограничителем на емкость канала являются шумы в усилителях. Поскольку амплитуда шумов спонтанной эмиссии не зависит от мощности сигнала, сейчас уделяется большое внимание солитонным системам, в которых цифровая последовательность кодируется с помощью солитонных импульсов большой мощности. Особенностью этого метода является то, что динамика сигнала существенно нелинейна. В случае идеального волокна она описывается нелинейным уравнением Шредингера [1]. В нашей работе изучается более реалистичный случай, когда волокно обладает случайными флуктуациями профиля и эволюция плотности энергии электрического поля зависит от поляризации. Как будет показано, вид усредненного крупномасштабного уравнения, описывающего такую систему, существенно зависит от статистики флуктуаций и их распределения по масштабам.

Световые импульсы, используемые для передачи информации, имеют спектральную ширину $\delta\omega$, малую в сравнении с несущей частотой ω_0. Для них применимо описание в терминах огибающей, задаваемой двухкомпонентным комплексным вектором $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\psi}(z,t)\exp(i\omega_0 t) + \boldsymbol{\psi}^*(z,t)\exp(-i\omega_0 t). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — электрическое поле импульса, z — координата вдоль волокна и t — «запаздывающее» время, связанное с физическим временем t_{phys} соотношением $t = t_{phys} - z/c$, где c — групповая скорость пакета. Уравнение эволюции вектора $\boldsymbol{\psi}$ получается путем усреднения уравнений Максвелла в среде волокна электромагнитного поля по периоду быстрых осцилляций $2\pi/\omega_0$. С учетом керровской нелинейности и хроматической дисперсии подходящим выбором единиц измерения $\boldsymbol{\psi}, z$ и t оно может быть приведено к виду [2]

$$-i\partial_z\boldsymbol{\psi} = \partial_t^2\boldsymbol{\psi} + \frac{4}{3}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\boldsymbol{\psi} + \\ + \frac{2}{3}(\psi_1^2 + \psi_2^2)\boldsymbol{\psi}^* + \hat{V}(z)\boldsymbol{\psi} + \ldots \qquad (2)$$

Здесь матрица $\hat{V}(z)$ описывает эффекты двулучепреломления, зависящие случайным образом от z в

*E-mail: kolokolov@itp.ac.ru

**E-mail: tur@itp.ac.ru

силу нерегулярности формы волокна. Последняя может быть следствием статических напряжений, технологических дефектов и т. д. В дальнейшем будем считать, если не оговорено противное, что $V_{\alpha\beta} \gg 1$. Это означает физически малость нелинейности и хроматической дисперсии в сравнении с двулучепреломлением для оптических импульсов рассматриваемых ширин Δ и амплитуд A и соответствует реальным линиям связи [1]; в единицах, выбранных в (2): $\Delta \sim 1$, $A \sim 1$.

В уравнении (2) опущены слагаемые, содержащие производные по времени t и обязанные своим происхождением тем же неоднородностям, например $\hat{m}(z)\partial_t\boldsymbol{\psi}$ и $\xi(z)\partial_t^2\boldsymbol{\psi}$, где $\hat{m}(z)$ и $\xi(z)$ — случайные матричная и скалярная функции переменной z. Относительная величина этих случайно-дисперсионных поправок мала (порядка $\delta\omega/\omega_0$) в сравнении с удержанными в (2) членами, и их влияние становится существенным лишь при больших z. Эффективное же детерминистское уравнение, описывающее невозмущенную эволюцию (если таковое существует — см. ниже) определяется статистическими свойствами матрицы $\hat{V}(z)$ на масштабах $z \leq 1$. Вид такого усредненного уравнения может зависеть от значений параметров задачи. Предметом данной публикации является уточнение условий применимости тех или иных эффективных уравнений и детерминистского описания вообще.

Наличие члена $V(z)\boldsymbol{\psi}$ в уравнении эволюции (2) приводит к быстрой z-зависимости вектора $\boldsymbol{\psi}$. Она исключается преобразованием

$$\boldsymbol{\psi}(z,t) = \mathcal{T}\exp\left[i\int\limits_0^z \hat{V}(\tau)\,d\tau\right]\boldsymbol{\Psi}(z,t). \qquad (3)$$

В уравнении движения для поля $\boldsymbol{\Psi}(z,t)$ имеются быстроосциллирующие с z слагаемые. Однако их амплитуда будет не более 1, что означает малость масштаба осцилляций (порядка $1/V$) по отношению к масштабу существенного изменения амплитуды сигнала (порядка 1) и, следовательно, открывает возможность усредненного описания динамики системы.

Матрицу $\hat{V}(z)$ мы считаем бесследовой (этого всегда можно добиться с помощью фазового преобразования поля $\boldsymbol{\psi}$). Далее, мы рассматриваем волокна, не обладающие естественной оптической активностью. Значит, $\hat{V}(z)$ можно записать как

$$\hat{V}(z) = b(\hat{\sigma}_3\cos\theta + \hat{\sigma}_1\sin\theta)$$

(см. [3]). Параметр $b(z)$ имеет смысл разности волновых векторов для разных собственных поляризаций, угол $\theta(z)$ описывает ориентации этих поляризаций относительно каким-либо образом фиксированных координатных осей. Легко проверить, что упорядоченная экспонента в (3) представима в виде

$$\mathcal{T}\exp\left[i\int\limits_0^z \hat{V}(\tau)\,d\tau\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}\hat{\sigma}_2\theta\right]\hat{W}(z), \qquad (4)$$

$$\hat{W}(z) = \mathcal{T}\exp\left[i\int\limits_0^z\left(b\hat{\sigma}_3 + \frac{\dot{\theta}}{2}\hat{\sigma}_2\right)\,d\tau\right], \qquad (5)$$

где $\dot{\theta} \equiv d\theta/dz$. Матрица $\hat{W}(z)$ есть не что иное, как оператор эволюции спина 1/2 в переменном магнитном поле $\mathbf{h}(\tau) = (0, \dot{\theta}, b)$. Следовательно, явный вид оператора $\hat{W}(z)$ существенно зависит от соотношения между амплитудой h и характерным масштабом l его изменения: $\dot{\theta}/\theta \sim \dot{h}/h \sim 1/l$. Именно, если амплитуда $h = \sqrt{\dot{\theta}^2 + b^2}$, флуктуируя, все время остается много больше величины $1/l$ (что есть аналог характерной частоты поля $\mathbf{h}(\tau)$), то вплоть до экспоненциально больших по параметру $hl \gg 1$ значений z для оператора $\hat{W}(z)$ справедлива оценка [4, 5]

$$\begin{gathered}\hat{W}(z) = \exp\left[i\int\limits_0^z h(\tau)\,d\tau + i\Gamma\hat{\sigma}_3\right]\times \\ \times\left(1+\gamma\hat{\sigma}^+ - \gamma^*\hat{\sigma}^-\right), \\ \gamma \sim O\left(\frac{1}{hl}\right), \quad \Gamma \sim 1,\end{gathered} \qquad (6)$$

где Γ представляет собой первую поправку в адиабатическом разложении для фазы спинора (называемую иногда фазой Берри [6]) и $\hat{\sigma}^{\pm} = (\hat{\sigma}_1 \pm i\hat{\sigma}_2)/2$. Действительно, в данном случае переменный профиль $\mathbf{h}(\tau)$ можно представить как совокупность неоднородностей характерного размера l. Рассмотрим сначала одну такую флуктуацию, локализованную в окрестности точки $z = 0$. Недиагональные элементы матрицы $\hat{W}(z)$ при $z \leq l$ определяются «мгновенными» значениями $\dot{\theta}(z), h(z), \ddot{\theta}(z), \dot{h}(z), \ldots$ и имеют порядок величины $\dot{\theta}(z)/h(z) \sim (hl)^{-1}$. Нетрудно убедится, что этот параметр имеет смысл параметра адиабатичности: первая поправка к адиабатическому приближению для $W(z)$ будет пропорциональна $\dot{\theta}(z)/h(z)$. Если же $z \gg l$, то обращаются в нуль все производные $\dot{\theta}(z)$, $\ddot{\theta}(z)$, ..., и эти недиагональные элементы γ будут по порядку величина равны $\sim \exp(iCh\tau_s)$, где τ_s — ближайшая к вещественной оси особенность (или нуль) аналитического продолжения функции $h(z)$ в верхнюю полуплоскость (подробнее см. в [4, 5]). Если у этой функции отсутствуют какие-либо масштабы помимо l, то $\mathrm{Im}\,\tau_s \sim l$ и

$\gamma(z \gg l) \sim \exp(-\mathrm{const}\cdot hl)$. Для повторяющихся вдоль волокна неоднородностей такие экспоненциально малые поправки могут, в принципе, накапливаться, откуда и следует ограничение по z применимости оценки (6). Неравенство $hl \gg 1$ означает, что h изменяется на масштабах, существенно превышающих длину $1/h$. Поскольку $h \gg 1$, мы можем усреднить по осцилляциям на масштабе $1/h$, подставляя (4) и (6) в (2). Результирующая система уравнений

$$\begin{aligned} -i\partial_z\Psi_1 &= (1+\xi_1)\partial_t^2\Psi_1+2\left(|\Psi_1|^2+\frac{2}{3}|\Psi_2|^2\right)\Psi_1,\\ -i\partial_z\Psi_2 &= (1+\xi_2)\partial_t^2\Psi_2+2\left(|\Psi_2|^2+\frac{2}{3}|\Psi_1|^2\right)\Psi_2 \end{aligned} \tag{7}$$

использовалась в работе [7] для исследования эффектов малых шумовых членов $\xi_{1,2}$, имеющих относительный порядок величины h^{-1}.

Приведенный выше анализ применим в том случае, когда подавлены фурье-компоненты поля $\mathbf{h}(z)$ с волновыми числами $k \sim h \gg 1/l$. Для случайного поля $\theta(z)$ таким ограничениям соответствует корреляционная функция $Q(z) = \langle\dot\theta(z)\dot\theta(0)\rangle$, убывающая при $z \gg l$ и аналитическая при $z \to 0$. Если же имеются области быстрого изменения $\theta(z)$ (изломы, дефекты структуры и т. д.), то вид матрицы $\hat W(z)$ будет определяться их статистикой. Например, при не слишком больших амплитудах неоднородностей и расстояниях z применимо выражение (6), но $\gamma \sim \sqrt{nz}$, где n имеет смысл линейной плотности таких микродефектов и оценивается как асимптотика фурье-образа функции $Q(z)$ при волновых векторах $k \sim h^{-1}$. Такой же «броуновский» рост параметра γ будут обеспечивать области с малым (порядка $1/l$) значением амплитуды $h(z)$ (что соответствует сечению волокна, близкому к идеальному кругу). Тогда n оценивается как доля таких интервалов в общей протяженности z. Величину z_c определим как расстояние, на котором недиагональные элементы матрицы $\hat W(z)$ станут порядка единицы; для слабых дефектов $z_c \sim 1/n$, для сильных изломов и скачков угла θ длина z_c порядка характерного расстояния между такого рода «событиями». Усреднение по масштабам, превышающим z_c, оставляет в тензорном произведении $\hat W(z)\otimes\hat W(z)\otimes\ldots$ только тождественное представление группы $SU(2)$. Действительно, в противном случае в группе $SU(2)$ существовала бы подгруппа, инвариантная относительно умножения на матрицы $\hat W(z_1,z_2)$ с произвольными z_1 и z_2. Если амплитуда флуктуаций направлений вектора $\mathbf{h}(z)$ отлична от нуля, то такой подгруппы нет. Данное утверждение является очевидным следствием некоммутативности двух матриц вида $\exp(\mathbf{h}_1\cdot\hat{\boldsymbol\sigma})$ и $\exp(\mathbf{h}_2\cdot\hat{\boldsymbol\sigma})$ с неколлинеарными $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Выделение же тождественного представления эквивалентно усреднению по инвариантной мере на группе $SU(2)$ (см., например, [8]).

Такое усреднение по группе $SU(2)$ может быть проведено в уравнении на переменную $\boldsymbol\Psi(z,t)$, если $z_c \ll 1$. При этом вид эффективного уравнения определяют следующие отличные от нуля средние:

$$\langle|W_{11}|^2|W_{12}|^2\rangle = 1/6, \quad \langle|W_{11}|^4+|W_{12}|^4\rangle = 2/3. \tag{8}$$

В результате приходим к утверждению, что эволюция светового импульса в волокне с достаточно большой плотностью микродефектов описывается системой уравнений Манакова [9]

$$-i\partial_z\boldsymbol\Psi = (1+\boldsymbol\xi)\partial_t^2\boldsymbol\Psi + \frac{16}{9}(|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2)\boldsymbol\Psi, \tag{9}$$

где $\boldsymbol\xi$ — малые хаотические возмущения (см. выше). Уравнения (9) получались разными способами в серии работ Менюка и Вая (см. [10, 11] и ссылки там). При этом ошибочным является вывод их авторов об универсальной применимости системы (9) к описанию эволюции импульса, как только корреляционная длина флуктуаций неоднородностей волокна станет много меньше дисперсионной и нелинейной длин ($l \sim 1/\dot\theta \ll 1$ в наших единицах). Как мы показали, весьма существенно соотношение между параметрами $b \sim h$ и $1/l$, а также коротковолновые асимптотики коррелятора этих флуктуаций, определяемые редкими событиями. Важность значения величины hl в линейной задаче об эволюции поляризации была отмечена в работе [12].

Усредненное описание в принципе применимо, если $z_c \gg 1 \gg h^{-1}$ (уравнение (7)) или $z_c \ll 1$ (уравнение (9)). Если же $z \sim z_c$, то форма сигнала определяется деталями поведения функций $\hat V(z)$. Действительно, чтобы усреднять по группе $SU(2)$, траектория $\hat W(z)$ должна пройти в окрестности любой точки группового многообразия достаточно большое число раз. Отношение $1/z_c$ как раз и измеряет эту «плотность покрытия» на масштабе нелинейности (т. е. на длинах порядка 1). При $z \sim z_c$ флуктуации моментов упорядоченной экспоненты $\hat W(z)$ также порядка 1 и никакого самоусреднения не происходит. В пределе $z \gg z_c \sim 1$ можно утверждать, что флуктуации напряжений внутри волокна и его формы приведут к разрушению импульса [7, 13] — максимум амплитуды станет много меньше первоначального значения. Экспериментально же соотношение между z и z_c можно, в принципе, определить, измеряя в линейном режиме степень эллиптичности сигнала, имевшего при $z = 0$ линейную поляризацию вдоль одной из главных осей.

В заключение приведем основные выводы данной работы. Поскольку рассматривается задача о распространении сигнала в случайной среде, в общем случае имеет смысл говорить только о статистике различных наблюдаемых величин. Однако для двух предельных значений параметра z_c, где z_c — характерная длина, на которой поляризация волны меняется на величину порядка единицы, система может быть описана детерминистскими уравнениями. Если $z \ll z_c$, где z — длина оптического волокна, то поляризация адиабатически следит за изменениями главных осей волокна и применима система уравнений (7). В противоположном предельном случае, $z \geq 1 \gg z_c$, происходит эффективное самоусреднение, связанное с равномерным распределением поляризации по сфере Пуанкаре, и для описания эволюции импульса необходимо использовать систему уравнений Манакова (9). В режиме $z_c \sim 1$ система не допускает детерминистского описания. Стоит отметить, что в солитонном режиме передачи информации может оказаться целесообразным искусственная деформация волокна, уменьшающая значение z_c до $z_c \ll 1$. Дело в том, что система Манакова (9) является интегрируемой. Данное обстоятельство весьма существенно для взаимодействия солитонов через излучение, вызванное беспорядком: в интегрируемом случае (9) такое взаимодействие существенно меньше, чем в неинтегрируемом [7, 13, 14], и структура сигнала начинает заметно искажаться на гораздо более далеких расстояниях.

Мы благодарны И. Р. Габитову, В. В. Лебедеву и М. В. Черткову за многочисленные обсуждения и вопросы, подтолкнувшие к написанию данной статьи. Работа одного из авторов (И. В. К.) выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №03-02-16147а) и Российского фонда поддержки науки. Работа другого автора (К. С. Т.) выполнена при финансовой поддержке фонда «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. G. P. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press (2001).
2. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
3. P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, Opt. Lett. **19**, 1517 (1994).
4. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **41**, 1326 (1961).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика III, Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).
6. M. V. Berry, Proc. Roy Soc. London A **392**, 45 (1984).
7. M. Chertkov, I. Gabitov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Письма в ЖЭТФ **74**, 608 (2001).
8. М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов, *Применение теории групп в квантовой механике*, УРСС (2000).
9. С. В. Манаков, ЖЭТФ **65**, 505 (1973).
10. C. R. Menyuk and P. K. A. Wai, J. Light Technol. **14**, 148 (1996).
11. C. R. Menyuk and P. K. A. Wai, J. Opt. Soc. Amer. B **11**, 1288 (1994).
12. C. D. Poole, J. H. Winters, and J. A. Nagel, Opt. Lett. **16**, 372 (1991).
13. M. Chertkov, Y. Chung, A. Dyachenko, I. Gabitov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **67**, 036615 (2003).
14. Y. Chung, V. Lebedev, and S. S. Vergeles (jr.), submitted to Opt. Lett.