ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 4 (10), стр. 903–920 

# АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ И ДРОБНО-УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*В. В. Учайкин* *

*Ульяновский государственный университет*
*432970, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 2 октября 2002 г.

Рассматривается новое множество распределений, названных дробно-устойчивыми, подмножеством которого являются устойчивые законы, а частным случаем — гауссово распределение. Эти распределения появляются как решения уравнений в частных производных дробного порядка, обобщающих обычное диффузионное уравнение на случай аномальной диффузии. Описываются свойства многомерных дробно-устойчивых плотностей, даются их выражения через специальные функции, обсуждаются приводящие к ним физические задачи.

PACS: 05.40.-a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Со времен Ричардсона, обнаружившего, что в условиях турбулентной среды диффузионный пакет расплывается по закону $t^{3/2}$ [1], накоплено большое число экспериментальных данных о разнообразных процессах аномальной диффузии, в которых не только закон расширения, но и сама форма диффузионного пакета существенно отличается от нормального случая. В их числе распространение резонансного излучения в среде оптически больших размеров [2, 3], перенос зарядов в аморфных полупроводниках [4], ЯМР-диффузометрия неоднородных структур [5], динамика полимерных систем [6], диффузия на фрактальных структурах [7], во вращающихся потоках [8], по твердой поверхности [9], в пористых стеклах [10], в скальном грунте [11], процессы в квантовой оптике [12], плазме [13] и т. д. Обзор задач подобного типа можно найти в работах [14–17].

Для описания аномальной диффузии было развито несколько подходов, использующих переменный коэффициент диффузии [18], степенные корреляции дробного порядка [19], скачкообразные блуждания [20–22], дробные производные [23–26], обобщения уравнений Фоккера–Планка [27], обобщенный термодинамический подход [28] и др. (см. обзоры в работах [14–16, 29–32]).

К настоящему времени установлено, что математическую основу аномальной автомодельной диффузии образуют уравнения в дробных производных, в простых одномерных случаях найдены их решения и выражены через $H$-функции — функции Фокса, обобщающие известные $G$-функции Мейера [33]. В наших работах [34–46] были рассмотрены трехмерные модели ускоренной диффузии (супердиффузии) и замедленной диффузии (субдиффузии), выведены уравнения, найдены их решения, приведены численные результаты. Дальнейшие исследования показали, однако, что рассмотренные случаи (супердиффузия как устойчивое Леви-движение и субдиффузия как замедленное броуновское движение) не исчерпывают всех возможных режимов аномальной диффузии. Удалось вывести основные уравнения аномальной диффузии из общих принципов, не прибегая к конкретным моделям, найти их решения, образующие новый класс распределений, названных дробно-устойчивыми, и исследовать свойства этих решений. Эти и связанные с ними вопросы и составляют содержание данной статьи.

## 2. УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальная изотропная диффузия описывается уравнением

*E-mail: uchaikin@sv.uven.ru

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D\Delta p(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in R^m, \tag{1}$$

где $D$ — коэффициент диффузии, $p(\mathbf{x},t)$ — плотность пространственного распределения диффузионной частицы в момент времени $t$. При начальном условии $p(\mathbf{x},0) = \delta(\mathbf{x})$ она имеет вид

$$p(\mathbf{x},t) = (4\pi Dt)^{-m/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right), \quad r = |\mathbf{x}|. \tag{2}$$

Отметим три особенности решения (2) уравнения (1). Во первых, оно автомодельно,

$$p(\mathbf{x},t) = t^{-m/\alpha} g_m(\mathbf{x}t^{-1/\alpha}), \quad \alpha > 0, \tag{3}$$

во-вторых, оно однородно — в том смысле, что описывает однородный во времени и пространстве марковский процесс,

$$p(\mathbf{x},t_1+t_2) = \int p(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t_1)p(\mathbf{x}',t_2)\,d\mathbf{x}', \tag{4}$$

и, в-третьих, обладает конечной дисперсией,

$$\int |\mathbf{x}|^2 p(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} < \infty. \tag{5}$$

Справедливо и обратное: если мы зададим процесс свойствами (3)–(5), то с необходимостью[1)] придем к распределению (2), удовлетворяющему уравнению (1). Значение показателя подобия $\alpha = 2$ при этом тоже определяется однозначно. Таким образом, выражения (3)–(5) можно рассматривать как три постулата (три аксиомы), определяющие рассматриваемый процесс. Процедура обобщения в такой постановке сводится к отказу от одной или даже двух аксиом, ограничивающих рассматриваемый класс процессов.

Перейдем от плотностей вероятностей $p(\mathbf{x},t)$ к их образам Фурье,

$$\tilde{p}(\mathbf{k},t) = \int \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})p(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x},$$

в теории вероятностей называемым характеристическими функциями. Тогда формулы (3) и (4) примут вид

$$\tilde{p}(\mathbf{k},t) = \tilde{g}_m(\mathbf{k}t^{1/\alpha}), \tag{6}$$

$$\tilde{p}(\mathbf{k},t_1+t_2) = \tilde{p}(\mathbf{k},t_1)\tilde{p}(\mathbf{k},t_2). \tag{7}$$

Объединяя эти равенства, получаем уравнение

$$\tilde{g}_m((t_1+t_2)^{1/\alpha}\mathbf{k}) = \tilde{g}_m(t_1^{1/\alpha}\mathbf{k})\tilde{g}_m(t_2^{1/\alpha}\mathbf{k}). \tag{8}$$

1) Этим требованиям удовлетворяют уравнения с любыми целыми степенями лапласиана, но условие неотрицательности плотности вероятности исключает все степени выше первой.

Порождаемая такой характеристической функцией плотность

$$g_m(\mathbf{x}) = \int (2\pi)^{-m} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\tilde{g}_m(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$$

называется плотностью устойчивого распределения или устойчивой плотностью с показателем $\alpha \in (0,2]$.

В зарубежной литературе устойчивые распределения часто называют распределениями Леви или, если речь идет о многомерных распределениях, распределениями Леви–Фельдгейма [47].

Множество решений уравнения (8), удовлетворяющих необходимым для характеристических функций условиям $\tilde{g}_m(0) = 1$ и $|\tilde{g}_m(\mathbf{k})| \le 1$, записывается в виде [48]

$$\tilde{g}_m(\mathbf{k};\alpha,\Gamma(\cdot)) = \\ = \exp\left\{-\int\limits_{U_m} |\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}|^\alpha \left[1 - i\,\mathrm{sign}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right]\Gamma(d\mathbf{u})\right\}, \tag{9}$$

где $\Gamma(d\mathbf{u})$ — спектральная мера, т. е. конечная мера, заданная на сфере $U_m$ единичного радиуса в $m$-мерном пространстве.

Значение $\alpha = 2$ соответствует гауссову распределению, значения $\alpha < 2$ порождают бесконечное множество других распределений. Важнейшим отличием их от гауссова распределения является бесконечность дисперсии.

Одномерным устойчивым распределениям посвящена монография [47]. Их (точнее, строго устойчивых распределений) характеристическая функция может быть записана в так называемой форме $C$:

$$\tilde{g}_1(k;\alpha,\theta) = \exp\left\{-|k|^\alpha \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\alpha\theta\,\mathrm{sign}\,k\right)\right\},$$

где

$$|\theta| \le \theta_\alpha = \min\left\{1, \frac{2}{\alpha} - 1\right\}$$

— параметр асимметрии.

Из многомерных более или менее подробно изучены симметричные, точнее, центрально-симметричные устойчивые распределения, для которых $g(\mathbf{x}) = g(-\mathbf{x})$ [48]. Подмножеством симметричных распределений являются изотропные устойчивые распределения, спектральная мера которых $\Gamma_0(d\mathbf{u}) = C\,d\mathbf{u}$ равномерно распределена по сфере $U_m$, а характеристическая функция (при специальном выборе постоянной $C$) имеет вид

$$\tilde{g}_m(\mathbf{k};\alpha,\Gamma_0(\cdot)) \equiv \tilde{g}_m(\mathbf{k};\alpha) = \exp\{-|\mathbf{k}|^\alpha\}.$$

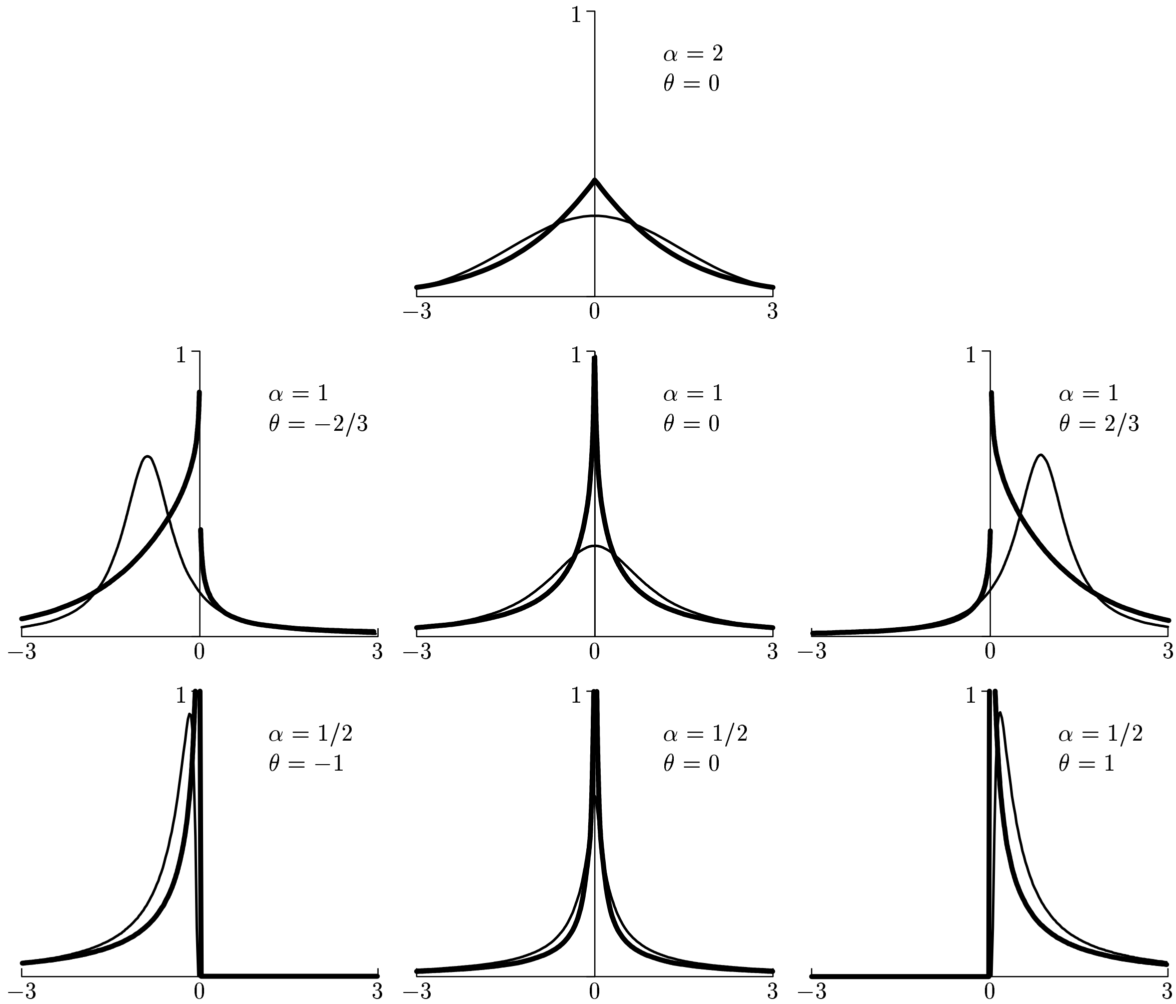


**Рис. 1.** Графики одномерных устойчивых (тонкая линия) и дробно-устойчивых (жирная линия) плотностей, соответственно, $g_1(x;\alpha,\theta)$ и $q_1(x;\alpha,1/2,\theta)$

При $\alpha = 2$ мы узнаем здесь характеристическую функцию изотропного гауссова распределения (2), случай $\alpha = 1$ соответствует $m$-мерному распределению Коши:

$$g_m(\mathbf{x};1) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)[\pi(1+r^2)]^{-(m+1)/2}, \quad r \equiv |\mathbf{x}|.$$

Остальные изотропные плотности не выражаются через элементарные функции.

Как уже говорилось выше, дисперсия, а следовательно, и все высшие моменты устойчивых распределений бесконечны — это связано с поведением плотностей на больших расстояниях. В отличие от нормального случая, при $\alpha \neq 2$ имеем

$$g_m(\mathbf{x};\alpha) \propto r^{-\alpha-m}, \quad r \to \infty.$$

Еще одна важная особенность негауссовых изотропных распределений: проекции $X_1,\dots,X_m$ описываемых ими случайных векторов $\mathbf{X}$ коррелируют между собой, корреляция исчезает только при $\alpha = 2$. Чтобы получить симметричное устойчивое распределение с независимыми проекциями при $\alpha < 2$, необходимо спектральную меру сосредоточить в точках пересечения сферы $U_m$ с осями координат ($\Gamma = \Gamma_1$). Такое распределение не изотропно, его характеристическая функция имеет вид

$$\tilde g_m(\mathbf{k};\alpha,\Gamma_1(\cdot)) = \exp\{-|k_1|^\alpha - \dots - |k_m|^\alpha\},$$

$$\mathbf{k} = \{k_1,\dots,k_m\}.$$

При значениях характеристического показателя $\alpha$, отличных от 2 и 1, плотности симметричных устойчивых распределений находятся численными методами [45, 46]. На рис. 1 (тонкие линии) и 2

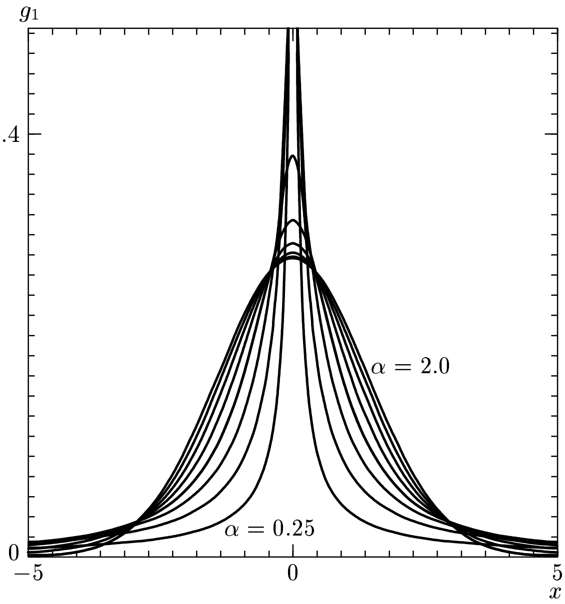


**Рис. 2.** Одномерные симметричные устойчивые распределения $g_1(x;\alpha)$; $\alpha = 0.25,\ 0.50,\ 0.75,\ 1.0,\ 1.25,\ 1.50,\ 1.75,\ 2.0$

показаны графики некоторых одномерных устойчивых плотностей, на рис. 3 представлены двумерные устойчивые распределения (*а* — распределения первого, изотропного, типа, *б* — второго типа, с независимыми компонентами).

Открытие Леви класса устойчивых распределений является важнейшей вехой истории теории вероятностей двадцатого века. Дело в том, что они и только они могут служить предельными распределениями в схеме суммирования независимых случайных величин. При этом центральная предельная теорема, основанная на требовании конечности дисперсий случайных слагаемых, обобщается на случай слагаемых с бесконечными дисперсиями. Эта обобщенная предельная теорема и лежит в основе математики аномальной диффузии.

## 3. УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Подставляя выражение (9) в (6), дифференцируя по времени и учитывая начальное условие $\tilde{p}(\mathbf{k},0) = 1$, приходим к уравнению для характеристической функции искомой плотности:

$$\frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{k},t)}{\partial t} = \tilde{L}(\alpha,\Gamma(\cdot))\tilde{p}(\mathbf{k},t) + \delta(t), \qquad (10)$$

где

$$\tilde{L}(\alpha,\Gamma(\cdot)) = -\int\limits_{U_m} |\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}|^{\alpha}\left[1 - i\,\mathrm{sign}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2}\right]\Gamma(d\mathbf{u})$$

— фурье-образ нового, обобщенного оператора диффузии $L(\alpha,\Gamma(\cdot))$. Впервые этот оператор, точнее, его частный тип — для изотропной диффузии в турбулентной среде ($-(-\Delta)^{\alpha/2}$ в современных обозначениях) — был введен Мониным в работе [23]. Выполнив формально обратное преобразование Фурье, из уравнения (10) получим

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = L(\alpha,\Gamma(\cdot))p(\mathbf{x},t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t). \qquad (11)$$

Уравнение (11), в котором $\alpha \in (0,2]$, при $\alpha \neq 2$ описывает режим супердиффузии (называемый также полетами Леви). Это видно непосредственно из выражения (3): ширина диффузионного пакета растет со временем как $t^{1/\alpha}$, что при $\alpha < 2$ дает более быстрый рост, чем в нормальном ($t^{1/2}$) случае.

Если потребовать выполнения автомодельности (3) при произвольном положительном $H$,

$$p(\mathbf{x},t) = t^{-mH} f(\mathbf{x}t^{-H}), \quad H \equiv \frac{\omega}{\alpha},$$

сохранив в уравнении оператор $L(\alpha,\Gamma(\cdot))$, но отказавшись от однородности (4), то придем к уравнению

$$\frac{\partial^{\omega} p(\mathbf{x},t)}{\partial t^{\omega}} = L(\alpha,\Gamma(\cdot))p(\mathbf{x},t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(\mathbf{x}), \quad \omega \le 1 \qquad (12)$$

с дробной производной Римана–Лиувилля в левой части. Заметим, что в силу соотношения

$$\frac{\partial^{\omega-1}\delta(t)}{\partial t^{\omega-1}} = \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)},$$

легко проверяемого с помощью преобразования Лапласа, уравнение (12) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\partial^{1-\omega}}{\partial t^{1-\omega}} L(\alpha,\Gamma(\cdot))p(\mathbf{x},t) + \delta(t)\delta(\mathbf{x}).$$

В изотропном случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^{\omega} p(\mathbf{x},t)}{\partial t^{\omega}} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} p(\mathbf{x},t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(\mathbf{x}), \quad \omega \le 1. \qquad (13)$$

Теперь показатель $H$ может принимать значения, меньшие $1/2$ (режим субдиффузии), а также равняться $1/2$ при $\alpha \neq 2$ (квазинормальная диффузия — негауссов пакет, расширяющийся с нормальной скоростью).

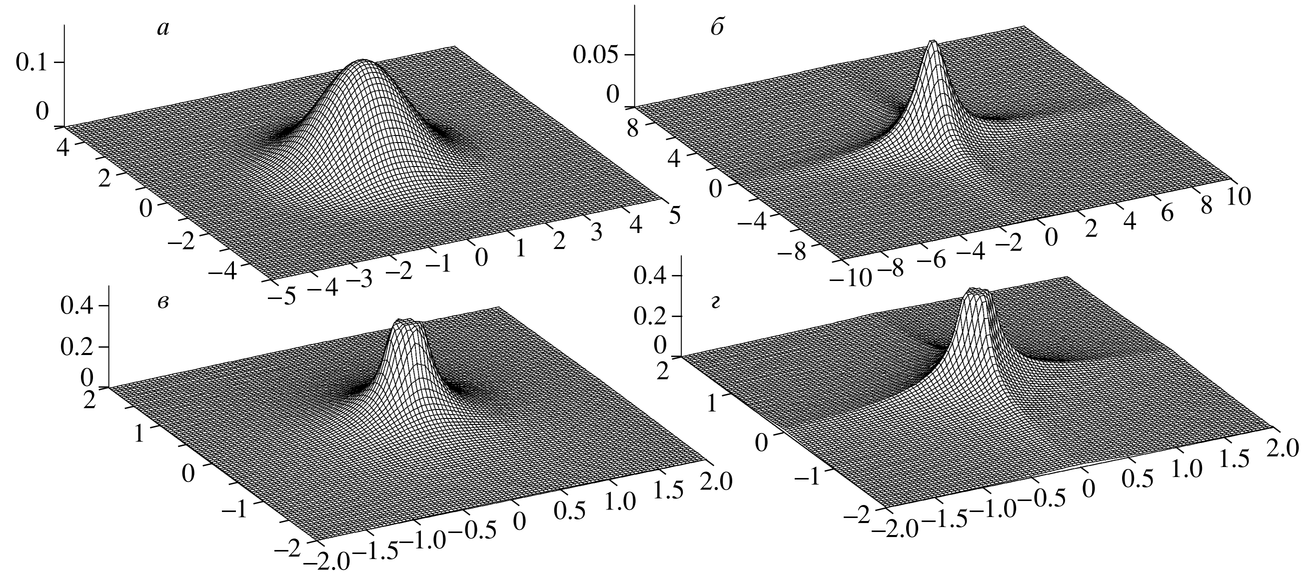


**Рис. 3.** Двумерные симметричные устойчивые распределения (*а*, *б*) и дробно-устойчивые (*в*, *г*) плотности; *а*, *в* — изотропные плотности ($\Gamma = \Gamma_0$); *б*, *г* — плотности с независимыми проекциями устойчивого вектора ($\Gamma = \Gamma_1$)

Впервые дробная производная в теории диффузионных процессов появляется в работе [24]. Ее связь с микроскопическими характеристиками среды обсуждается в работах [39–41]. Подробное изложение дробного интегродифференцирования можно найти в [49].

## 4. ДРОБНО-УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При $\omega \to 1$ имеем

$$\frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \to \delta(t)$$

и уравнение (12) переходит в уравнение (11). Обозначим решение уравнения (12) через $p(\mathbf{x}, t; \alpha, \omega, \Gamma(\cdot))$, его предел при $\omega \to 1$ выражается через устойчивую плотность $g_m(\mathbf{x}; \alpha, \Gamma(\cdot))$ следующим образом:

$$p(\mathbf{x}, t; \alpha, 1, \Gamma(\cdot)) = t^{-m/\alpha} g_m(\mathbf{x} t^{-1/\alpha}; \alpha, \Gamma(\cdot)).$$

Решение уравнения (12) при $\omega \neq 1$ можно получить, используя преобразование Лапласа по времени, как это сделано в работе [41] для частного случая $\alpha = 2$. В итоге получим

$$p(\mathbf{x}, t; \alpha, \omega, \Gamma(\cdot)) = t^{-m\omega/\alpha} q_m(\mathbf{x} t^{-\omega/\alpha}; \alpha, \omega, \Gamma(\cdot)),$$

где

$$q_m(\mathbf{x}; \alpha, \omega, \Gamma(\cdot)) = \int_0^\infty g_m(\mathbf{x}\tau^{\omega/\alpha}; \alpha, \Gamma(\cdot)) g_1^+(\tau; \omega) \tau^{m\omega/\alpha} d\tau \quad (14)$$

— $m$-мерная плотность дробно-устойчивого распределения. Входящая в это определение функция $g_1^+$ является односторонней (равной нулю на отрицательной полуоси) устойчивой плотностью, трансформанта Лапласа которой имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} g_1^+(\tau; \omega)\, d\tau = e^{-\lambda^\omega}, \quad 0 < \omega \leq 1.$$

При $\omega \to 1$ функция $g_1^+(\tau, \omega) \to \delta(\tau - 1)$ и дробно-устойчивое распределение (14) переходит в устойчивое:

$$q_m(\mathbf{x}; \alpha, 1, \Gamma(\cdot)) = g_m(\mathbf{x}; \alpha, \Gamma(\cdot)).$$

Впервые одномерный вариант дробно-устойчивого распределения (14) был получен как предел схемы блужданий в работе [50] и как решение уравнений с дробными производными — в [51], сам же термин «дробно-устойчивые» предложен в нашей работе [44]. Поясним его происхождение. Пусть $S^+(\omega)$ — случайная величина, а $\mathbf{S}(\alpha, \Gamma(\cdot))$ — $m$-мерный случайный вектор с плотностями распределений, соответственно, $g_1^+(t, \omega)$ и $g_m(\mathbf{x}; \alpha, \Gamma(\cdot))$. Рассмотрим случайный вектор

$$\mathbf{Z}(\alpha,\omega,\Gamma(\cdot),\mu)=\frac{\mathbf{S}(\alpha,\Gamma(\cdot))}{[S^{+}(\omega)]^{\mu}}, \qquad (15)$$

который естественно назвать дробно-устойчивым. Его плотность выражается через устойчивые плотности соотношением

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z};\alpha,\omega,\Gamma(\cdot),\mu)= \\ =\int_0^\infty dt\int_{R^m} d\mathbf{x}\, g_m(\mathbf{x};\alpha,\Gamma(\cdot))g_1^{+}(\tau;\omega)\delta\left(\mathbf{z}-\frac{\mathbf{x}}{\tau^{\mu}}\right).$$

После интегрирования по $\mathbf{x}$ она принимает вид

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z};\alpha,\omega,\Gamma(\cdot),\mu)= \\ =\int_0^\infty g_m(\mathbf{z}\tau^{\mu};\alpha,\Gamma(\cdot))g_1^{+}(\tau;\omega)\,d\tau. \qquad (16)$$

Сопоставляя (16) с (14), находим, что

$$q_m(\mathbf{x};\alpha,\omega,\Gamma(\cdot))=p_{\mathbf{Z}}\left(z;\alpha,\omega,\Gamma(\cdot),\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Эта связь и оправдывает введенный термин. Соотношение же (15), принимающее в данном случае вид

$$\mathbf{Z}\left(\alpha,\omega,\Gamma(\cdot),\frac{\omega}{\alpha}\right)\equiv\mathbf{Y}(\alpha,\omega;\Gamma(\cdot))=\frac{\mathbf{S}(\alpha,\Gamma(\cdot))}{[S^{+}(\omega)]^{\omega/\alpha}},$$

дает алгоритм моделирования случайных векторов $\mathbf{Y}(\alpha,\omega;\Gamma(\cdot))$ с дробно-устойчивым распределением (алгоритмы моделирования изотропно распределенных устойчивых векторов и случайных величин с односторонним устойчивым распределением описаны в работах [48, 52, 53]).

Изотропные дробно-устойчивые распределения удобно характеризовать радиальными функциями

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r)\equiv q_m(\mathbf{x};\alpha,\omega,\Gamma_0(\cdot)),\quad r=|\mathbf{x}|.$$

Их основные свойства и представления через специальные функции [43, 46] приведены в Приложении. Одномерные дробно-устойчивые плотности показаны на рис. 1 (жирные линии) в сопоставлении с устойчивыми (тонкие линии). Примеры изотропного и анизотропного двумерных распределений показаны на рис. 3*в, г*, графики радиальных функций многомерных изотропных дробно-устойчивых распределений приведены на рис. 4.

Ниже мы рассмотрим конкретные задачи, приводящие к дробно-устойчивым распределениям.

## 5. ПРИМЕНЕНИЯ ДРОБНО-УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

### 5.1. Супердиффузия и турбулентность

Первая модель супердиффузии (турбулентная диффузия) появилась в середине 20-х годов [1]. Турбулентная диффузия объясняется действием на пробные частицы существующих в турбулентной среде вихрей различных размеров. Расстояние между любыми двумя такими частицами существенно меняется лишь под действием вихрей, размеры которых соизмеримы с этим расстоянием. С точки зрения классической диффузии это означало бы зависимость коэффициента диффузии $D$ от расстояния $r=|\mathbf{x}|$ между этими частицами. Эта идея и была реализована Ричардсоном, записавшим уравнение диффузии в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\nabla\left[D\left(r\right)\nabla p(\mathbf{x},n)\right]$$

с коэффициентом $D\left(r\right)=ar^{\gamma},\gamma=4/3$. Этот «закон четырех третьих» был затем теоретически получен в работах Колмогорова и Обухова [54, 55] как следствие гипотезы самоподобия локально-изотропной турбулентности, определяемой единственной размерной характеристикой — скоростью диссипации турбулентной энергии. Решение уравнения с таким коэффициентом диффузии имеет вид

$$p(\mathbf{r},t)=A(at)^{9/2}\exp\left\{-\frac{9r^{2/3}}{4at}\right\},$$

где $A$ — нормировочная постоянная. Таким образом, в полуэмпирической теории Ричардсона ширина пакета растет пропорционально $t^{3/2}$, распределение случайного вектора оказывается негауссовым, отдельные компоненты некоррелированы, но не независимы, моменты всех порядков конечны.

Монин [23] развил альтернативную модель, сохранив однородность процесса (т. е. постоянство «коэффициента диффузии»), но видоизменив диффузионный оператор так, что характеристическая функция центрально-симметричного распределения стала удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\tilde{p}\left(\mathbf{k},t\right)}{\partial t}=-k^{2/3}\tilde{p}\left(\mathbf{k},t\right).$$

Обратное преобразование Фурье приводит к уравнению для плотности $p(\mathbf{x};t)$ с дробным лапласианом:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x};t)}{\partial t}=-(-\Delta)^{\alpha/2}p(\mathbf{x};t),$$

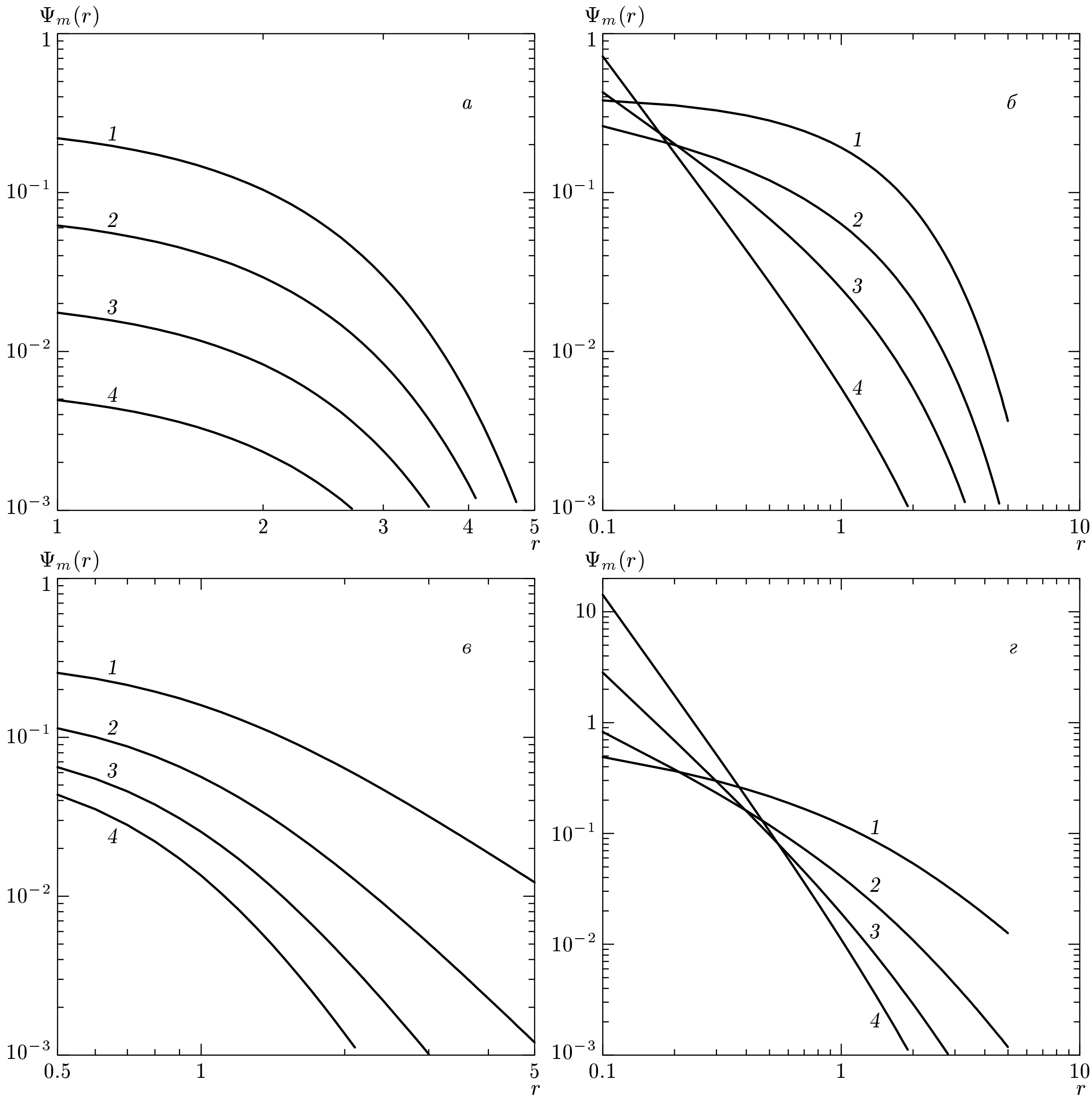


**Рис. 4.** Радиальные функции изотропных дробно-устойчивых распределений: *а* — $\Psi_m^{(2,1)}(r)$, *б* — $\Psi_m^{(2,1/2)}(r)$, *в* — $\Psi_m^{(1,1)}(r)$, *г* — $\Psi_m^{(1,1/2)}(r)$; $m = 1$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*), 4 (*4*)

где $\alpha = 2/3$. Решение этого уравнения с начальным условием $p(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$ выражается через изотропную устойчивую плотность $\Psi_3^{(2/3,1)}$ следующим образом:

$$p(\mathbf{x}; t) = t^{-3}\Psi_3^{(2/3,1)}(rt^{-3/2}) =$$

$$= Br^{-3}\exp\left\{\frac{2}{27}\frac{(bt)^3}{r^2}\right\} W_{-3/2,1/6}\left(\frac{4}{27}\frac{(bt)^3}{r^2}\right),$$

где $B$ — нормировочная постоянная, $W_{\mu,\nu}(x)$ — функция Уиттекера [56].

Из этих расчетов следует, что в центре трехмерного диффузионного облака концентрация убывает со временем пропорционально $t^{-9/2}$, линейные размеры облака растут пропорционально $t^{3/2}$ (как и в теории Ричардсона), облако выглядит более размазанным, чем в классической диффузии, его плотность характеризуется асимптотикой $r^{-11/3}$, все моменты четных порядков бесконечны.

### 5.2. Перколяция и субдиффузия

Понятие перколяции было введено в работе [57] для обозначения определенного круга явлений (протекания, просачивания, фильтрации), представлявшихся тогда в некотором смысле противоположными диффузионным. Перколяция обозначала регулярное движение жидкости (электрического тока и т. д.) в случайной среде, тогда как диффузия связывалась со случайным блужданием частиц в однородной (в среднем) среде. Развиваемая в настоящее время модель аномальной диффузии позволяет в рамках единого формализма описать обычную диффузию, диффузию в турбулентной среде (ускоренную диффузию — супердиффузию) и перколяцию (замедленную диффузию — субдиффузию).

Простейшая модель перколяции основывается на двумерной квадратной решетке с числом узлов $L \times L$. Каждый из ее узлов может быть либо проводящим с вероятностью $p$, либо непроводящим с вероятностью $q = 1 - p$, независимо от других узлов. В соответствии с этим алгоритмом обрабатываются все узлы решетки. При малых $p$ наблюдаются лишь разрозненные кластеры, не связывающие противоположные стороны квадрата. С увеличением $p$ растет вероятность перколяции — появления больших кластеров, соединяющих противоположные стороны решетки (стягивающие кластеры). Не вдаваясь в дальнейшие подробности, отметим, что наряду со стягивающими кластерами существуют тупиковые ветви («мертвые ветви»), двигаясь по которым невозможно достичь противоположной стороны. Если взять проводящий кластер за его концы и вытянуть (мысленно) в прямой отрезок оси $x$, а тупиковые ветви расположить перпендикулярно этой оси, то получим «гребешковую» структуру. Эта структура замечательна тем, что обычное диффузионное движение частицы вдоль ее линий приводит к замедленной диффузии ее $x$-координаты. Действительно, если пренебречь ограниченностью тупиковой линии, то время возвращения диффундирующей вдоль нее частицы, т. е. время пребывания $x$-координаты в ловушке, оказывается распределенным по закону $g_1^+(t, 1/2)$. Уравнение для диффузии $x$-координаты,

$$\frac{\partial^{1/2} p(x,t)}{\partial t^{1/2}} = D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\delta(x),$$

было впервые получено в работе [58], а его решение [59] выражается через дробно-устойчивое распределение

$$p(x,t) = (Dt^{1/2})^{-1/2}\Psi_1^{(2,1/2)}(x(Dt^{1/2})^{1/2}).$$

В обзоре [15] приводится большой список явлений, находящих истолкование в рамках перколяционной модели — прыжковая проводимость в полупроводниках, гелеобразование в полимерах, локализация электронов в неупорядоченных потенциалах, квантовый эффект Холла, переходы Джозефсона, переходы газ–жидкость в коллоидах, перенос плазмы в стохастических магнитных полях и так далее, вплоть до лесных пожаров и распространения эпидемий.

### 5.3. Фрактальные блуждания в среде с памятью

Очень важной в прикладном отношении является так называемая проблема Монтролла–Вейсса: определение распределения координат $p(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in R^m$, частицы, совершающей мгновенные случайные скачки $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_j, \ldots \in R^m$, разделенные случайными интервалами времени $T_1, T_1 + T_2, \ldots, T_1 + T_2 + T_j, \ldots, T_i \in R_+^1$. Случайные переменные $\mathbf{R}_i$ и $T_i$ независимы друг от друга и между собой, и их плотности $p(\mathbf{x})$ и $q(t)$ не зависят, соответственно, от времени и координат. Многочисленные примеры применений этой задачи к конкретным физическим и биологическим системам можно найти в работах [14–16, 30–32, 39, 60]. Мы рассмотрим здесь специальный вариант этой модели, когда плотности $p(\mathbf{x})$ и $q(t)$ характеризуются асимптотиками степенного вида

$$\int\limits_{|\mathbf{x}|>r} p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \sim Ar^{-\alpha}, \quad r \to \infty, \quad 0 < \alpha < 2$$

и

$$\int\limits_t^\infty q(\tau)\,d\tau \sim Bt^{-\omega}, \quad t \to \infty, \quad 0 < \omega < 1.$$

Оба этих условия интерпретируются в терминах фрактальной кинетики: первое характеризует самоподобную неоднородность среды, второе — наличие специального вида памяти (степенной тип распределений означает отсутствие характерных масштабов, отсюда и самоподобие).

Преобразование Фурье–Лапласа искомого распределения,

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda) = \int\limits_{R^m} d\mathbf{x} \int\limits_0^\infty dt \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \lambda t) p(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} \in R^m,$$

приводит к следующей трансформанте для частицы, начинающей свою историю с ожидания в начале координат ($\mathbf{x} = 0$, $t = 0$):

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda\Big[1 - \tilde{p}(\mathbf{k})\tilde{q}(\lambda)\Big]}.$$

Будем далее полагать угловое распределение скачков изотропным, так что $\tilde{p}(\mathbf{k})$ зависит только от модуля $|\mathbf{k}| = k$.

При больших временах, когда частица совершает много скачков и пространственное распределение вероятностей становится широким, плотность

$$p(\mathbf{x}, t) = i^{-1}(2\pi)^{-m-1} \int\limits_{R^m} d\mathbf{k} \int\limits_{L} d\lambda \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \lambda t)\tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda)$$

определяется поведением трансформанты $\tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda)$ в области малых $k$ и $\lambda$, где [42]

$$1 - \tilde{p}(k) \sim A' k^\alpha, \quad k \to 0, \quad A' = 2^{-\alpha} A \frac{\Gamma(m/2)\Gamma(1-\alpha/2)}{\Gamma(m/2+\alpha/2)},$$
$$1 - q(\lambda) \sim B' \lambda^\omega, \quad \lambda \to 0, \quad B' = \Gamma(1-\omega)B.$$

Отсюда следует асимптотическое выражение

$$\tilde{p}^{as}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\lambda^{\omega-1}}{\lambda^\omega + Dk^\alpha}, \quad D = \frac{A'}{B'},$$

которое может быть представлено в виде

$$\tilde{p}^{as}(\mathbf{k}, \lambda) = \lambda^{\omega-1} \int\limits_0^\infty \exp\Big\{-(\lambda^\omega + Dk^\alpha)y\Big\} dy.$$

Обращая преобразование Лапласа,

$$\tilde{p}^{as}(\mathbf{k}, t) = \int\limits_0^\infty dy \exp(-Dk^\alpha y)(2\pi i)^{-1} \times \\ \times \int\limits_L d\lambda\, \lambda^{\omega-1} \exp\Big(\lambda t - \lambda^\omega y\Big),$$

интегрированием по частям,

$$\int\limits_L d\lambda\, \lambda^{\omega-1} \exp(\lambda t - \lambda^\omega y) = \\ = -(\omega y)^{-1} \int\limits_L \exp(\lambda t) d\exp(-\lambda^\omega y) = \\ = t(\omega y)^{-1} \int\limits_L \exp(-\lambda^\omega y + \lambda t)\, d\lambda,$$

и делая замену переменной

$$s = y^{1/\omega}\lambda,$$

получаем

$$\tilde{p}^{as}(\mathbf{k}, t) = \omega^{-1} t \int\limits_0^\infty dy\, \exp(-Dk^\alpha y) y^{-1-1/\omega} \times \\ \times \left[(2\pi i)^{-1} \int\limits_S \exp(sy^{-1/\omega}t - s^\omega)\, ds\right].$$

Квадратные скобки содержат одностороннюю устойчивую плотность $g_1^+(ty^{-1/\omega}, \omega)$:

$$\tilde{p}^{as}(\mathbf{k}, t) = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{D|k|^\alpha t^\omega}{\tau^\omega}\right) g_1^+(\tau; \omega)\, d\tau.$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$p^{as}(\mathbf{x}, t) = (Dt^\omega)^{-m/\alpha} \Psi_m^{(\alpha,\omega)}\Big(|\mathbf{x}|(Dt^\omega)^{-1/\alpha}\Big), \quad (17)$$

где

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r) = \int\limits_0^\infty g_m\Big(r\tau^{\omega/\alpha}; \alpha\Big) g_1^{(\omega,1)}(\tau) \tau^{m\omega/\alpha} d\tau. \quad (18)$$

Как видим, асимптотика распределения выполняющей фрактальные блуждания частицы выражается через дробно-устойчивые распределения (примерно таким путем они и были получены в одномерной задаче [50]).

### 5.4. Диффузия на одномерном фрактальном газе

В работе [61] случайное распределение $\{X_j\} = \ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots$ точечных атомов на прямой, обладающее свойствами

1) $X_0 = 0$,

2) $X_i < X_j$, если $i < j$,

3) $X_j - X_{j-1} = R_j$ — взаимно-независимые, одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$, названо одномерным лоренц-газом.

Выбирая разные функции распределения $F(x)$, можно получить различные модели случайной среды. Так, использование ступенчатой функции Хэвисайда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \ge a \end{cases}$$

дает одномерную детерминированную решетку, экспоненциальное распределение

$$F(x) = 1 - \exp(-\mu x)$$

приводит к независимо распределенным атомам (пуассоновская модель).

В любом случае, если среднее значение $R$ конечно, в асимптотике больших $x$ получаем $\langle N(x)\rangle \propto x$ и относительные флуктуации $\Delta(x)/\langle N(x)\rangle \to 0$. Это значит, что, если $f(N(x),x)$ — некоторая гладкая функция случайной переменной $N$, то при $x \to \infty$ $f(N(x),x) \to f(\langle N(x)\rangle, x)$, т. е. с увеличением толщины слоя $x$ происходит самоусреднение:

$$\langle f(N(x),x)\rangle \to f(\langle N(x)\rangle, x).$$

Пусть теперь

$$1 - F(x) \sim \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}, \quad x \to \infty, \quad \alpha < 1.$$

В этом случае среднее расстояние между атомами бесконечно, реальные же расстояния будут конечными в любой реализации случайной среды. Бесконечность среднего значения $R$ приводит к тому, что на всех масштабах будут наблюдаться пустоты вперемежку со сгущениями, т. е. перемежаемость. Применение обобщенной предельной теоремы приводит к следующему результату:

$$\sum_{i=1}^{n} W(i,x) \sim \int_0^z w_\alpha(z)\,dz, \quad x \to \infty,$$

где $z = n/\langle N(x)\rangle$, а

$$w_\alpha(z) = \frac{z^{-1-1/\alpha}}{\alpha\Gamma(1+\alpha)} g_1^+\left(\frac{z^{-1/\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}; \alpha\right).$$

Нетрудно видеть, что эта модель лоренц-газа обладает следующими свойствами.

1. Все атомы равноправны и все процессы $N(x)$ с различными начальными атомами статистически эквивалентны: $N \stackrel{d}{=} N(x)$.

2. Среднее (по ансамблю) число атомов растет с толщиной слоя, отсчитываемой от одного из них, по степенному закону

$$\langle N(x)\rangle \sim N_1 x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

3. Относительные флуктуации числа атомов в этом слое не убывают с увеличением его толщины, а стремятся к постоянной величине.

Эти свойства и дают основание назвать полученную структуру стохастическим фракталом или фрактальным газом — самоподобным (в вероятностном смысле) множеством с фрактальной размерностью $\alpha$. Для фрактального газа имеет место соотношение

$$\langle f(N(x),x)\rangle \sim \int_0^\infty f(N_1 x^\alpha z, x) w_\alpha(z)\,dz$$

при $x \to \infty$. Оно указывает на отсутствие самоусредняемости на фрактальных структурах — главное отличие блужданий на фракталах от блужданий в регулярной среде.

Построим аналогичным образом случайное множество точек $\{T_j\}$ на положительной полуоси времени, характеризующее случайные моменты мгновенного перескока блуждающей частицы с одного атома на другой, соседний. Случайные интервалы времени между этими событиями будем считать независимыми и одинаково распределенными с функцией распределения $Q(t)$. Если

$$Q(t) = 1 - \exp(-\mu t), \quad \mu > 0,$$

то случайное множество $\{T_i\}$ образует однородный пуассоновский поток. Это означает, что вероятность совершения частицей скачка в интервале $(t, t+dt)$ не зависит от момента ее предыдущего скачка, другими словами, частица не обладает памятью. Во всех остальных случаях говорят о частице с памятью, а если

$$1 - Q(t) \sim \frac{B}{\Gamma(1-\omega)} t^{-\omega}, \quad t \to \infty, \quad \omega < 1,$$

то о частице с фрактальной памятью. Все, что было сказано выше относительно ансамбля $\{X_i\}$, справедливо и для ансамбля $\{T_i\}$, в том числе и правило усреднения.

Пусть рассматриваемая частица совершает симметричные блуждания: с равной вероятностью попадает на левый или правый соседний атом. При большом фиксированном числе скачков распределение вероятности по номерам атомов близко к нормальному. Усредняя (с помощью приведенного выше соотношения) это распределение по координатам атомов и моментам перескоков, можно прийти к выражению

$$p(x,t) = (ct)^{-\omega/2\alpha}\,\Xi^{(\alpha,\omega)}\Big((ct)^{-\omega/2\alpha} x\Big),$$

где

$$\Xi^{(\alpha,\omega)}(x) = \int_0^\infty \Psi_1^{(2,\omega)}(xy^{-\alpha}) g_1^+(y;\alpha) y^{-\alpha} dy.$$

При $\alpha \to 1$ и $\omega \to 1$ это распределение принимает гауссову форму плотности, соответствующую нормальной диффузии в регулярной среде.

Сопоставление пространственного распределения частицы, блуждающей на фрактале, с решением уравнения для фрактального блуждания (рис. 5) показывает, что последнее в общем случае нельзя

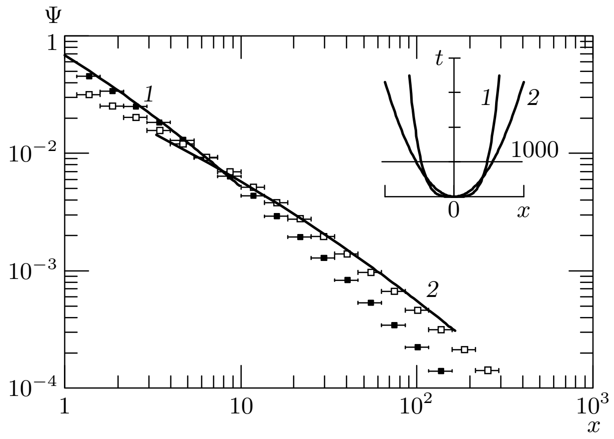


Рис. 5. Плотность распределения для частицы, совершающей одномерные блуждания на фрактале (*1*) и фрактальные блуждания (*2*). Показатели $\alpha = 0.5$, $\omega = 0.25$; точки — метод Монте-Карло

интерпретировать как уравнение, описывающее блуждание на фракталах: в первом случае диффузионный пакет расплывается по закону $t^{\omega/2\alpha}$, в последнем — по закону $t^{\omega/\alpha}$, т. е. гораздо быстрее. В случае блужданий на фракталах показатель $H = \omega/2\alpha$ принадлежит интервалу $(0, 1/2)$ и супердиффузионный режим вообще не возникает. Причину этого различия можно увидеть из рис. 6: фрактально блуждающая частица после вылета из атома всегда может уйти на большое расстояние, тогда как в случае блуждания на фрактале она может оказаться запертой между соседними кластерами, совершая между ними большое число переходов.

Подчеркнем, однако, что в обоих случаях в основе результата лежит дробно-устойчивое распределение.

### 5.5. Многократное малоугловое рассеяние на фракталах

Ситуация меняется, если частица движется в одном направлении. Такой задачей является, например, многократное рассеяние частиц на малые углы. В малоугловом приближении продольная координата $x$ играет роль времени, направление движения частицы характеризуется малым двумерным вектором $\boldsymbol{\theta}$, угловое распределение частиц, испытавших большое фиксированное число столкновений, дается двумерным нормальным распределением, если второй момент угла однократного рассеяния конечен, или двумерным устойчивым распределением в противном случае. Усреднение по конфигурациям атомов фрактала с фрактальной размерностью $\omega$ приводит к угловому распределению (см. (17), (18))

$$p(\boldsymbol{\theta}, x) = (Dt^{\omega})^{-2/\alpha}\, \Psi_2^{(\alpha,\omega)}\left(\theta (Dt^{\omega})^{-1/\alpha}\right).$$

При $\alpha = 2$ и $\omega = 1$ эта формула дает известное в теории многократного рассеяния распределение Ферми. Аналогичным образом осуществляется обобщение теорий Мольер и Ландау для углового и энергетического распределений частиц на фрактальные среды [62, 63]. Этот метод был использован также для расчета прохождения луча света в случайно неоднородном гравитационном поле, создаваемом фрактальным распределением точечных галактик [39].

### 5.6. Аномальный перенос в аморфных полупроводниках

Задаче о многократном рассеянии частиц со степенным распределением длин свободного пробега подобна модель другого процесса аномального переноса — распространения пакета носителей заряда в материалах, обладающих «ловушками», т. е. уровнями со степенным распределением времени захвата.

Степенное распределение времен пребывания носителей в ловушках может быть получено в рамках следующей модели, предложенной впервые в работе [64] (см. также [20, 65]). Носители совершают одномерное движение в положительном направлении оси $x$, определяемом направлением приложенного поля. На оси случайным образом расположены металлические включения (островки), переход носителей между которыми осуществляется путем туннелирования. В квазиклассическом приближении распределение случайного времени $\tau$ пребывания носителя в данном узле дается функцией распределения

$$P\{\tau > t\} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right).$$

Среднее время $\tau_0$ связано с расстоянием $d$ до ближайшего (в направлении поля) узла согласно формуле Зоммерфельда–Бете:

$$\tau_0 = \beta\left[\exp(\gamma d) - 1\right],$$

где $\gamma$ — положительная постоянная, а величина $\beta$ обратно пропорциональна напряженности приложенного поля. Поскольку положение следующего узла случайно, величина $\tau_0$ является случайной. В предположении о пуассоновском характере распределения включений на прямой,

$$P\{d < x\} = 1 - \exp\frac{x}{d_0},$$

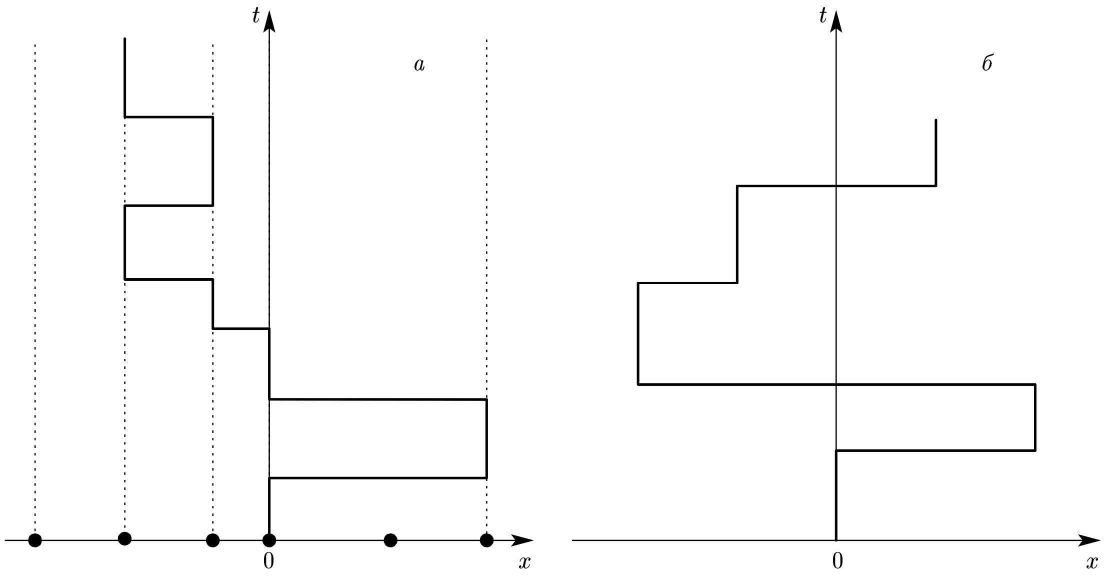


**Рис. 6.** Траектории частицы, совершающей блуждания на фрактале ($a$) и фрактальные блуждания ($б$). Показатели $\alpha = 0.5$, $\omega = 1$

усредненная по $\tau_0$, т. е. безусловная, плотность распределения времени ожидания носителя в узле имеет вид

$$p_\tau(t) = \int_0^\infty p_\tau(t|t')p_{\tau_0}(t')\,dt' =$$

$$= \omega\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\omega+1}\int_0^\infty \frac{\xi^\omega \exp(-\xi)\,d\xi}{(1+\xi\beta/t)^{\omega+1}} \sim$$

$$\sim \omega\Gamma(1+\omega)\beta^{1+\omega}t^{-\omega-1}, \quad t\to\infty.$$

При $x \gg d_0$ флуктуациями $N(x)$ можно пренебречь, что приводит к выражению для линейной концентрации, содержащему одностороннюю устойчивую плотность

$$n(x,t) \sim \frac{n_0}{\omega}C(\omega)t^{-1/\omega-1}g_1^+(C(\omega)tx^{-1/\omega};\omega), \quad t\to\infty,$$

где

$$C(\omega) = \left[\frac{B\Gamma(1-\omega)}{d_0}\right]^{-1/\omega}.$$

### 5.7. Диффузия космических лучей

Важнейшей задачей на пути к пониманию происхождения и ускорения космических лучей является проблема их распространения в межзвездной среде. Стохастический характер этого процесса определяется, главным образом, рассеянием заряженных частиц случайными неоднородностями магнитного поля. Разумеется, прямых измерений неоднородностей, эволюционирующего во времени межзвездного магнитного поля провести невозможно. В то же время, невозможно игнорировать их влияние на космические лучи. Стандартный подход, предполагающий мелкомасштабный характер неоднородностей, приводит к нормальной диффузионной модели с линейным возрастанием среднеквадратичного смещения диффундирующей частицы и негауссовой форме диффузионного пакета [66, 67]. Характерной особенностью этой модели является наличие определенных масштабов, превышение которых позволяет считать поле однородным. Существуют, однако, указания на то, что магнитное поле может иметь многомасштабный, иерархический характер [68]. В этом случае более подходящей оказывается модель аномальной диффузии, в которой ловушками являются области с высоким уровнем магнитного поля, а фрактальность отражает его «клочковатый характер», пространственную перемежаемость.

В работах [69, 70] возникающие в этой модели дробно-устойчивые распределения успешно применялись для описания экспериментально наблюдаемого излома в первичном спектре космических лучей и объяснения различия спектральных индексов для протонов и других ядер при $E \sim 10^2$–$10^5$ ГэВ/нуклон. При этом использовалось уравнение для пропагатора (функции Грина) $G(\mathbf{r}, t, E, E_0)$ космических лучей с энергией $E$ вида

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -D(E,\alpha,\beta)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{1-\omega} \times \\ \times (-\Delta)^{\alpha/2} G(\mathbf{r},t,E,E_0) + \delta(\mathbf{r})\delta(t)\delta(E-E_0).$$

Коэффициент диффузии $D$ представляется в виде

$$D = D_0(\alpha,\omega)R^{\delta},$$

где $R$ — магнитная жесткость частиц, $\delta > 0$. С использованием решения этого уравнения,

$$G(\mathbf{r},E,t;E_0) = \delta(E-E_0)(D(E_0,\alpha,\omega)t^{\omega})^{-3/\alpha} \times \\ \times \Psi_3^{(\alpha,\omega)}(r(D(E_0,\alpha,\omega)t^{\omega})^{-1/\alpha}),$$

для точечного мгновенного источника с плотностью

$$S(\mathbf{r},t,E) = S_0 E^{-p}\delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

установлено, что плотность частиц космического излучения

$$N(\mathbf{r},t,E) = S_0 E^{-p}(D(E,\alpha,\omega)t^{\omega})^{-3/\alpha} \times \\ \times \Psi_3^{(\alpha,\omega)}(r(D(E,\alpha,\omega)t^{\omega})^{-1/\alpha})$$

при низких и высоких энергиях характеризуется следующими степенными асимптотиками:

$$N(\mathbf{r},t,E) \propto E^{-p+\delta}, \quad E \to 0,$$

$$N(\mathbf{r},t,E) \propto E^{-p-\delta}, \quad E \to \infty.$$

Другими словами, в случае мгновенного источника как в субдиффузионном, $\omega < \alpha/2$, так и в супердиффузионном, $\omega > \alpha/2$, режиме при переходе от низких энергий к высоким спектральный показатель уменьшается на величину $2\delta$, т. е. имеет место излом в спектре космических лучей.

### 5.8. Хаотическая динамика

Одно из направлений исследования стохастических свойств хаотической динамики гамильтоновых систем, возникающей при нелинейном резонансе между периодическими вариациями функции Гамильтона и движением фазовых точек вдоль замкнутых изоэнергетических орбит, опирается на использование дробного обобщения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [71–74]. Частный тип этого уравнения рассмотрен в работе [75]. Со ссылкой на работу [72] для описания асимптотики его решения используется соотношение

$$\langle |X^2| \rangle = 2Dt^{2\omega/\alpha},$$

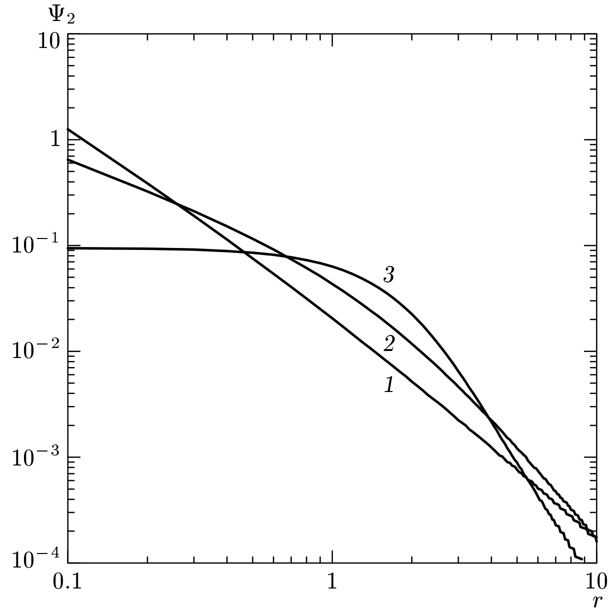


**Рис. 7.** Радиальная функция двумерного дробно-устойчивого изотропного распределения с $H = \omega/\alpha = 2/3$, $\alpha = 1/2$ (*1*), 1 (*2*), 3/2 (*3*)

с которым связан показатель Херста $H = \omega/\alpha$ и хаусдорфова фрактальная размерность $1/H$ хаотических траекторий.

В действительности, однако, $\langle |X^2| \rangle = \infty$ при любом $t$ (исключая случай $\alpha = 2$), и для корректного анализа следует использовать другую меру ширины распределения $\Delta(t)$, например, размер области, содержащей фиксированную вероятность. Замена $\langle |X^2| \rangle$ на $\Delta(t)$ возвращает приведенным выше соотношениям смысл (вместо «бесконечность пропорциональна $t^{2\omega/\alpha}$» имеем вполне содержательное утверждение) и позволяет применить дробно-устойчивые законы для исследования формы распределений по экспериментальным данным о показателе Херста. В работах [76, 77] установлено, что для токов в токамаках в режиме самоорганизованной критичности $H = 0.6$–$0.75 \approx 2/3$. Очевидно, этот параметр не определяет однозначно формы распределения (рис. 7). Для выделения соответствующего эксперименту распределения необходимо задание еще одного независимого параметра.

### 5.9. Флуктуации турбулентных потоков в плазме

Дробно-устойчивые распределения оказались подходящим способом описания локальных флуктуаций потока частиц в магнитоактивной плаз-

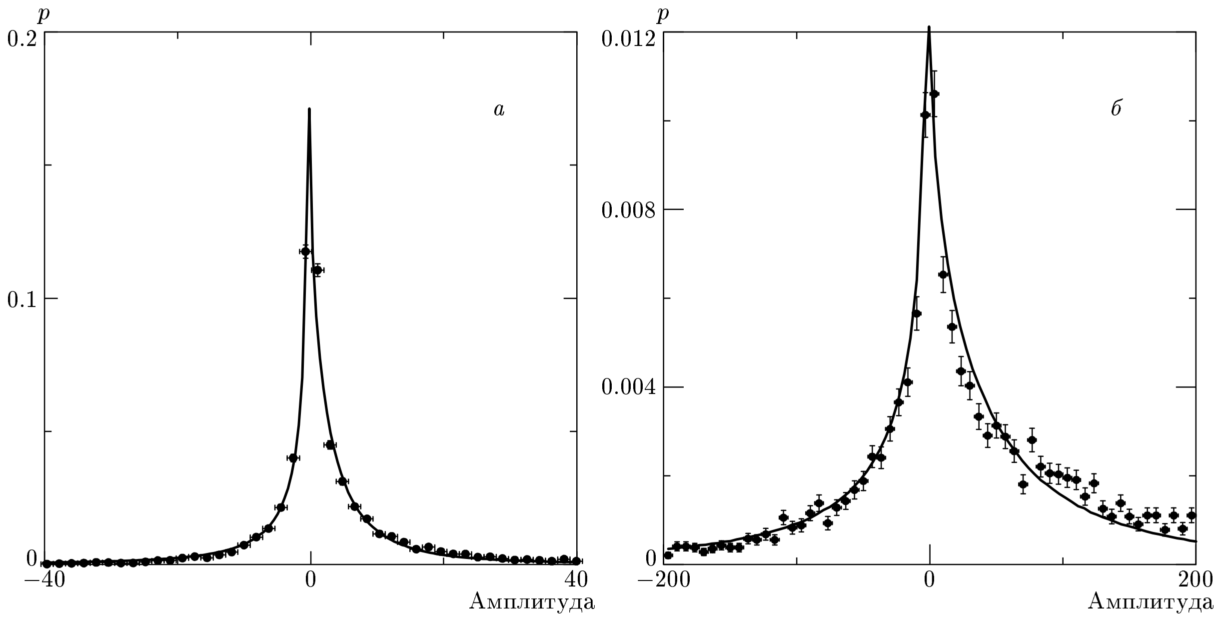


**Рис. 8.** Распределение флуктуации потока частиц в плазме. Точки — экспериментальные данные [79–81], кривая — их аппроксимация дробно-устойчивым распределением с параметрами: *а* — $\alpha = 1.2$, $\omega = 0.05$, $\theta = 0.06$, $a = 70$, $b = 3$; *б* — $\alpha = 1.1$, $\omega = 0.35$, $\theta = 0.05$, $a = 4$, $b = 0.5$

ме [78–80]. Эксперименты по изучению характеристик турбулентных потоков проводились на стеллараторе Л-2М. Это — тороидальная термоядерная установка с большим радиусом тора 100 см и средним радиусом плазмы 11.5 см, средняя плотность плазмы $(1.3–1.8) \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, центральная температура электронов 0.6–1.0 кэВ, в качестве рабочего газа использовался водород [80]. Измерения турбулентных потоков проводились на краю плазмы при плотности $(1–2) \cdot 10^{12}$ см$^{-3}$ и электронной температуре 30–40 эВ, относительном уровне флуктуаций плотности во внешних областях плазмы $(\delta n/n)_{out} = 0.2–0.25$. Локальный турбулентный поток частиц, возникающий вследствие развития всей совокупности неустойчивостей, существующих в краевой плазме стелларатора Л-2М, вычислялся по формуле $\Gamma = \delta n_e \delta v_\gamma$, где $\delta n_e$ — флуктуации плотности плазмы,

$$\delta v_\gamma = \frac{c\delta E_\Theta}{B}$$

— флуктуации радиальной скорости, $\delta E_\Theta$ — флуктуации полоидального электрического поля [79, 80].

Для аппроксимации получаемых распределений были использованы дробно-устойчивые распределения. На рис. 8 плотности амплитуды локального флуктуационного потока частиц в магнитоактивной плазме аппроксимированы асимметричными одномерными дробно-устойчивыми распределениями в форме $C$:

$$p(x) = aq_1(ax - b; \alpha, \omega, \theta).$$

Как визуальное сопоставление, так и применение $\chi^2$-критерия, показывает вполне удовлетворительное совпадение, что можно считать поводом для продолжения исследований в этом направлении. Для симметричных распределений, впрочем, возможны и другие статистические интерпретации [81].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расширение класса устойчивых случайных величин за счет введения их отношений могло бы показаться простой формальностью, не представляющей практического интереса в связи с отсутствием простых аналитических выражений для их плотностей, если бы не два существенных обстоятельства. Первое: дробно-устойчивые распределения возникают в схеме блужданий, точнее, в схеме скачкообразного марковского процесса с длинами мгновенных скачков и временными интервалами между ними, распределения которых характеризуются тяжелыми хвостами степенного типа. Второе обстоятельство связано с тем, что, если устойчивое распределение возникает при решении уравнений типа

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = L(\alpha, \Gamma(\cdot))p(x,t) + s(x,t),$$

где $L(\alpha,\Gamma(\cdot))$ — оператор, содержащий дробную производную порядка $\alpha$ по координатам, то дробно-устойчивое распределение связано с решением уравнений, содержащих и дробные производные по времени:

$$\frac{\partial^\omega p(x,t)}{\partial t^\omega} = L(\alpha, \Gamma(\cdot))p(x,t) + s(x,t).$$

Наличие дифференциальных уравнений позволяет аппроксимировать не только сами распределения, но и соответствующие им процессы и придать определенный физический смысл параметрам $\alpha$ и $\omega$, вытекающий из схемы блужданий. Примеры таких применений приведены в последнем разделе.

Подчеркнем еще раз: дробно-устойчивые распределения являются расширением класса устойчивых законов. Их общим прародителем является закон Гаусса, чем и определяется особое положение этих распределений среди всех вероятностных распределений вообще.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Н. Н. Скворцовой и ее коллегам из ИОФ РАН, результаты которых использованы в разд. 5.9, В. В. Саенко за проведение численных расчетов и Е. В. Кожемякиной за подготовку рукописи к печати.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №03-01-00163) и Британского фонда Royal Society (грант gt/fSU/JP).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Изотропные дробно-устойчивые плотности

1. Плотности $\Psi_{m+2}^{(\alpha,\omega)}(r)$ и $\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r)$ связаны соотношением

$$\Psi_{m+2}^{(\alpha,\omega)}(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r)}{dr}.$$

2. Как и в случае нормального распределения, проекция $m$-мерного вектора $X(t)$ на $m'$-мерное пространство ($m' < m$) совершает диффузию в соответствии с $m'$-мерным законом с теми же самыми параметрами $\alpha$ и $\omega$.

3. В отличие от нормального случая разные координаты $X_1(t), \ldots, X_m(t)$ выполняющей аномальную диффузию частицы не являются независимыми друг от друга.

4. Распределение $\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r)$ убывает с ростом $r$, его максимальное значение конечно только при $m < \alpha$:

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(0) = \frac{\Gamma(1+m/\alpha)\Gamma(1-m/\alpha)}{(4\pi)^{m/2}\Gamma(1+m/2)\Gamma(1-m\omega/\alpha)}.$$

В частности,

$$\Psi_1^{(\alpha,\omega)}(0) = \frac{\operatorname{cosec}(\pi/\alpha)}{\alpha\Gamma(1-\omega/\alpha)}.$$

5. Если $\alpha = 2$ и $\omega < 1$, то

$$\Psi_1^{(2,\omega)}(0) = \left[2\Gamma\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-1},$$

$$\Psi_2^{(2,\omega)}(r) \sim \left[2\pi\Gamma(1-\omega)\right]^{-1}|\ln r|, \quad r \to 0,$$

и для $m \geq 3$ имеем

$$\Psi_m^{(2,\omega)}(r) \sim (4\pi)^{-m/2}\frac{\Gamma(m/2-1)}{\Gamma(1-\omega)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-(m-2)}, \quad r \to 0.$$

6. На больших расстояниях

$$\Psi_m^{(2,\omega)}(r) \sim (4\pi)^{-m/2}(2-\omega)^{-1/2}\omega^{[(m+1)\omega/2-1]/(2-\omega)} \times \\ \times \left(\frac{r}{2}\right)^{-m(1-\omega)/(2-\omega)} \times \\ \times \exp\left\{-(2-\omega)\omega^{\omega/(2-\omega)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2/(2-\omega)}\right\}.$$

При $\omega = 1$ эта формула становится точной.

7. В одномерном случае с $\alpha = 2$ имеем

$$\Psi_1^{(2,\omega)}(r) = \omega^{-1}r^{-1-2/\omega}g_1^+(r^{-2/\omega}; \omega/2).$$

В частности, при $\omega = 1$

$$\Psi_1^{(2,1)}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{4}\right),$$

а при $\omega = 2/3$

$$\Psi_1^{(2,2/3)}(r) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{r}K_{1/3}\left(\frac{2r^{3/2}}{\sqrt{27}}\right).$$

8. При $\alpha = 1$, $\omega = 1/2$ дробно-устойчивое распределение любой размерности выражается через неполную гамму-функцию:

$$\Psi_m^{(1,1/2)}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\Big((m+1)/2\Big)}{(4\pi)^{(m+1)/2}} \times \\ \times \exp\left(\frac{r^2}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{m+1}{2}, \frac{r^2}{4}\right).$$

Для нечетных размерностей $m$ функция

$$\Psi_m^{(1,1/2)}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\Big((m+1)/2\Big)}{(4\pi)^{(m+1)/2}} \left(\frac{r^2}{4}\right)^{\mu} \times \\ \times \exp\left(\frac{r^2}{4}\right) E_{(m+1)/2}\left(\frac{r^2}{4}\right),$$

где

$$\mu = 1 - \frac{m+1}{2}.$$

9.

$$\Psi_m^{(2/3,1)}(r) = \frac{\Gamma(m/2+1/3)\Gamma(m/2+2/3)}{2\sqrt{3\pi^m}\Gamma(5/6)\Gamma(7/6)} r^{-m} \times \\ \times \exp\left(\frac{2}{27} r^{-2}\right) W_{-m/2,1/6}\left(\frac{4}{27} r^{-2}\right).$$

10. Разложение в асимптотический ряд

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r) = \frac{\alpha}{2(4\pi)^{m/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \times \\ \times \frac{\Gamma((m+\alpha n)/2)}{\Gamma(1-\alpha n/2)\Gamma(1+n\omega)} \left(\frac{r}{2}\right)^{-n\alpha-m}.$$

11. Преобразование Меллина $\Psi^{(\alpha,\omega)}(r)$ выражается через гамма-функции:

$$\bar{\Psi}_m^{(\alpha,\omega)}(s) \equiv \int_0^{\infty} \Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r) r^{s-1} dr = \\ = \frac{2^s \Gamma(1-(m-s)/\alpha)\Gamma(s/2)\Gamma((m-s)/\alpha)}{\alpha(4\pi)^{m/2}\Gamma(1-(m-s)\omega/\alpha)\Gamma((m-s)/2)}.$$

12. При $\alpha = 2$ существуют четные моменты

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r^{2n})\, d\mathbf{x} = \frac{\Gamma(n+m/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n\omega+1)} \Big(4Dt^{\omega}\Big)^n.$$

13. Представление через $H$-функции (функции Фокса) [33] имеет вид

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r) = \frac{\omega}{2}(4\pi)^{-m/2}\left(\frac{2}{r}\right)^{m+\alpha} H_{32}^{12}\left(\left(\frac{2}{r}\right)^{\omega} \middle| \begin{matrix} (-1,1/\alpha)(1-(\alpha+m)/2,\omega/2)(1-\alpha/2,1/2) \\ (0,1/\alpha)(-1,1/\alpha) \end{matrix}\right), \quad \alpha < 1,$$

$$\Psi_m^{(\alpha,\omega)}(r) = (\alpha r\sqrt{\pi})^{-m} H_{23}^{21}\left(\frac{r}{2} \middle| \begin{matrix} (1,1/\alpha)\,(1,\omega/\alpha) \\ (1,1/\alpha)\,(m/2,1/2)\,(1,1/2) \end{matrix}\right), \quad 1 \le \alpha < 2,$$

$$\Psi_m^{(2,\omega)}(r) = (2r\sqrt{\pi})^{-m} H_{12}^{20}\left(\frac{r}{2} \middle| \begin{matrix} (1,\omega/2) \\ (1,1/2)\,(m/2,1/2) \end{matrix}\right).$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. **110**, 709 (1926).
2. Л. М. Биберман, ЖЭТФ **17**, 416 (1947).
3. Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напортович, ЖЭТФ **56**, 654 (1969).
4. B. Berkowith and H. Scher, Phys. Rev. E **57**, 5858 (1998).
5. R. Kimmich, *Tomography, Diffusometry, Relaxometry*, Springer, Berlin (1997).
6. P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell Univ. Press, Ithaca (1979).
7. M. Porto, A. Bunde, S. Havlin, and H. E. Roman, Phys. Rev. E **56**, 1667 (1997).
8. W. Young, A. Pumir, and Y. Pomeau, Phys. Fluids A **1**, 462 (1989).
9. W. D. Luedtke and U. Landmann, Phys. Rev. Lett. **82**, 3835 (1999).
10. J. Bodurka, R.-O. Seitter, R. Kimmich, and A. Gutsze, J. Chem. Phys. **107**, 5621 (1997).
11. M. Sahimi, Phys. Rep. **306**, 214 (1998).
12. S. Scaufler, W. P. Schleich, and V. P. Yakovlev, Phys. Rev. Lett. **83**, 3162 (1999).
13. R. Balescu, Phys. Rev. E **51**, 4807 (1995).
14. J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
15. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
16. M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, Nature **363**, 31 (1993).
17. J. K. Jonscher, *Universal Relaxation Law*, Chelsea Dielectric Press, London (1996).
18. B. O'Shaugnessy and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **54**, 455 (1985).

**19**. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1983).

**20**. H. Scher and E. W. Montroll, Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).

**21**. E. W. Montroll and G. H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).

**22**. E. W. Montroll and M. Schlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, Noth-Holland, Amsterdam (1984), Vol. 2.

**23**. А. С. Монин, ДАН СССР **105**, 256 (1955).

**24**. Р. Ш. Нигматуллин, М. Р. Вяселев, Ж. аналит. химии **19**, 545 (1964).

**25**. F. Mainardi, Изв. ВУЗов, радиофизика **38**, 20 (1995).

**26**. В. Л. Кобелев, Е. П. Романов, Я. Л. Кобелев, Л. Я. Кобелев, ДАН **361**, 755 (1998).

**27**. G. M. Zaslavsky, Physica D **76**, 110 (1994).

**28**. C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).

**29**. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).

**30**. *Anomalous Diffusion, from Basics to Applications*, ed. by R. Kutner, A. Pekalski et al., Springer, Berlin (1999).

**31**. R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 16 (2000).

**32**. D. ben-Avraham and S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press (2000).

**33**. A. M. Mathai and R. K. Saxena, *The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines*, Wiley, New Delhi (1978).

**34**. В. В. Учайкин, ТМФ **115**, 154 (1998).

**35**. В. В. Учайкин, ЖТФ **68**, 138 (1998).

**36**. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).

**37**. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, Теор. вер. и ее применение **44**, 176 (1999).

**38**. В. В. Учайкин, Теор. вер. и ее применение **44**, 194 (1999).

**39**. V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications*, Netherlands, Utrecht, VSP (1999).

**40**. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).

**41**. В. В. Учайкин, ЖЭТФ **115**, 2113 (1999).

**42**. V. V. Uchaikin, Int. J. Theor. Phys. **38**, 2375 (1999).

**43**. V. V. Uchaikin, J. Theor. Phys. **39**, 2087 (2000).

**44**. V. Kolokoltsov, V. Korolev, and V. Uchaikin, Nottingham Trent University, preprint № 23/00 (2000).

**45**. V. V. Uchaikin, Physica A **305**, 205 (2002).

**46**. V. V. Uchaikin, J. Chem. Phys. **88**, 1141 (2002).

**47**. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).

**48**. G. Samorodnitzky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York (1994).

**49**. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).

**50**. M. Kotulski, J. Stat. Phys. **81**, 777 (1995).

**51**. A. I. Saichev and G. M. Zaslavsky, Chaos **7**, 753 (1997).

**52**. M. Kanter, Ann. Probab. **3**, 697 (1975).

**53**. V. V. Uchaikin and G. G. Gusarov, in *Proc. $3^{rd}$ St.-Petersburg Workshop on Simulation*, SPb Univ. Press (1999), p. 306.

**54**. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 299 (1941).

**55**. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **4–5**, 453 (1941).

**56**. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, ч. 2, Наука, Москва (1967).

**57**. S. R. Broadbent and J. M. Hammersley, Proc. Cambridge Phil. Soc. **53**, 629 (1957).

**58**. R. R. Nigmatullin, Phys. Stat. Sol. (b) **123**, 739 (1984).

**59**. В. Е. Архинчеев, Э. М. Баскин, ЖЭТФ, **100**, 292 (1991).

**60**. B. J. West and W. Deering, Phys. Rep. **246**, 1 (1994).

**61**. E. Barkai, V. Fleurov, and J. Klafter, Phys. Rev. E **61**, 1164 (2000).

**62**. В. В. Учайкин, Д. А. Коробко, Письма в ЖТФ **11**, 34 (1999).

**63**. Д. А. Коробко, В. В. Учайкин, Ученые записки УлГУ, сер. физ. **6**, 15 (1999).

**64**. J. K. E. Tunaley, J. Appl. Phys. **11**, 4783 (1972).

**65**. И. П. Звягин, *Кинетические явления в неупорядоченных полупроводниках*, Изд-во МГУ, Москва (1984).

**66**. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, *Происхождение космических лучей*, Наука, Москва (1964).

**67**. V. S. Berezinsky, S. V. Bulanov, V. L. Ginzburg et al., *Astrophysics of Cosmic Rays*, North Holland, Amsterdam (1990).

**68**. A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov, and A. M. Shukurov, *Magnetic Fields of Galaxies*, Kluwer, Dordrecht (1988).

**69**. A. A. Lagutin, Yu. A. Nikulin, and V. V. Uchaikin, Nucl. Phys. B **97**, 267 (2001).

**70**. A. A. Lagutin and V. V. Uchaikin, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **201**, 212 (2003).

**71**. G. M. Zaslavsky, in *Topological Aspects and the Dynamics of Fluids and Plasmas*, ed. by H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, P. Comte, and M. Tabor, Kluwer, Boston (1992).

**72**. G. M. Zaslavsky, Physica D **76**, 110 (1994).

**73**. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).

**74**. G. M. Zaslavsky, M. Edelman, H. Weiltzner et al., Phys. Plasmas **7**, 3691 (2000).

**75**. A. E. Milovanov, Phys. Rev. E **63**, 047301 (2001).

**76**. B. A. Carreras, B. van Milligen, M. A. Pedrosa et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4438 (1998).

**77**. B. A. Carreras, B. van Milligen, C. Hidalgo et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 3653 (1999).

**78**. J. W. Connor, P. Burraffi, J. G. Cordey et al., Plasma Phys. Control Fusion **41**, 693 (1999).

**79**. M. A. Pedrosa, M. A. Ochando, J. A. Jimenez et al., Plasma Phys. Control Fusion **38**, 365 (1996).

**80**. G. M. Batanov, O. I. Fedyanin, N. K. Kharchev et al., Plasma Phys. Control Fusion **40**, 1241 (1998).

**81**. Г. М. Батанов, В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев и др., Письма в ЖЭТФ **73**, 143 (2001).