ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 2 (8), стр. 379–393

РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

В. Ф. Елесин *

Московский инженерно-физический институт
(технический университет)
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 февраля 2003 г.

Дано полное решение задачи резонансного туннелирования в двухбарьерной наноструктуре в сильном переменном электрическом поле. С помощью предложенного в работе метода теории возмущений и в квазиклассическом приближении найдены волновые функции и нелинейный отклик в широком интервале частот и амплитуд полей. Полученное в квазиклассическом приближении выражение для тока учитывает вклады всех порядков по полю, т. е. переходы электронов с излучением и поглощением любого количества фотонов. Оно позволяет найти максимально возможные значения резонансных токов и мощностей генерации. Показано, что максимальный резонансный ток на частоте ω ($\omega \gg \Gamma$, Γ — ширина резонансного уровня) равен примерно половине от постоянного резонансного тока, т. е. достигает очень большой величины. Соответственно, мощности генерации в квантовом режиме на сверхвысоких частотах ($\omega = 10^{13}$ с$^{-1}$) могут быть порядка 10^6–10^7 Вт/см^2. В квантовом режиме мощность растет с увеличением частоты, в отличие от обычно используемого классического режима, в котором мощность быстро уменьшается.

PACS: 79.60.Jv, 73.23.-b

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая интерференция электронов лежит в основе многих фундаментальных явлений. Одним из них является резонансное туннелирование, состоящее в прохождении электронов с резонансной энергией ε_R через двухбарьерную структуру без отражения.

Если энергии электронов ε отличаются от резонансной ε_R на величину, бóльшую ширины резонансного уровня Γ, ток резко падает, а отражение растет.

Впервые ток был вычислен в работе [1], а для более реальной двухбарьерной структуры — резонансно-туннельного диода (РТД) — в [2]. Резонансная зависимость тока I_0 от напряжения V была обнаружена экспериментально [2] и было доказано существование отрицательной дифференциальной проводимости. Это означало возможность усиления и генерации переменного электрического поля [3, 4]. Экспериментальные достижения сделали актуальной задачу о резонансном туннелировании в переменном поле и нахождении переменного тока (отклика) [5–14].

Переменное поле $E\cos(\omega t)$ приводит к поглощению и излучению фотонов $\hbar\omega$ в процессе туннелирования. Излучательные переходы идут между состояниями с квазиэнергиями $\varepsilon + n\hbar\omega$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Можно ожидать, что интенсивность этих переходов резко увеличивается, если один из квазиэнергетических уровней совпадает с резонансной энергией ε_R, т. е. $\varepsilon - \varepsilon_R = n\hbar\omega$. Таким образом, реализуется одновременно пространственный и временной резонанс, который проявляется наиболее ярко, если частота ω значительно превосходит ширину резонансного уровня Γ (далее $\hbar = 1$). При условии резонанса, $\varepsilon - \varepsilon_R \equiv \delta = \omega$, переменный ток $I_c(xt) = I_c(x)\cos(\omega t)$ должен достигать максимального значения. Резонансное увеличение переменного тока при $\omega = \delta \gg \Gamma$ было теоретически доказано в работе [9]. В ранних работах, выполненных числен-

*E-mail: VEF@supercon.mephi.ru

ными и аналитическими методами (см. [5–8] и ссылки в этих работах), анализировался нерезонансный случай, когда напряжение смещения (эквивалент δ) выбиралось в области отрицательной дифференциальной проводимости ($\delta < \Gamma$). Кроме того, часто вычислялся только коллекторный ток $I_c(a)$ (a — размер квантовой ямы) [5, 6, 14]. Из упомянутых работ следовало, что переменный ток быстро уменьшается с увеличением частоты при $\omega > \Gamma$ и даже меняет знак. На основании полученных данных был сделан вывод о существовании предельной частоты усиления и генерации в РТД, примерно равной Γ (см., например, [8]).

Этот вывод противоречит изложенным выше физическим соображениям, а также в определенной степени экспериментальным данным (см., например, [3, 4], где наблюдались резонансные особенности РТД в лазерном поле с частотой 2.5 ТГц и генерация до 712 ГГц). Следует также отметить, что в большинстве опубликованных аналитических работ используются полуфеноменологические подходы, при которых применяется метод туннельного гамильтониана [6], либо уравнение Шредингера не решается явно [5]. Вместе с тем система резонансно туннелирующих и взаимодействующих с переменным полем электронов исключительно чувствительна к энергии подводимых из коллектора электронов и граничным условиям. Поэтому в работах [9, 10] была предпринята попытка решить задачу в строгой квантовомеханической постановке для максимально простой модели РТД. Удалось найти точные аналитические решения уравнения Шредингера с открытыми граничными условиями в присутствии слабого переменного поля и явные выражения для тока. Было показано, что ток внутри квантовой ямы $I_c(x)$ ($0 \leq x < a$), а также так называемый приведенный ток I_c (см. ниже (31)) имеют резонансный максимум при условии $\omega = \delta$ и не меняют знака во всем интервале частот. Максимум тока при $\omega = \delta$ возникает, если энергия электронов (или постоянное напряжение смещения) удовлетворяет условию $\delta > \Gamma$. Этот режим был назван в работе [9] «квантовым режимом». Таким образом, резонансное туннелирование в переменном поле реализуется в согласии с физическими представлениями. Поскольку усиление переменного поля определяется приведенным током, генерация РТД в квантовом режиме возможна на сверхвысоких частотах, значительно превосходящих ширину резонансного уровня. В то же время в работах [9, 10] было показано, что ток вне ямы $I_c(a)$ (коллекторный ток) не проявляет резонанса и меняет знак при $\omega \geq \Gamma$. В упомянутых работах (см., например, [5, 6, 8]) вычислялся именно ток $I_c(a)$. В «классическом режиме» с максимальной дифференциальной проводимостью, который обычно исследовался экспериментально и теоретически, ток $I_c(x)$ согласно [9, 10] максимален при $\omega = 0$ и быстро уменьшается ($\sim 1/\omega^4$) при $\omega \gg \Gamma$.

Однако в упомянутых выше работах волновые функции и ток были найдены в линейном приближении. Цель настоящей работы — найти аналитически волновые функции и токи РТД в сильных полях и в широком интервале частот. Учет нелинейности тока необходим, в частности, для расчета мощности генерации РТД. В работе предложен подход, позволяющий находить нелинейные поправки любого порядка к волновой функции и току. С его помощью найден ток, пропорциональный кубу переменного поля. Главный результат работы состоит в нахождении резонансного отклика в широком интервале частот и амплитуд полей вплоть до $eEa \gg \omega \gg \Gamma$ с использованием квазиклассического приближения. Здесь e — заряд электрона, E — амплитуда электромагнитного поля. Полученные выражения для тока учитывают вклады всех порядков по полю, т. е. переходы электронов с излучением и поглощением любого количества фотонов. Они позволяют найти максимальные значения резонансных токов и мощностей генерации. В частности, показано, что резонансный ток на резонансной частоте $\omega = \delta \gg \Gamma$ и при оптимальной амплитуде поля $eEa = 2.8\omega$ достигает очень большого значения, равного примерно половине резонансного постоянного тока I_0.

Оценены предельные значения мощности генерации в низкочастотном ($\omega \ll \Gamma$), классическом и квантовом режимах. В квантовом режиме на частоте 10^{13} с$^{-1}$ ($\omega \gg \Gamma$) мощность может достигать величины 10^6–10^7 Вт/см^2. Напротив, в обычно используемом классическом режиме мощность резко уменьшается с частотой, что согласуется с экспериментальными данными [4].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведены основные уравнения, граничные условия и выражения для токов, а в разд. 3 — результаты линейного приближения. Нелинейные поправки для волновой функции и тока вычисляются с помощью теории возмущений в разд. 4, 5. Анализу нелинейного отклика посвящен разд. 6. В разд. 7 находится волновая функция, а в разд. 8 — нелинейный отклик для сильного поля. Полученные общие выражения анализируются в разд. 9, где показывается, что резонансное туннелирование существует в широком интервале полей. Оценка предельных полей и мощностей генерации проводится в разд. 10.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель когерентного туннелирования, использованную нами ранее в работе [9]. Для простоты ограничимся одномерной квантовой ямой (квантовой точкой) с δ-функциональными барьерами в точках $x = 0$ и $x = a$ (см. рисунок). Слева ($x = -\infty$) к квантовой яме подводится стационарный поток электронов, пропорциональный q^2, с энергией ε, приблизительно равной энергии резонансного уровня ε_R. В области квантовой ямы действует переменное электрическое поле $E(t)$ с потенциалом $U(x,t)$ и частотой ω,

$$U(x,t) = 2U(x)\cos(\omega t),$$

$$U(x) = \begin{cases} xU, & 0 < x < a, \\ Ua, & x > a, \quad U = -eE/2. \end{cases} \quad (1)$$

Волновая функция электрона удовлетворяет уравнению Шредингера:

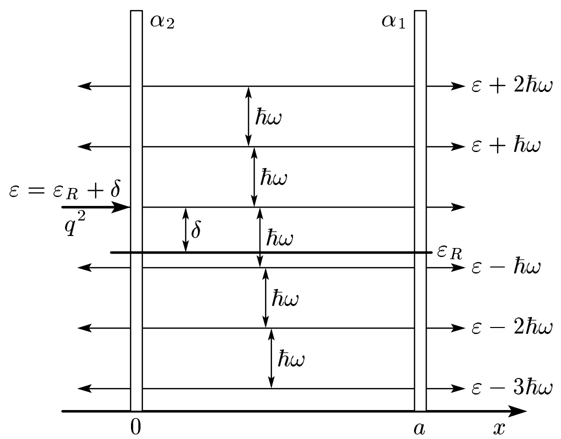
$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \alpha\left[\delta(x) + \delta(x-a)\right]\Psi + U(x,t)\Psi. \quad (2)$$

Здесь положено $\hbar = 2m = 1$. Установившееся решение (2) ищем в виде [9]

$$\Psi(x,t) = \sum_n \psi_n(x)\exp\left[-it(\varepsilon + n\omega)\right], \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad (3)$$

Парциальные волновые функции $\psi_n(x)$ описывают электроны с квазиэнергиями $\varepsilon + n\omega$ и удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\psi_n'' + p_n^2\psi_n = U(x)(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}), \quad \psi_n'' \equiv \frac{d^2\psi_n}{dx^2}, \quad (4)$$



$$p_n^2 = p^2 + n\omega, \quad \varepsilon = p^2.$$

Если поле мало (параметр малости $Ua/\Gamma \ll 1$), то решение системы (4) можно искать, обрывая ряд (3). В линейном приближении достаточно трех функций: $\psi_0^{(0)}$, $\psi_{\pm1}^{(1)}$. Это дает возможность вычислить постоянный ток I_0 и токи поляризации $I_c(x,t)$ (синфазный полю) и реактивный $I_s(x,t)$,

$$I_c(x,t) = I_c(x)\cos(\omega t), \quad I_s(x,t) = I_s(x)\sin(\omega t), \quad (5)$$

в линейном по полю приближении.

Для описания нелинейного отклика требуются нелинейные поправки. Мы ограничимся расчетом поправок третьего порядка по полю. Нетрудно убедиться, что для этого необходимы функции $\psi_{\pm2} \equiv \tilde\psi_{\pm2}$, $\psi_0^{(2)} \equiv \tilde\psi_0$, пропорциональные квадрату поля, и $\psi_{\pm1}^{(3)} \equiv \tilde\psi_{\pm1}$, пропорциональные кубу поля. Уравнения для перечисленных парциальных функций имеют вид

$$\psi_0^{(0)''} + p^2\psi_0^{(0)} = 0, \quad \psi_{\pm1}^{(1)''} + p_{\pm1}^2\psi_{(1)}^{(1)} = U(x)\psi_0^{(0)}, \quad (6)$$

$$\tilde\psi_0'' + p^2\tilde\psi_0 = U(x)\left[\psi_{+1}^{(1)} + \psi_{-1}^{(1)}\right], \quad (7)$$

$$\tilde\psi_{\pm2}'' + p_{\pm2}^2\tilde\psi_{\pm2} = U(x)\psi_{\pm1}^{(1)}, \quad (8)$$

$$\tilde\psi_{\pm1}'' + p_{\pm1}^2\tilde\psi_{\pm1} = U(x)\left[\tilde\psi_0 + \tilde\psi_{\pm2}\right]. \quad (9)$$

Граничные условия получаем, следуя [9]:

$$\psi_0^{(0)}(0)(1-\beta) + \frac{\psi_0^{(0)\prime}(0)}{ip} = q,$$

$$\begin{aligned} &\psi_0^{(0)}(a)(1-\beta) - \frac{\psi_0^{(0)\prime}(a)}{ip} = 0, \quad \beta = \frac{\alpha}{ip}, \\ &\psi_n^{(1)}(0)(1-\beta_n) + \frac{\psi_n^{(1)\prime}(0)}{ip_n} = 0, \\ &\psi_n^{(1)}(a)(1-\beta_n) - \frac{\psi_n^{(1)\prime}(a)}{ip_n} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\tilde\psi_n(0)(1-\beta_n) + \frac{\tilde\psi_n'(0)}{ip_n} = 0, \\ &\tilde\psi_n(a)(1-\beta_n) - \frac{\tilde\psi_n'(a)}{ip_n} = 0, \quad \beta_n = \frac{\alpha}{ip_n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия (10), (11) описывают поток электронов слева, их отражение и уход в область $x > a$.

Токи I_0 и $I_c(x)$ можно выразить через парциальные волновые функции:

$$I_0 = -ie\left[\psi_0^*\psi_0' - \psi_0(\psi_0^*)'\right], \quad (12)$$

$$I_c(x) = \left(I_1^{(1)}(x) + I_{-1}^{(1)}(x)\right) + (I_{101}(x) + I_{-101}(x)) + (I_{102}(x) + I_{-102}(x)) + (I_2(x) + I_{-2}(x)), \quad (13)$$

где

$$I_n^{(1)} = -ie\left[\left(\psi_0^* \psi_n^{(1)\prime} + \psi_0' \psi_n^{(1)*}\right) - \text{c.c.}\right], \quad (14)$$

$$I_{\pm 101} = -ie\left[\left(\psi_0^{(0)*} \tilde{\psi}_{\pm 1}' + \tilde{\psi}_{\pm 1}^* \psi_0^{(0)\prime}\right) - \text{c.c.}\right], \quad (15)$$

$$I_{\pm 102} = -ie\left[\left(\tilde{\psi}_0^* \psi_{\pm 1}^{(1)\prime} + \psi_{\pm 1}^{(1)} \tilde{\psi}_0'\right) - \text{c.c.}\right], \quad (16)$$

$$I_{\pm 2} = -ie\left[\left(\psi_{\pm 1}^{(1)*} \tilde{\psi}_{\pm 2}' + \tilde{\psi}_{\pm 2}^* \psi_{\pm 1}^{(1)\prime}\right) - \text{c.c.}\right]. \quad (17)$$

Здесь I_0 — постоянный ток, $I_n^{(1)}$ — линейный ток. Нелинейные токи I_{101} и I_{102} описывают переходы между уровнями с энергиями ε_0 и $\varepsilon_0 \pm \omega$, а I_2 — между уровнями с энергиями $\varepsilon_0 \pm \omega$ и $\varepsilon_0 \pm 2\omega$.

3. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Волновые функции $\psi_n^{(1)}$ и линейные по полю токи $I_c(x)$ и $I_s(x)$ были найдены в работе [9]. Выражения для токов удалось привести к простым и наглядным выражениям, используя естественные для РТД малые параметры ω/ε_R и Γ/ε_R. В этом разделе мы получим основные результаты работы [9] более простым способом, позволящим исключить расходящиеся при $\omega \to 0$ члены. Новый способ позволяет также найти нелинейные поправки любого порядка. Решение системы (6)–(11) имеет вид

$$\begin{gathered}
\psi_0^{(0)}(x) = A\exp(-px) + B\exp(-ipx) \equiv \\
\equiv \gamma_0 \cos(px) + i\delta_0 \sin(px), \\
\Delta_0 A = q(2-\beta)\exp(-2ipa), \quad \Delta_0 B = q\beta, \\
\Delta_0 \approx \frac{4}{\Gamma}(i\delta - \Gamma), \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon_R, \quad \Gamma = \frac{4p^3}{\alpha^2 a},
\end{gathered} \quad (18)$$

$$\begin{gathered}
\psi_n^{(1)} = A_n \exp(ip_n x) + B_n \exp(-ip_n x) - \\
- \frac{Ux}{\omega_n}\psi_0 - \frac{2U}{\omega^2}\psi_0', \\
\Delta_n A_n = q_n(2-\beta_n)\exp(-2ip_n a) + \beta_n \tilde{q}_n, \\
\Delta_n B_n = \beta_n q_n + (2-\beta_n)\tilde{q}_n, \quad \omega_n = -n\omega, \\
\Delta_n = \frac{4}{\Gamma}\left[i(\delta + n\omega) - \Gamma\right],
\end{gathered} \quad (19)$$

$$q_n = \frac{2Uip}{\omega_n^2}\left[A(2-\beta_n) + \beta_n B\right],$$

$$\tilde{q}_n = -\frac{2Uip}{\omega_n^2}\exp\left[i(p-p_n)a\right] \times \left[\beta_n A + (2-\beta_n)B\exp(-2ip_n a)\right]. \quad (20)$$

В работе [9] было показано, что величины

$$\gamma_n = A_n + B_n, \quad \delta_n = A_n - B_n \quad (21)$$

можно разбить на два слагаемых,

$$\gamma_n = \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}, \quad \delta_n = \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}, \quad (22)$$

выделяя расходящиеся при $\omega \to 0$ члены в слагаемые $\gamma_n^{(1)}$, $\delta_n^{(1)}$. Выражения для этих величин имеют вид

$$\gamma_n^{(1)} = \frac{2Uip}{\omega_n^2}\delta_0, \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2Uip}{\omega_n^2}\gamma_0, \quad (23)$$

$$\begin{gathered}
\gamma_n^{(2)} = -\frac{U\alpha A a^2}{p^2 \Delta_n} = -\frac{4iUa}{\Gamma \Delta_0 \Delta_n}, \\
\delta_n^{(2)} = (\beta_n - 1)\gamma_n^{(2)}.
\end{gathered} \quad (24)$$

Далее в [9] ток вычислялся с помощью функций $\psi_0^{(0)}$ и $\psi_n^{(1)}$. Были получены следующие выражения:

$$I_0 = \frac{\Gamma^2 Q}{\Gamma^2 + \delta^2}, \quad (25)$$

$$I_n^{(1)}(x) = ep\left\{\left(K_n^{(1)} + \text{c.c.}\right)\cos\left[(p-p_n)x\right] - - i\left(F_n^{(1)} - \text{c.c.}\right)\sin\left[(p-p_n)x\right]\right\}, \quad (26)$$

$$K_n^{(1)} = \delta_0^* \gamma_n + \gamma_0^* \delta_n, \quad F_n = \delta_0^* \delta_n + \gamma_0^* \gamma_n,$$

$$I_c^{(1)}(x) \approx \frac{Ua\Gamma^2 \delta Q}{(\delta^2 + \Gamma^2)\left[\Gamma^2 + (\delta+\omega)^2\right]\left[\Gamma^2 + (\delta-\omega)^2\right]} \times \left[(\delta^2 + \omega^2 + \Gamma^2) - \omega^2 \frac{2x}{a}\right], \quad Q = q^2 p. \quad (27)$$

Далее, кроме разд. 10, будем полагать $Q = 1$. Компенсация расходящихся членов в токе является довольно сложной операцией, для нелинейных поправок она становится еще более сложной и трудно контролируемой. Однако в [10] было показано, что вид функции $\psi_n^{(1)}$ можно существенно упростить, если провести компенсацию расходящихся при $\omega \to 0$ членов. Для этого используем разбиение (22), а функции $\cos(p_n x)$ и $\sin(p_n x)$ при $\gamma_n^{(1)}$ и $\delta_n^{(1)}$ разложим в ряд по $\omega/p^2 \ll 1$. В результате вместо (19) получаем

$$\psi_n^{(1)} = \gamma_n^{(2)}\cos(p_n x) + i\delta_n^{(2)}\sin(p_n x). \quad (28)$$

Подставляя (28) и (18) в (14), приходим к (27) гораздо более простым путем.

Из выражения (27) видно, что высокочастотный ток зависит от координаты, причем линейным образом ввиду малости параметра ω/ε_R. Важно подчеркнуть, что токи $I_c(0)$, $I_c(a)$ и приведенный ток I_c, определяющий усиление в РТД, имеют принципиально различающиеся частотные зависимости:

$$I_c(0) = I_c \frac{\delta^2 + \Gamma^2 + \omega^2}{\delta^2 + \Gamma^2}, \tag{29}$$

$$I_c(a) = I_c \frac{\delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2}{\delta^2 + \Gamma^2}, \tag{30}$$

$$I_c = \frac{1}{a} \int_0^a I_c(x)\,dx = \\ = \frac{Ua\Gamma^2\delta}{[\Gamma^2 + (\delta+\omega)^2]\,[\Gamma^2 + (\delta-\omega)^2]}. \tag{31}$$

В выражениях (29)–(31) присутствуют одинаковые резонансные знаменатели, при этом существенно разные числители отражают конкуренцию вкладов излучательных переходов между электронными состояниями (см. подробнее [10]). В частности, числитель коллекторного тока $I_c(a)$ резко уменьшается при выполнении условия резонанса, $\omega = \delta$. Более того, $I_c(a)$ меняет знак при $\omega > \sqrt{\delta^2 + \Gamma^2}$ и не имеет максимума (резонанса) при частоте $\omega \approx \delta$. Причиной такого поведения тока $I_c(a)$ является отсутствие конструктивной интерференции вне квантовой ямы. Следует отметить, что в работах [5, 6, 8] вычислялся только коллекторный ток. Полученные там результаты послужили основанием для утверждения, что существует предельная частота генерации, примерно равная Γ (см. [8]).

Как следует из (27) и (31), внутри квантовой ямы ток $I_c(x)$ и, в частности, приведенный ток $I_c \equiv I_c(a/2)$ (определяющий усиление и генерацию переменного поля в РТД) не меняют знака во всем интервале частот и имеют два максимума: при $\omega = 0$ («классический режим») и $\omega^2 = \delta^2 + \Gamma^2$ («квантовый режим»). Именно последний соответствует резонансному туннелированию в переменном поле.

Таким образом, правильный учет координатной зависимости, отражающей интерференционные явления в переменном поле, является принципиальным. Сам факт такой зависимости следует из уравнения непрерывности

$$I_c(0) - I_c(a) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a |\psi|^2 dx. \tag{32}$$

С помощью (28) и (18) нетрудно показать, что соотношение (32) в точности выполняется:

$$I_c^{(1)}(0) - I_c^{(1)}(a) = \frac{2\omega^2}{\delta^2 + \Gamma^2} I_c^{(1)}. \tag{33}$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПРАВКИ В ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Представление волновой функции $\psi_n^{(1)}$ в виде суммы двух слагаемых с перенормированными коэффициентами позволяет развить подход, удобный для нахождения нелинейных поправок. Начнем с отыскания функции $\tilde{\psi}_2$. Уравнение (8) и граничные условия (11) формально совпадают с соответствующими для $\psi_n^{(1)}$, если в правой части заменить $\psi_0^{(0)}$ на $\psi_1^{(1)}$. Решение уравнения (8) имеет вид

$$\tilde{\psi}_2 = A_2 \exp(ip_2x) + B_2 \exp(-ip_2x) + \\ + \frac{Ux}{\omega_{21}} \psi_1^{(1)} - \frac{2U}{\omega_{21}^2} \psi_1^{(1)\prime}, \\ \omega_{21} = p_1^2 - p_2^2 = -\omega, \tag{34}$$

причем коэффициенты A_2, B_2 удовлетворяют системе уравнений

$$A_2(2-\beta_2) - \beta_2 B_2 = q_2 \equiv \\ \equiv \frac{2Uip_1}{\omega_{21}^2}\left[A_1(2-\beta_2) + \beta_2 B_1\right], \\ -A_2\beta_2 + (2-\beta_2)B_2 \exp(-2ip_2a) = \tilde{q}_2 \equiv \\ \equiv -\frac{2Uip_1}{\omega_{21}^2}\left[A_1\beta_2 + (2-\beta_2)B_1 \exp(-2ip_1a)\right] \times \\ \times \exp\left[i(p_1 - p_2)a\right]. \tag{35}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям для $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$ с той лишь разницей, что в правой части следует сделать замены $p \to p_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$. Поэтому можно снова провести процедуру выделения и компенсации расходящихся выражений γ_2 и δ_2. В результате $\tilde{\psi}_2$ принимает вид

$$\tilde{\psi}_2 = \tilde{\gamma}_2 \cos(p_2x) + i\tilde{\delta}_2 \sin(p_2x), \tag{36}$$

$$\tilde{\delta}_2 = \tilde{\gamma}_2(\beta_2 - 1), \quad \tilde{\gamma}_2 = -\frac{U\alpha A_1 a^2}{p_1^2 \Delta_2}, \\ A_1 = \frac{\beta_1}{2}\gamma_1^{(2)}. \tag{37}$$

Подставляя A_1, $\gamma_1^{(2)}$ в $\tilde{\gamma}_2$, окончательно имеем

$$\tilde{\gamma}_2 = 8\left(\frac{Ua}{\Gamma}\right)^2 \frac{1}{\Delta_0\Delta_1\Delta_2}. \tag{38}$$

Поступая аналогичным образом, получаем

$$\tilde{\psi}_{-2} = \gamma_{-2}\cos(p_{-2}x) + i\delta_{-2}\sin(p_{-2}x), \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\delta}_{-2} = \tilde{\gamma}_{-2}(\beta_{-2} - 1), \\ &\tilde{\gamma}_{-2} = 8\left(\frac{Ua}{\Gamma}\right)^2 \frac{1}{\Delta_0\Delta_{-1}\Delta_{-2}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Задача для $\tilde{\psi}_0$ также сводится формально к предыдущей, если искать решение в виде суммы

$$\tilde{\psi}_0 = \tilde{\psi}_{01} + \tilde{\psi}_{0-1}.$$

При этом в правой части $\tilde{\psi}_{01}$ соответствует $\psi_{+1}^{(1)}$, а $\tilde{\psi}_{0-1}$ — $\psi_{-1}^{(1)}$. В результате находим

$$\tilde{\psi}_0 = \gamma_0\cos(px) + i\delta_0\sin(px), \tag{41}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\delta}_0 = \tilde{\gamma}_0(\beta - 1), \\ &\tilde{\gamma}_0 = 8\left(\frac{Ua}{\Gamma}\right)^2 \frac{1}{\Delta_0^2}\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_{-1}}\right). \end{aligned} \tag{42}$$

Поступая в точности аналогично задаче с $\tilde{\psi}_0$, получаем выражения для $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_{-1}$:

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{\gamma}_1\cos(p_1x) + i\tilde{\delta}_1\sin(p_1x), \quad \tilde{\delta}_1 = \tilde{\gamma}_1(\beta - 1), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 = 16i\left(\frac{Ua}{\Gamma}\right)^3 \frac{1}{\Delta_0\Delta_1} \times \\ \times\left(\frac{1}{\Delta_0\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_0\Delta_{-1}} + \frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\right), \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_{-1} = \tilde{\gamma}_{-1}\cos(p_{-1}x) + i\tilde{\delta}_{-1}\sin(p_{-1}x), \\ &\tilde{\delta}_{-1} = \tilde{\gamma}_{-1}(\beta_{-1} - 1), \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{-1} = 16i\left(\frac{Ua}{\Gamma}\right)^3 \frac{1}{\Delta_0\Delta_{-1}} \times \\ \times\left(\frac{1}{\Delta_0\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_0\Delta_{-1}} + \frac{1}{\Delta_{-1}\Delta_{-2}}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

В принципе нетрудно найти поправки любого порядка. Важно также отметить, что все поправки в волновой функции конечны при $\omega \to 0$.

5. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ввиду громоздкости получаемых выражений будем искать вклады в $I_c^{(3)}(x)$ по отдельности. Кроме того, это позволяет выявить физический смысл каждого из вкладов. Начнем с тока $I_2(x)$. Подставляя $\tilde{\psi}_2$ в (17), представим $I_2(x)$ в форме

$$\begin{aligned} I_2(x) = ep\Big\{\left(\tilde{K}_n + \text{c.c.}\right)\cos\left[(p_1 - p_2)x\right] - \\ - i\left(\tilde{F}_2 - \text{c.c.}\right)\sin\left[(p_1 - p_2)x\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{47}$$

аналогичной линейному току (26). Здесь и далее введены обозначения

$$\tilde{K}_2 = \delta_1^*\tilde{\gamma}_2 + \gamma_1^*\tilde{\delta}_2, \quad \tilde{F}_2 = \delta_1^*\tilde{\delta}_2 + \gamma_1^*\tilde{\gamma}_2.$$

Используя (37) и (38), находим ток $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \Phi_2(\omega)\left[(\delta + 2\omega) - \omega\frac{x}{a}\right], \quad I_{-2}(x) = I_2(x, -\omega),$$

$$\Phi_2(\omega) = -\frac{(Ua)^3\Gamma^2}{8(\delta^2 + \Gamma^2)\left[\Gamma^2 + (\delta + \omega)^2\right]\left[\Gamma^2 + (\delta + 2\omega)^2\right]}. \tag{48}$$

В частности, приведенный ток I_2 и коллекторный ток $I_2(a)$ равны

$$I_2(\omega) = \Phi_2(\omega)\left(\delta + \frac{3}{2}\omega\right), \tag{49}$$

$$I_2(a, \omega) = \Phi_2(\omega)(\delta + \omega). \tag{50}$$

Аналогичным путем найдем следующие выражения для остальных вкладов:

$$I_{101}(x) = \frac{(Ua)^3\Gamma^2}{8(\delta^2 + \Gamma^2)}\Pi(\omega)\left(\delta + \omega\frac{x}{a}\right), \tag{51}$$

$$\begin{aligned} I_{-101}(\omega) = I_{101}(-\omega), \\ \Pi(\omega) = \Pi_1(\omega) + \Pi_2(\omega) + \Pi_3(\omega), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\Pi_1(\omega) = \frac{3\delta^2 - \Gamma^2 + \omega^2 + 4\delta\omega}{(\delta^2 + \Gamma^2)\left[\Gamma^2 + (\delta + \omega)^2\right]^2}, \tag{53}$$

$$\Pi_2(\omega) = \Pi_2(-\omega) = \frac{3\delta^2 - \Gamma^2 - \omega^2}{(\delta^2 + \Gamma^2)\,[\Gamma^2 + (\delta + \omega)^2]\,[\Gamma^2 + (\delta - \omega)^2]}, \tag{54}$$

$$\Pi_3(\omega) = \frac{3\delta^2 - \Gamma^2 + 5\omega^2 + 8\delta\omega}{[\Gamma^2 + (\delta + \omega)^2]^2\,[\Gamma^2 + (\delta + 2\omega)^2]}, \tag{55}$$

$$I_{102}(\omega) + I_{-102}(\omega) = -\frac{(Ua)^3\Gamma^2\delta}{2(\delta^2 + \Gamma^2)\,[\Gamma^2 + (\delta + \omega)^2]\,[\Gamma^2 + (\delta - \omega)^2]}. \tag{56}$$

Значения приведенного, I_{101}, и коллекторного, $I_{101}(a)$, токов даются соответствующими выражениями:

$$I_{101} = \frac{(Ua)^3\Gamma^2\Pi(\omega)(\delta + \omega/2)}{8(\delta^2 + \Gamma^2)}, \tag{57}$$

$$I_{101}(a) = \frac{(Ua)^3\Gamma^2\Pi(\omega)(\delta + \omega)}{8(\delta^2 + \Gamma^2)}. \tag{58}$$

Как видно из (56), сумма $I_{102} + I_{-102}$ не зависит от координат. Полученные формулы решают задачу нахождения нелинейного отклика третьего порядка РТД во всем частотном интервале и для любых координат $0 \le x \le a$.

6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА

Проведем анализ полученных результатов во всем частотном интервале. Вначале рассмотрим низкочастотный предел $\omega \ll \Gamma$, когда зависимость тока от x пропадает. Складывая составляющие тока (51), (56) и (48), находим

$$I_c^{(3)} \approx -\frac{3\delta(Ua)^3\Gamma^2(\Gamma^2 - \delta^2)}{2(\delta^2 + \Gamma^2)^4} \tag{59}$$

или с учетом (27)

$$I_c = \frac{\delta U a \Gamma^2}{(\delta^2 + \Gamma^2)^2}\left[1 - \frac{3(Ua)^2(\Gamma^2 - \delta^2)}{2(\delta^2 + \Gamma^2)^2}\right]. \tag{60}$$

Принципиальным является тот факт, что нелинейная поправка меняет знак при $\delta = \Gamma$. Если $\delta < \Gamma$, то второе слагаемое положительно ($Ua < 0$) и усиление I_c уменьшается с ростом поля. При $\delta > \Gamma$ усиление продолжает расти. Выражение (60) в точности совпадает с выражением, впервые полученным автором в работе [11] другим методом (см. об этом ниже), а также с численными результатами, представленными в работе [12].

Рассмотрим обратный, высокочастотный, предел $\omega \gg \Gamma$. В классическом режиме, когда δ выбирается в максимуме отрицательной дифференциальной проводимости, после громоздких вычислений находим приведенный ток

$$I_c = \frac{Ua\Gamma^2\delta}{\omega^4}\left[1 - 15\left(\frac{U}{4\omega}\right)^2\right], \quad \delta \sim \Gamma \ll \omega. \tag{61}$$

Наибольший интерес представляет поведение приведенного тока в высокочастотном квантовом режиме, когда выполняется условие квазирезонанса $\omega \approx \delta \gg \Gamma$. Из (48), (51) и (56) находим

$$I_c \approx \frac{Ua}{4\omega}\left[1 - \left(\frac{U}{4\omega}\right)^2\right], \quad \delta \approx \omega. \tag{62}$$

Отметим две особенности формулы (62). Во-первых, линейный вклад обратно пропорционален первой степени ω, а не ω^4, как в (61) для классического режима. Таким образом, достигается значительное усиление даже при $\omega \gg \Gamma$. Во-вторых, нелинейный вклад уменьшается с увеличением частоты ($\sim 1/\omega^2$).

Найдем коллекторный ток. Как видно из (30), он меняет знак вблизи резонансной частоты и поэтому чувствителен к точному выбору δ. При $\delta = \omega$ из (48), (51) и (56) имеем

$$I_c(a) \approx \frac{Ua\Gamma^2}{4\omega^3}\left[1 - \frac{(Ua)^2}{6\omega^2}\right], \tag{63}$$

а при $\delta = \sqrt{\omega^2 + \Gamma^2}$ —

$$I_c(a) \approx \frac{Ua\Gamma^2}{2\omega^3}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{Ua}{\omega}\right)^2\right]. \tag{64}$$

Коллекторный ток, так же как и приведенный ток, в классическом режиме (61) резко уменьшается с увеличением частоты ($\sim 1/\omega^3$).

7. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ

Предложенный в разд. 4 метод позволяет найти волновую функцию любого порядка по полю в широком интервале частот с контролируемой точностью. Однако для сильных полей $Ua \gg \Gamma$ такой подход требует суммирования ряда, что представляет значительные трудности. В то же время существует возможность использовать квазиклассическое приближение для нахождения волновых функций в относительно сильном поле $Ua \gg \omega, \Gamma$. Действительно, условия применимости в этом случае даются неравенствами

$$\omega \ll \varepsilon_R, \quad Ua \ll \varepsilon_R, \qquad (65)$$

которые заведомо выполняются для РТД. Квазиклассическое приближение применялось в работах [13, 14] для вычисления волновой функции в коллекторной области $x \geq a$. Однако в наиболее интересной области $0 \leq x \leq a$ волновая функция и ток $I_c(x)$ не были найдены. Следует также отметить, что в [13, 14] использовалась модель квантовой ямы с «квазиклассическими» барьерами, в которой конкретные вычисления исключительно громоздки и применимы только для больших значений номеров резонансных уровней. Поэтому в настоящей работе рассматривается другая модель ямы, а именно, с δ-функциональными барьерами (см. разд. 2). В рамках этой модели задача для туннелирования без поля решается точно, а квазиклассический метод применяется только для переменного поля. При таком подходе проблема граничных условий решается более просто и строго для любых квантовых чисел. Получаемое уравнение для функции туннелирования решается точно. Таким образом, задача резонансного туннелирования в электромагнитном поле с частотой $\omega < \varepsilon_R$ и амплитудой $Ua < \varepsilon_R$ получает полное решение.

Итак, ищем установившее решение уравнения Шредингера (2) в трех областях: 1) $x \leq 0$; 2) $0 \leq x \leq a$, 3) $a \leq x$. Граничные условия для волновых функций $\Psi_1(xt)$, $\Psi_2(xt)$ и $\Psi_3(xt)$ в областях 1, 2 и 3, соответственно, имеют вид

$$\begin{gathered} \Psi_1(0,t) = \Psi_2(0,t), \\ \frac{\partial \Psi_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1(0,t)}{\partial x} = \alpha \Psi_1(0,t), \end{gathered} \qquad (66)$$

$$\begin{gathered} \Psi_3(a,t) = \Psi_2(a,t), \\ \frac{\partial \Psi_3(a,t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2(a,t)}{\partial x} = \alpha \Psi_3(a,t). \end{gathered} \qquad (67)$$

Они учитывают непрерывность и скачок производных волновых функций при $x = 0, a$. Решение в области 2 представим в виде суммы

$$\Psi_2(x,t) = \exp\left\{-i\varepsilon t + ipx + iS_p(xt)\right\} + \\ + \exp\left\{-i\varepsilon t - ipx + iS_{-p}(xt)\right\}. \qquad (68)$$

Первое слагаемое описывает электроны в квантовой яме, двигающиеся в положительном направлении x, второе — в обратном. Пренебрегая в духе квазиклассического приближения вторыми производными от действия $S_{\pm p}(xt)$, приходим к уравнениям [15]

$$\begin{gathered} -\frac{\partial S_p(xt)}{\partial x} = 2p\frac{\partial S_p}{\partial t} + W(x)\cos(\omega t), \\ W(x) = 2U(x), \end{gathered} \qquad (69)$$

$$-\frac{\partial S_{-p}(xt)}{\partial x} = -2p\frac{\partial S_{-p}}{\partial t} + W(x)\cos(\omega t). \qquad (70)$$

Решение уравнения (69) можно записать в форме

$$S_p(xt) = S_p^U(xt) + S_p\left(\frac{x}{2p} - t\right), \qquad (71)$$

$$S_p^U(x,t) = \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{2p}\right)\right\} \times \\ \times \left[-\int^x dx' \frac{W(x')}{4p} \exp\left(\frac{i\omega x'}{xp}\right)\right] + \text{c.c.}, \qquad (72)$$

где S_p^U — неоднородное решение, а $S_p(x/2p - t)$ — решение однородного уравнения. Последнее выбирается так, чтобы удовлетворить граничным условиям (67), (66). Для нахождения S_{-p} следует в (71), (72) заменить p на $-p$.

Выбирая начало отсчета координат в точке $x = a$ и вводя функции туннелирования $f_p(z)$ и $f_{-p}(\tilde{z})$, запишем волновую функцию (68) следующим образом:

$$\Psi_2(x,t) = \exp\left\{-i\varepsilon t + ipx + iS_p^U(xt)\right\} f_p(z) + \\ + \exp\left\{-i\varepsilon t - ipx + iS_p^U(xt)\right\} f_{-p}(\tilde{z}), \qquad (73)$$

$$S_p^U(x,t) = -\frac{1}{4p}\left\{\exp(i\omega z) \times \right. \\ \left. \times \int_a^x W(x')\,dx' \exp\left[-\frac{i\omega(x'-a)}{2p}\right] + \text{c.c.}\right\}, \qquad (74)$$

$$S_{-p}^U(x,t) = \frac{1}{4p}\left\{\exp(i\omega \tilde{z}) \times \right. \\ \left. \times \int_a^x W(x')\,dx' \exp\left[\frac{i\omega(x'-a)}{2p}\right] + \text{c.c.}\right\}, \qquad (75)$$

$$z = \frac{x-a}{2p} - t, \quad \tilde{z} = -\frac{x-a}{2p} - t. \qquad (76)$$

Волновые функции в областях 1 и 3 будем искать в виде

$$\Psi_1(xt) = q\exp(-i\varepsilon t + ipx) + \\ + \exp(-i\varepsilon t - ipx) f_1(\tilde{z}), \qquad (77)$$

$$\Psi_3(xt) = \exp(-i\varepsilon t + ipx) f(z). \quad (78)$$

Первое слагаемое в выражении (77) описывает поток электронов из $x = -\infty$, второе — отражение, характеризующееся функцией $f_1(\tilde{z})$. Функция Ψ_3 характеризует поток по направлению $x = +\infty$ с функцией туннелирования $f(z)$. Из граничных условий (67) при $x = a$ находим

$$f_p(-t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{ip}\right) f(-t), \quad (79)$$

$$f_{-p}(-t) = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{ip}\exp(ipa) f(-t). \quad (80)$$

Исключая функцию $f_1(\tilde{z})$ с помощью граничных условий при $x = 0$ (66) и воспользовавшись равенствами (79), (80), приходим к уравнению со сдвинутыми аргументами для функции $f(z)$:

$$\left(2 - \frac{\alpha}{ip}\right)^2 \exp\left[iS_p^U\left(-\frac{a}{2p} - t\right)\right] \times \times f\left(-t - \frac{a}{2p}\right) - \left(\frac{\alpha}{ip}\right)^2 \times \times \exp\left[2ipa + iS_{-p}\left(\frac{a}{2p} - t\right)\right] f\left(\frac{a}{2p} - t\right) = 1. \quad (81)$$

Вводя новую функцию

$$F(z) = f(z - T), \quad T = \frac{a}{2p}, \quad (82)$$

получаем уравнение для $F(z)$:

$$\left(2 - \frac{\alpha}{ip}\right)^2 F(z) - - \left(\frac{\alpha}{ip}\right)^2 F(z + 2T)\exp(2ipa) A(z) = Y(z). \quad (83)$$

Здесь введены обозначения

$$A(z) = \exp\left\{i\left[S_{-p}(z + T) - S_p(z - T)\right]\right\}, \quad (84)$$

$$Y(z) = \exp\left\{-iS_p(z - T)\right\}, \quad (85)$$

$$S_p(z) = \frac{1}{4p}\left\{\exp(i\omega z) \times \times \int\limits_0^a W(x')\,dx' \exp\left[-\frac{i\omega(x' - a)}{2p}\right] + \text{c.c.}\right\}. \quad (86)$$

Уравнение (83) допускает точное решение. Следуя подходу, использованному в работах [13, 14], ищем решение уравнения (83) в виде

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \qquad \Phi_k = \exp(-ikz\omega)\Phi_0(z), \quad (87)$$

где $\Phi_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_0(z) = \Phi_0(z + 2T) A(z). \quad (88)$$

Подставляя $F(z)$ из (87) в (83) и интегрируя по z с $\exp(ikz\omega)$, находим коэффициенты разложения c_k:

$$c_k = \frac{Y_k}{\Delta_k}, \quad Y_k = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} \frac{Y(z)\exp(ik\omega z)\,dz}{\Phi_0(z)}, \quad (89)$$

$$\Delta_k = \left(2 - \frac{\alpha}{ip}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{ip}\right)^2 \exp(2ipa - 2ik\omega T). \quad (90)$$

Здесь Δ_k — резонансные определители, которые для сильных барьеров ($\alpha/p \gg 1$) имеют вид (19). Функцию $\Phi_0(z)$ ищем в виде

$$\Phi_0(z) = \exp\left[i\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \exp(i\omega z m)\right]. \quad (91)$$

Подставляя это выражение в (88) и находя коэффициенты b_m, получаем

$$\Phi_0(z) = \exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\omega z)\frac{\omega}{2\pi} \times \times \int\limits_0^{2\pi/\omega} \frac{\exp(im\omega z')\ln A(z')\,dz'}{1 - \exp(2in\omega T)}\right\}. \quad (92)$$

Воспользовавшись выражением для $A(z)$ из (84), приходим к точному результату:

$$\Phi_0(z) = \exp\left\{-\frac{i}{2p}\int\limits_0^a W(x)\,dx \times \times \cos\frac{\omega x}{2p}\left[\frac{\exp(i\omega z)}{1 - \exp(2i\omega T)} + \text{c.c.}\right]\right\}. \quad (93)$$

Для дальнейшего важно отметить, что квадрат модуля $\Phi_0(z)$ равен единице. Приближенно для интересующего нас случая $\omega T \approx \omega/\varepsilon_R \ll 1$ из (93) можно получить

$$\Phi_0(z) \approx \exp\left[i\frac{\overline{W}}{\omega}\sin(\omega z)\right], \qquad \overline{W} = \frac{1}{a}\int\limits_0^a W(x)\,dx = Ua. \quad (94)$$

Наконец, подставляя в (89) выражение для $\Phi_0(z)$ (93), находим фурье-компоненту Y_k с точностью до членов $(\omega T)^2$:

$$Y_k \approx J_k\left(\frac{\overline{W}}{\omega}\right), \quad (95)$$

где J_k — функция Бесселя. Собирая результаты, записываем $F(z)$ в виде ряда,

$$F(z) = \Phi_0(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik\omega z) J_k\left(\dfrac{\overline{W}}{\omega}\right)}{\Delta_k(\omega)}, \qquad (96)$$

или в интегральном представлении,

$$F(z) = \Phi_0(z) \exp\left[(\Gamma + i\delta) z\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{-z} dz' \exp\left[(\Gamma + i\delta)\, z' + \frac{i\overline{W}}{\omega} \sin(\omega z)\right]. \qquad (97)$$

Выражение (97) аналогично найденному в работе [14] для $f(z)$ при $x \geq a$, хотя значения величин Γ, δ и $\overline{W}$ различны для разных моделей.

8. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ

Воспользовавшись волновой функцией (73), найдем ток в области $0 \leq x \leq a$:

$$I(x,t) = 4\left[|f_p(z)|^2 - |f_{-p}(\tilde{z})|^2\right], \qquad (98)$$

опуская малые члены ω/ε_R и Ua/ε_R в рамках точности квазиклассического приближения. Подставляя в (98) f_p и f_{-p} из (79) и (80), выражаем ток через функции туннелирования $f(z)$ и $f(\tilde{z})$:

$$I(x,t) = |f(z)|^2 + \frac{\alpha^2}{4p^2}\left[|f(z)|^2 - |f(\tilde{z})|^2\right]. \qquad (99)$$

Первое слагаемое дает вклад в ток, слабо зависящий от координат, так как координатная поправка в $f(z)$ пропорциональна малой величине

$$\omega\frac{x-a}{2p} \approx \frac{\omega}{\varepsilon_R}.$$

Второе слагаемое также пропорционально $\omega(x-a)/2p$, но умножается на большой множитель $(\alpha/p)^2$, возникающий из-за конструктивной интерференции электронов в яме. Именно это слагаемое обеспечивает эффективное резонансное туннелирование (квантовый режим) и приводит к координатной зависимости.

Квадрат модуля $|f(z)|^2$ удобно представить в следующей форме (имея в виду, что $|\Phi_0(z)|^2 = 1$):

$$|f(z)|^2 = \Gamma^2 \int_0^\infty d\tau_1 \exp\left[-(\Gamma - i\delta)\tau_1\right] \times \\ \times \int_0^\infty d\tau_2 \exp\left[-(\Gamma + i\delta)\tau_2\right] \times \\ \times \exp\left[iA\sin(\omega z) + iB\cos(\omega z)\right], \qquad (100)$$

$$A = \frac{\overline{W}}{\omega}\left[\cos(\omega\tau_2) - \cos(\omega\tau_1)\right], \\ B = \frac{\overline{W}}{\omega}\left[\sin(\omega\tau_2) - \sin(\omega\tau_1)\right]. \qquad (101)$$

Отметим, что мы опустили в выражении для $f(z)$ добавку к z, пропорциональную T. Это не изменит окончательного результата, так как в первом слагаемом правой части формулы (99) T является малой поправкой, а в разности второго слагаемого добавка T сокращается.

Поскольку нас интересует вклад в ток, пропорциональный $\cos(\omega t)$, удобно сразу выделить его с помощью фурье-преобразования:

$$I_c(x) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) I(xt)\, dt. \qquad (102)$$

Используя формулу

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \exp(i\omega k t) \times \\ \times \exp\left[\exp(i\omega t)a^+ + \exp(-i\omega t)a^-\right] = \\ = (i)^k \left(\frac{a^+}{a^-}\right)^{k/2} J_k\left(2(a^+a^-)^{1/2}\right), \qquad (103)$$

приходим к следующему выражению для тока:

$$I_c(x) = 8i\Gamma^2 \int_0^\infty d\tau_1 \exp\left[-(\Gamma - i\delta)\tau_1\right] \times \\ \times \int_0^\infty d\tau_2 \exp\left[-(\Gamma + i\delta)\tau_2\right] \times \\ \times J_1\left(\frac{2\overline{W}}{\omega}\sin\left[\omega\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right]\right) \times \\ \times \left\{\cos\left[\omega\frac{\tau_2+\tau_1}{2}\right] + \frac{a-x}{a}\,\frac{\omega}{\Gamma}\sin\left[\omega\frac{\tau_2+\tau_1}{2}\right]\right\}. \qquad (104)$$

Второе слагаемое в (104) происходит от разности в (99) и является определяющим. Если в (104) ввести новую переменную $t = \tau_2 - \tau_1$ и проинтегрировать по τ_1, получаем окончательное выражение для тока внутри квантовой ямы $0 \le x \le a$:

$$I_c(x) = \frac{4\Gamma^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2} \int_0^\infty dt\, \exp(-\Gamma t) \times \\ \times J_1\left(\frac{2\overline{W}}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\right)\sin(\delta t) \times \\ \times \left[\left(2\Gamma\cos\frac{\omega t}{2} - \omega\sin\frac{\omega t}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{a-x}{a}\,\frac{\omega}{T}\left(\omega\cos\frac{\omega t}{2} + 2\Gamma\sin\frac{\omega t}{2}\right)\right]. \quad (105)$$

Выражение для приведенного тока принимает более простой вид:

$$I_c = 2\Gamma\int_0^\infty dt\, \exp(-\Gamma t) J_1\left(\frac{2\overline{W}}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\right) \times \\ \times \sin(\delta t)\cos\frac{\omega t}{2}. \quad (106)$$

Выражения для токов $I_c(x)$ (105) и I_c (106) справедливы в широком интервале частот ($\omega < \varepsilon_R$) и амплитуд полей ($Ua < \varepsilon_R$) и дают полное решение задачи о резонансном туннелировании в переменном поле. Они позволяют построить теорию генерации РТД, найти предельно достижимые токи и мощности. Выражения (105) и (106) учитывают вклады всех порядков по полю, т. е. переходы электронов с поглощением и излучением любого количества квантов электромагнитного поля. Из формул (105), (106) вытекают все результаты, найденные ранее в работах [9–11, 14] и др., в настоящей работе (разд. 2, 6), а также результаты, полученные численными методами [12].

Выражение для тока (105) допускает обобщение на случай разных барьеров (см. [10]). Обозначим через α_2 мощность барьера при $x = 0$, а через α_1 — при $x = a$. Тогда следует везде заменить Γ на Γ_{12}, а Γ при $(1 - x/a)$ — на Γ_j, причем

$$\Gamma_j = \frac{4p^3}{a\alpha_j^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Следует отметить, что координатная зависимость остается линейной для любых полей. Это связано с тем, что координата входит с малым параметром ω/ε_R.

Найдем также постоянный ток $I_0(\beta)$ РТД в сильном переменном поле:

$$I_0(\beta) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} I_c(x,t)\,dt.$$

Пользуясь формулой (103), получаем после интегрирования по τ_2

$$I_0(\beta) = \Gamma\int_0^\infty dt\, e^{-\Gamma t} J_0\left(\frac{2\overline{W}}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\right)\cos(\delta t). \quad (107)$$

Нетрудно видеть, что при $U = 0$ формула (107) переходит в (25).

Наконец, найдем реактивный ток $I_s(x)$:

$$I_s(x) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, \sin(\omega t) I(xt) = \\ = \frac{4\Gamma^2}{\omega^2 + 4\Gamma^2}\int_0^\infty dt\, e^{-\Gamma t} J_1\left(\frac{2\overline{W}}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\right)\sin(\delta t) \times \\ \times \left[\left(\omega\cos\frac{\omega t}{2} + 2\Gamma\sin\frac{\omega t}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{a-x}{a}\,\frac{\omega}{\Gamma}\left(2\Gamma\cos\frac{\omega t}{2} - \omega\sin\frac{\omega t}{2}\right)\right]. \quad (108)$$

9. РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ В СИЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯХ

Вначале исследуем предельные случаи и сравним с полученными ранее результатами. Рассмотрим линейное по полю приближение. Разлагая функцию Бесселя, $J_1(x) \approx x/2$, и вычисляя интегралы, из формул (105) и (106) получаем, соответственно, (27) и (31). Видно, что именно второе слагаемое в (105) отвечает за резонансное туннелирование в поле и квантовый режим. Оно исчезает при $x = a$.

Теперь найдем ток в низкочастотном пределе $\omega \ll \Gamma$. Из (105) или (106) следует одинаковый результат,

$$I_c(\overline{W}) = 2\Gamma\int_0^\infty dt\, e^{-\Gamma t} J_1(\overline{W}t)\sin(\delta t),$$

полученный ранее в работе [11]. Следуя [11], представим I_c в виде

$$I_c(\overline{W}) = -\frac{\Gamma}{\sqrt{2}\,\overline{W}}\,\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ x = 1 + \frac{\overline{W}^2(\Gamma^2 - \delta^2)}{(\Gamma^2+\delta^2)^2}, \quad y = \frac{2\overline{W}^2\delta\Gamma}{(\Gamma^2+\delta^2)^2}. \quad (109)$$

При $\overline{W} \to 0$, ток стремится к нулю, причем два первых члена разложения совпадают с (60). В обратном пределе, $Ua \gg \Gamma$, ток уменьшается, оставаясь отрицательным:

$$I_c \approx -\frac{\delta\Gamma}{(\overline{W}a)^2}\,. \tag{110}$$

Таким образом, существует максимум. Нетрудно показать, что он достигается при $\overline{W}a \approx 1.3\Gamma$ и максимальное значение тока равно

$$I_c\left(\overline{W}_m, \omega \to 0\right) \approx -0.33, \tag{111}$$

т. е. составляет треть от постоянного резонансного тока I_0, см. (25). Чтобы провести сравнение формул (105), (106) с результатами, полученными в разд. 6, во всем частотном диапазоне, разложим функцию Бесселя до членов третьего порядка:

$$J_1(y) \approx \frac{y}{2} - \frac{y^3}{16}.$$

Тогда можно показать, что выражение для приведенного тока в точности совпадает с (61) (классический режим) и (62) (квантовый режим). Коллекторный ток в следующем приближении имеет вид

$$\begin{aligned} I_c^{(3)}(a) = \frac{(Ua)^3\Gamma^2}{64\omega^2} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\delta - 2\omega}{[\Gamma^2 + (\delta-\omega)^2][\Gamma^2 + (\delta - 2\omega)^2]} + \right.\right. \\ \left. + \frac{\delta + 2\omega}{[\Gamma^2 + (\delta+\omega)^2][\Gamma^2 + (\delta + 2\omega)^2]} \right] - \\ - \frac{3}{\delta^2 + \Gamma^2}\left[\frac{\delta-\omega}{\Gamma^2 + (\delta-\omega)^2} + \frac{\delta+\omega}{\Gamma^2+(\delta+\omega)^2}\right] + \\ \left. + \frac{4\delta}{[\Gamma^2 + (\delta-\omega)^2][\Gamma^2 + (\delta+\omega)^2]} \right\}. \end{aligned} \tag{112}$$

Сравним (112) с выражениями (50), (56), (58), получаемыми из теории возмущений. Во всех предельных случаях они одинаковы. Так, при $\omega \ll \Gamma$ (112) совпадает с (60), при $\delta = \omega$ — с (63), при $\delta = \sqrt{\omega^2 + \Gamma^2}$ — с (64). Таким образом, оба подхода дают одинаковые результаты.

Теперь перейдем к анализу токов в сильных полях, $\overline{W} \gg \Gamma, \omega$. Наибольший интерес представляет резонансное туннелирование в сильном переменном поле. Полагая в (106) $\omega = \delta \gg \Gamma$ (квантовый режим) и переходя к интегрированию в интервале $0 \le t \le \pi/\omega$, после некоторых вычислений получаем для приведенного тока с точностью до $(\Gamma/\omega)^2$:

$$\begin{aligned} I_c^R(\beta) = \frac{8}{\pi}\int_0^1 z\,dz\sqrt{1-z^2}\,J_1(\beta z) = \\ = \frac{4}{\beta}J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \end{aligned} \tag{113}$$

$$\beta = \frac{2\overline{W}}{\omega} = \frac{Ua}{\omega}.$$

Это один из главных результатов работы. Из (113) следует, что при $\beta \to 0$ ток уменьшается, причем два первых члена разложения по β совпадают с соответствующими членами в формуле (62) из теории возмущений. С ростом β ($Ua \gg \omega$) ток пробегает ряд максимумов с убывающей высотой. Максимумы разделены минимумами, в которых ток обращается в нуль. Обратим внимание, что зависимость $I_c^R(\beta)$ совпадает с распределением интенсивности по направлениям при дифракции Фраунгофера света, падающего на круглое отверстие [16]. Эта аналогия говорит о когерентном характере процессов резонансного туннелирования. Следует также отметить, что максимумы и минимумы появляются, когда импульс, набранный электроном в поле, eE/ω, кратен импульсу квантования в яме, $\hbar/p$.

Найдем оптимальное значение амплитуды переменного поля, при котором достигается первый максимум тока, исходя из уравнения

$$\frac{dI_c^R(z_0)}{dz_0} = 0, \quad J_1(z_0) = 2z_0J_2(z_0), \quad z_0 = \frac{\beta_0}{2}. \tag{114}$$

Решая уравнение, находим $z_0 \approx 1.4$, $U_0a/\omega = 2.8$ и максимальное значение тока

$$I_c^R(z_0) = \frac{2J_1^2(z_0)}{z_0} \approx -0.41. \tag{115}$$

Таким образом, приведенный переменный ток достигает значения, почти равного постоянному резонансному току, $I_0(\delta = 0) = 1$, (см. (25)). Он значительно превосходит приведенный ток в классическом режиме (см. ниже (120)), коллекторный ток и даже несколько больше приведенного низкочастотного тока (111). Следовательно, конструктивная интерференция обеспечивает возможность большого усиления и достижения значительных мощностей генерации на сверхвысоких частотах $\omega \gg \Gamma$.

Представляет интерес сравнить постоянный ток $I_0(\beta)$ в сильном поле и квантовом режиме $\omega = \delta \gg \Gamma$ с I_0 в отсутствие поля. Из формулы (107) находим с точностью до $(\Gamma/\omega)^2$

$$I_0(\beta) \approx J_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \tag{116}$$

При $\beta = \beta_0$ ток $I_0(\beta_0) \approx 0.29$. Видим, что $I_0(\beta)$ значительно превосходит значение постоянного тока при $\beta = 0$ (25) и $\delta = \omega \gg \Gamma$, равное $I_0 = \Gamma^2/\omega^2$. Рост $I_0(\beta)$ обусловлен резонансными излучательными переходами электронов за счет переменного поля. Это непосредственно получается из следующего соотношения, вытекающего из (113) и (116):

$$I_0(\beta) = \frac{\beta}{4} I_c^\beta.$$

Здесь правая часть пропорциональна числу электронов, совершивших излучательные переходы. Поскольку постоянный ток легче измерить экспериментально, это соотношение дает возможность проверки осциллирующей зависимости I_c^R.

Теперь рассмотрим классический режим (нерезонансный), когда $\omega \gg \Gamma, \delta$ и $\delta \sim \Gamma$. В этом случае выражение (106) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} I_c = \frac{2\Gamma}{i\omega} \int\limits_0^1 dz\, J_1(\beta z) \left[\frac{e^{\Delta\varphi} - e^{-\Delta\varphi}}{e^{\Delta} - e^{-\Delta}} - \text{c.c.} \right], \\ \Delta = \frac{\pi(\Gamma - i\delta)}{\omega}, \quad \varphi(z) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin z. \end{gathered} \tag{117}$$

Для высоких частот, $\Delta \ll 1$, имеем

$$I_c = \frac{4\pi^2 \delta \Gamma^2}{3\omega^3} \int\limits_0^1 dz\, J_1(\beta z) \varphi(1 - \varphi^2). \tag{118}$$

Нетрудно убедиться, что при малых полях, $\beta \to 0$, формула (118) дает выражение, в точности совпадающее с (61). В общем случае любых β взять интеграл в (118) затруднительно. Однако можно взять его приближенно, исходя из следующих соображений. Если сравнить интегралы в (113) и в (118), то функции $z\sqrt{1 - z^2}$ и $\varphi(1 - \varphi^2)$ обнаруживают аналогичное поведение. Действительно, они равны нулю при $z = 0$ и $z = 1$ и достигают максимума в интервале $0 < z < 1$. Более того, максимальные значения функций примерно одинаковы. Поэтому приближенно получаем из (118)

$$I_c^{K\Lambda} \approx \frac{4\pi^2 \delta \Gamma^2}{3\omega^3} \, \frac{\pi}{2\beta} \, J_1^2 \left(\frac{\beta}{2} \right). \tag{119}$$

Численное нахождение интеграла в (118) подтверждает (119) с точностью до 10 %. Таким образом, приведенный ток в классическом режиме по сравнению с током в квантовом режиме (113) имеет малость $(\Gamma/\omega)^3$ и в максимуме равен

$$I_c^{K\Lambda}(\beta_0) \approx 0.7 \frac{\delta \Gamma^2}{\omega^3}. \tag{120}$$

Изучим теперь зависимость от β и ω коллекторного тока $I_c(a)$ при $\delta = \omega \gg \Gamma$. Переходя к интегрированию по интервалу $0 < t < \pi/\omega$, после некоторых преобразований и вычисления интегралов получаем

$$\begin{gathered} I_c(a) = \frac{16\Gamma^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{\beta} J_1^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - \varkappa(\beta) \right], \\ \varkappa(\beta) = \int\limits_0^1 dz\, z^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin z \right) J_1(\beta z). \end{gathered} \tag{121}$$

При малых β ток $I_c(a)$ стремится к нулю, причем два первых члена разложения по β совпадают с (63). В обратном пределе, $\beta \gg 1$, ток уменьшается пропорционально $\overline{\overline{W}}^{-2}$:

$$I_c(a) \approx -\frac{2}{\pi} \left(\frac{4\Gamma}{\overline{\overline{W}}} \right)^2. \tag{122}$$

Максимальное значение $I_c(a)$ имеет дополнительную малость $(\Gamma/\omega)^2$ по сравнению с выражением (113).

Таким образом, резонансный характер приведенного тока (и тока в яме $I_c(x)$) в слабом поле (см. (31)) сохраняется и в сильных полях. Резонанс $\omega = \delta$ в коллекторном токе подавляется при любых полях.

10. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОЩНОСТИ ГЕНЕРАЦИИ РЕЗОНАНСНО ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

Найденные выше выражения для тока позволяют построить теорию генерации РТД. Чтобы найти амплитуду стационарного поля, следует подставить приведенный ток в уравнения для поля [9]

$$\frac{E}{2\tau_0} = -\frac{2\pi}{\chi} I_c. \tag{123}$$

Здесь τ_0 — время, характеризующее потери в резонаторе, χ — диэлектрическая постоянная. Мы ограничимся оценкой предельных полей и мощностей генерации. В низкочастотном пределе $\omega \ll \Gamma$, подставляя ток I_c из (110), получаем для $Ua \gg \Gamma$:

$$U_0 a \equiv \frac{\delta\Gamma^2}{(U_0 a)^2} \, \frac{Q}{Q_{th}}, \tag{124}$$

где Q — ток накачки,

$$Q_{th} = \frac{\chi}{4\pi\tau_0 \Gamma a}$$

— пороговый ток. Отсюда находим предельное поле

$$U_0 a \approx \Gamma \left(\frac{Q}{Q_{th}} \right)^{1/3} > \Gamma, \tag{125}$$

ограниченное только допустимыми токами накачки и шириной Γ.

В высокочастотном квантовом режиме получаем из (123) и (113) уравнение для поля

$$\beta^2 = \tilde{q} J_1^2 \left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \tilde{q} = \frac{4\pi\tau_0}{\chi} \frac{a}{\omega}. \tag{126}$$

Амплитуда поля ограничена только допустимым током накачки. Для первого минимума функции $J_1(\beta/2)$, где $\beta/2 = 4$, имеем

$$U_p(\omega)a = 8\omega, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{127}$$

Таким образом, предельное поле в квантовом режиме на частотах $\omega \gg \Gamma$ значительно превосходит предельное поле низкочастотного режима с $\delta \approx \Gamma$,

$$\frac{U_p(\omega)}{U_0(0)} \approx \frac{8\omega}{\Gamma}.$$

Мощность генерации оказывается пропорциональной квадрату частоты и при $\omega = 10^{13}$ с$^{-1}$ может достигать 10^6–10^7 Вт/см^2.

Для сравнения оценим мощность в обычно используемом классическом режиме $\delta \approx \Gamma$, $\omega \gg \Gamma$. Принимая во внимание (119), видим, что при одинаковых Q мощность уменьшается примерно в $(\Gamma/\omega)^3$ раз. Отсюда следует, что мощность падает с ростом частоты пропорционально ω^{-2}, что, по-видимому, и наблюдалось в экспериментальных работах [4]. Таким образом, квантовый режим РТД представляется весьма перспективным для создания генераторов на сверхвысоких частотах $\omega \gg \Gamma$.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электроны с резонансной энергией проходят через симметричную двухбарьерную структуру без отражения, так что резонансный ток достигает максимально возможного значения $I_0(\varepsilon_R) = 1$. Отражение от структуры подавляется деструктивной интерференцией. Большая электронная плотность внутри структуры достигается за счет конструктивной интерференции, когда в яме укладывается кратное число волн де Бройля. Довольно давно возник вопрос (см., например, [8] и ссылки в ней), возможно ли резонансное туннелирование в переменном поле и каковы максимально достижимые переменные токи в зависимости от частоты, амплитуды поля и параметров структуры. В настоящей работе дается достаточно полный ответ. Резонансное туннелирование электронов с энергией $\varepsilon = \varepsilon_R + \omega$, $\omega \gg \Gamma$ реализуется, причем приведенный переменный ток I_c^R достигает очень большого значения, примерно $0.41 I_0(\varepsilon_R)$ при оптимальной амплитуде поля $Ua = 2.8\omega$. Частота поля ограничена только энергией резонансного уровня ε_R и может значительно превосходить ширину резонансного уровня Γ.

При очень сильных полях $Ua \gg \omega$ ток осциллирует с полем, причем максимумы достигаются при условии, что импульс, набираемый электроном в поле, eE/ω, кратен числу полуволн $\hbar/p$, укладывающихся в квантовой яме. Интересно отметить, что зависимость тока I_c^R от Ua/ω в точности совпадает с распределением интенсивности при световой дифракции Фраунгофера. Эта аналогия говорит об интерференции электронов, поглощающих и излучающих фотоны. Возможность достижения больших переменных токов означает, что следует ожидать больших мощностей генерации РТД в режиме резонансного туннелирования. Расчеты показывают, что в этом так называемом «квантовом» режиме, когда энергия (напряжение) выбирается вне области отрицательной дифференциальной проводимости, мощность пропорциональна квадрату частоты и при $\omega = 10^{13}$ с$^{-1}$ равна 10^6–10^7 Вт/см^2.

В то же время в «классическом» режиме ($\delta < \Gamma$, в области отрицательной дифференциальной проводимости) мощность быстро уменьшается с увеличением частоты, а ток имеет малость $(\Gamma/\omega)^3$ по сравнению с резонансным. Подчеркнем, что в известных нам теоретических и экспериментальных работах исследовался «классический» режим.

Полученные в настоящей работе явные и простые выражения для токов (105), (106) содержат все результаты, найденные ранее в работах [9–11, 14], результаты теории возмущений (разд. 2, 6) и численных расчетов [12]. Кроме того, выражения (105), (106) применимы для очень сильных полей, $Ua \gg \omega$, для которых численные расчеты неизвестны. Нам неизвестны также и аналитические работы, где были бы найдены явные выражения для переменных токов в квантовой яме в присутствии сильного поля. Наиболее близкой является работа [14], где, однако, переменные токи не были найдены. Следует отметить, что в работе [16] были выполнены численные расчеты токов РТД в сильном поле, результаты которых качественно согласуются с нашими, однако там был изучен только классический нерезонансный режим.

Что касается линейной теории слабого поля, $Ua \ll \Gamma$, (см. Введение), то детальное сравнение с другими работами было проведено в [9, 10]. Приведем здесь основной вывод.

По нашему мнению, причиной полученных в ряде работ (см., например, [5, 6]) таких результатов, как отсутствие резонансного туннелирования, ограничение по частоте усиления и др., является применение методов, не вполне адекватных задаче. Это либо слишком упрощенное решение уравнения Шредингера [5], либо использование полуфеноменологических методов типа метода туннельного гамильтониана [6]. В то же время корректный учет интерференции и конкуренции среди излучательных переходов между различными пространственными состояниями (см. [10]) необходим для получения правильных результатов. Однако в приближенных подходах эти процессы не могут быть учтены.

Результаты данной работы получены в рамках простой модели. Но следует ожидать, что они останутся, по крайней мере качественно, справедливыми в более реальной трактовке. Это связано с фундаментальным характером явлений, лежащих в основе резонансного туннелирования. Действительно, обобщение модели на введение реальных барьеров, постоянного электрического поля и др., проведенное с помощью численных методов, демонстрирует хорошее совпадение моделей с одинаковой шириной уровней Г.

Автор благодарен Ю. В. Копаеву за стимулирующие обсуждения работы, И. Ю. Катееву и А. И. Подливаеву за проведение численных расчетов и помощь при оформлении работы.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № АО133), при поддержке программы «Физика твердотельных наноструктур» Минпромнауки Российской Федерации (проект № 99-1140) и в рамках проекта «Построение теории взаимодействия сильных электромагнитных полей с электронной системой РТД и лазеров».

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1973).

2. L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **24**, 593 (1974).

3. J. C. L. Sollner, P. E. Tannenwald et al., Appl. Phys. Lett. **45**, 1319 (1984).

4. E. R. Brown, J. R. Södestrom, C. D. Parker et al., Appl. Phys. Lett. **58**, 2291 (1991).

5. H. C. Lju, Phys. Rev. B **43**, 12538 (1991); Erratum **48**, 4977 (1993).

6. M. P. Anatram and S. Datta, Phys. Rev. B **51**, 7632 (1995).

7. R. K. Mains and G. I. Haddad, J. Appl. Phys. **64**, 3564 (1988); **64**, 504 (1988).

8. H. C. Lju and J. C. L. Sollner, Semicond. Semimet. **41**, 359 (1994).

9. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **116**, 704 (1999).

10. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **121**, 925 (2002).

11. V. F. Elesin, Phys. Low-Dim. Struct. **1**/**2**, 55 (2000).

12. В. Ф. Елесин, И. Ю. Катеев, А. И. Подливаев, ФТП **34**, 1373 (2000); УФН **170**(3), 333 (2000).

13. D. Sokolovski and M. Yu. Sumetskij, ТМФ **64**, 233 (1985).

14. D. Sokolovski, Phys. Rev. B **37**, 4201 (1988).

15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, Москва (1960).

16. W.-R. Liu and P. Roblin, IEEE Trans. Electron. Dev. **41**, 1098 (1994).