ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 1 (7), стр. 214–223

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО КОЛЛАПСИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ КРИТИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В РАЗМЕРНОСТИ $D = 2$

Ю. Н. Овчинников*

Max-Planck Institute for Physics of Complex System
D-01187 Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

И. М. Сигал**

Department of Mathematics, University of Toronto,
Ontario, Canada, M5S 3G3

Поступила в редакцию 18 февраля 2003 г.

Получена система из трех уравнений, описывающих коллапс критического нелинейного уравнения Шредингера в размерности $D = 2$. Система уравнений допускает пятипараметрическое семейство решений. Практически всюду, за исключением экспоненциально узкой области вблизи точки коллапса, процессы туннелирования несущественны. Исследована связь начальных данных с условием возникновения коллапса. Найдена сепаратриса, разделяющая области коллапса и области расширения без возникновения особенности на конечном интервале времени.

PACS: 03.65.-w

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера со взаимодействием, соответствующем притяжению,

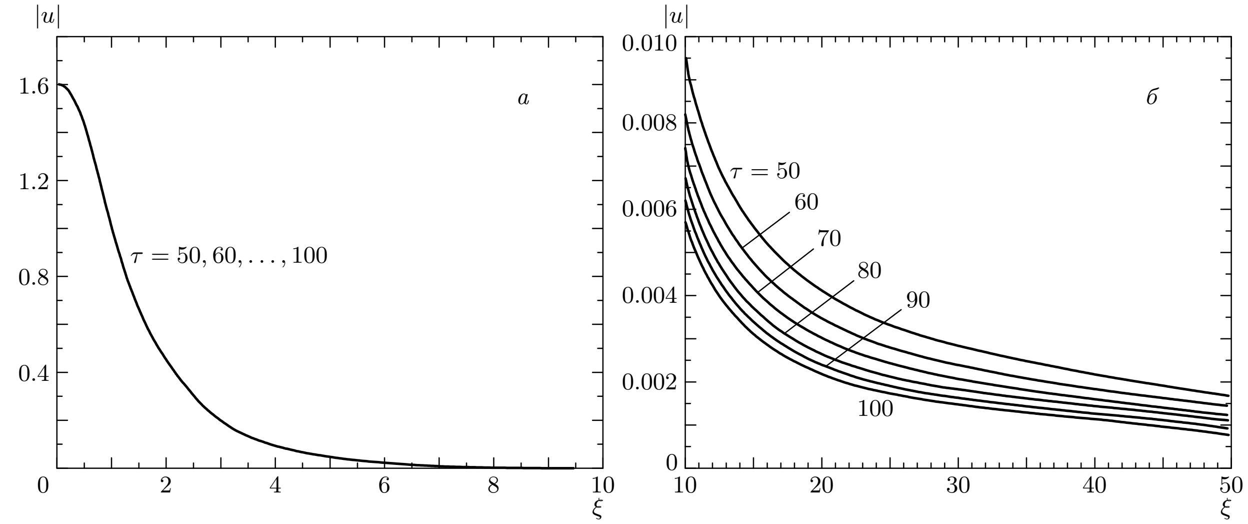
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \qquad (1)$$

рассматривалось во многих работах. Первые результаты о коллапсе были получены в конце шестидесятых–начале семидесятых годов [1–6]. В середине 80-х годов в работе [7] было показано, что задача о коллапсе сводится к задаче о движении частицы в перевернутом параболическом потенциале, возмущенном нелинейностью, и обнаружена важная роль процесса туннелирования. Дальнейший прогресс был достигнут в работах [8–16]. Численное решение уравнения (1) отчетливо демонстрирует наличие «хвоста», вытекающего из-под барьера и убывающего как $1/\xi$ [11, 12] в широкой области вне барьера (см. рисунок). Зависимость от времени параметра сжатия λ в виде двойного логарифма

$$\lambda \sim \left(\frac{t^* - t}{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t^* - t}\right)\right)}\right)^{1/2} \qquad (2)$$

была найдена независимо в работах [7, 9] (см. также [10–15, 17, 18]). При коллапсе происходит инжекция «частиц» в надбарьерную область. Отметим, что никакой поток частиц на конечное физическое расстояние не наблюдается и все инжектируемые в надбарьерную область частицы коллапсируют за конечное время. Связано это с тем, что физический поток через любую фиксированную поверхность всегда направлен к точке коллапса. Таким образом, происходит накопление частиц в надбарьерной коллапсирующей области. Существенно для процесса

*E-mail: ovc@itp.ac.ru
**I. M. Sigal



Эволюция перенормированного профиля в критической размерности $D = 2$, $\sigma = 1$, демонстрирующая медленную временную зависимость на больших расстояниях [12]

коллапса, что энергия надбарьерных частиц стремится к бесконечности, когда t стремится к моменту коллапса t^*

Предположим, что начальное состояние близко к стационарному решению $\tilde{\psi}$ уравнения (1):

$$\Delta\tilde{\psi} + |\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi} = |E_0|\tilde{\psi}. \tag{3}$$

В этом случае возникает малый параметр

$$|\lambda\dot{\lambda}| \ll 1, \tag{4}$$

где $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$.

Наличие малого параметра позволяет найти волновую функцию ψ во всем пространстве, включая надбарьерную область за правой точкой поворота. Уравнение (1) допускает три точных закона сохранения: закон сохранения числа частиц, энергии и «квазиконформный» закон сохранения [19]. Все три уравнения будут использованы для получения замкнутой системы уравнений для величин $\{\lambda, \mu\}$, где величина $\lambda(t)$ — степень сжатия, а параметр $\mu \equiv \mu(t)$ будет определен ниже. Полученная система уравнений допускает пятипараметрическое семейство решений. В этом семействе решений имеется сепаратриса, отделяющая область коллапса от области расширения.

В рассматриваемой задаче имеется бесконечное число скрытых параметров, связанных с тем, что не все частицы участвуют в коллапсе. Способ разбиения начального значения функции ψ на коллапсирующую часть ψ_{col} и ортогональное к ней дополнение $\psi_\perp$ будет указан ниже. Отметим, что зависимости вида (2) реализуются лишь в экспоненциально узкой области в окрестности точки коллапса. Во всей остальной области эта зависимость иная.

2. РАЗБИЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И ВЫДЕЛЕНИЕ КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ ЧАСТИ

Предположим, что волновая функция ψ в начальный момент времени представима в виде, указанном во Введении,

$$\psi = \psi_{col} + \psi_\perp, \tag{5}$$

где функция $\psi_\perp$ мала и достаточно быстро убывает при $|\mathbf{r}| \to 0$. В этом случае функция $\psi_\perp$ удовлетворяет линейному уравнению Шредингера и не влияет на динамику функции ψ_{col}. Функция ψ_{col} определяет две сохраняющиеся при коллапсе величины $\{N_{col}, E_{col}\}$ — число коллапсирующих «частиц» и энергию коллапса.

Предполагая выполненным неравенство (4), представим волновую функцию ψ_{col} в виде

$$\psi_{col} = \left(\frac{1}{\lambda}\tilde{\psi} + \psi_1\right) \times \\ \times \exp\left[i|E_0| \int \frac{dt}{\lambda^2} + \frac{i\lambda\dot{\lambda}x^2}{4} + i\mu\right], \tag{6}$$

где $\lambda \equiv \lambda(t)$, $\mu \equiv \mu(t)$, $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$, $x = |\mathbf{r}|/\lambda$, а функция $\tilde{\psi}$ есть решение стационарного уравнения (3), экспоненциально убывающее на бесконечности

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\psi} = |E_0|\tilde{\psi} - \tilde{\psi}^3. \tag{7}$$

В переменных (x, t) уравнение (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_1 + \tilde{\psi}^2(2\psi_1+\psi_1^*) - \\ - |E_0|\psi_1 + i\lambda^2\,\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + i\lambda\dot{\lambda}\psi_1 + \\ + \lambda^2\psi_1^2\psi_1^* + \lambda\tilde{\psi}(2\psi_1\psi_1^*+\psi_1^2) - \frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4}x^2\psi_1 - \lambda^2\dot{\mu}\psi_1 - \\ - \lambda\dot{\mu}\tilde{\psi} - \frac{\lambda^2\ddot{\lambda}}{4}x^2\tilde{\psi} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Волновая функция ψ_{col} имеет степенные поправки по малому параметру $\lambda\dot{\lambda}$. Эти поправки будут найдены по теории возмущений с помощью уравнения (8). Экспоненциально малые по параметру $|\lambda\dot{\lambda}|$ «хвосты» функции ψ_{col}, связанные с процессами туннелирования в перевернутом параболическом потенциале, будут найдены отдельно. Точные законы сохранения числа частиц, энергии и квазиконформный закон сохранения позволяют получить замкнутую систему уравнений для величин $\{N, E, \lambda, \mu\}$, где $\{N, E\}$ — число частиц и энергия, сосредоточенные в области до правой точки поворота.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ ψ_1

Наличие малого параметра позволяет использовать теорию возмущений. В выражении (6) для функции ψ_{col} разложение начинается с членов второго порядка, поскольку члены первого порядка выделены в фазовый множитель $\exp\left(i\lambda\dot{\lambda}x^2/4\right)$. Представим функцию ψ_1 в виде

$$\psi_1 = \phi + iZ_3 + \phi_4 + iZ_5 + \ldots \tag{9}$$

Из формул (8), (9) находим поправку второго порядка ϕ

$$\phi = \frac{1}{2|E_0|}\lambda\dot{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi}) + \frac{\lambda^2\ddot{\lambda}}{4}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}), \tag{10}$$

где оператор $\hat{L}$ дается выражением

$$\hat{L} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + 3\tilde{\psi}^2 - |E_0|. \tag{11}$$

Поправка третьего порядка Z_3 удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}_2 Z_3 = -\lambda^2\frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda\dot{\lambda}\phi, \tag{12}$$

где оператор $\hat{L}_2$ дается выражением

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \tilde{\psi}^2 - |E_0|. \tag{13}$$

Оператор $\hat{L}_2$ имеет нулевую моду $\tilde{\psi}$. Поэтому уравнение (12) имеет ограниченное решение лишь при выполнении дополнительного условия [20]

$$3\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + \lambda\dddot{\lambda} = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) не является точным и учет следующих членов разложения может привести к его изменению. В рассматриваемом приближении функция Z_3 равна

$$Z_3 = \frac{\nu}{\lambda}\tilde{\psi} - \frac{\lambda x^2}{8|E_0|}\,\tilde{\psi}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda^2\dot{\mu}), \tag{15}$$

где $\nu \equiv \nu(t)$ — функция только от времени t. Поправка четвертого порядка ϕ_4 может быть получена из уравнения (8) с учетом формул (10), (15):

$$\begin{aligned}\phi_4 = {} & \frac{1}{2|E_0|}\lambda\dot{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi}) - \\ & - \frac{\lambda^2}{8|E_0|}(6\lambda\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 2\lambda^2\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^2\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^3\dddot{\mu})\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) + \\ & + \frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4}\hat{L}^{-1}(x^2\phi) + \lambda^2\dot{\mu}\hat{L}^{-1}(\phi) - 3\lambda\hat{L}^{-1}(\tilde{\psi}\phi^2). \end{aligned} \tag{16}$$

4. ЭНЕРГИЯ И ЧИСЛО ЧАСТИЦ

Напомним, что две наиболее важные сохраняющиеся величины в уравнении (1) есть энергия

$$E(\psi) = \int\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2\sigma+2}|\psi|^{2\sigma+2}\right)d\mathbf{r} \tag{17}$$

и число частиц

$$N(\psi) = \int|\psi|^2 d\mathbf{r}. \tag{18}$$

Важную роль играет величина

$$L = \int d\mathbf{r}|\psi|^2\mathbf{r}^2, \tag{19}$$

удовлетворяющая «квазиконформному» закону сохранения [16, 19]

$$\frac{1}{16}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = E. \tag{20}$$

Формулы (6), (9), (10), (15)–(18) позволяют найти число «частиц» N и энергию E, сосредоточенные в коллапсирующей области до правой точки поворота (область за точкой поворота в перевернутом параболическом потенциале будет рассмотрена нами отдельно):

$$N = 2\pi \int_0^\infty dx\, x \left[\tilde{\psi}^2 + 2\lambda\tilde{\psi}(\phi+\phi_4) + \lambda^2\phi^2\right], \qquad (21)$$

$$E = \frac{\pi}{\lambda^2} \times$$
$$\times \int_0^\infty dx\, x \left\{ -2\lambda|E_0|\tilde{\psi}(\phi+\phi_4) - 2\lambda^2\dot{\lambda}Z_3\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi}) + \right.$$
$$\left. + \lambda^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda^2\dot{\lambda}^2x^2}{4}(\tilde{\psi}^2 + 2\lambda\tilde{\psi}\phi) - 3\lambda^2\tilde{\psi}^2\phi^2 \right\}. \qquad (22)$$

Использование формул (П.1), (П.2), (П.3) позволяет обнаружить два важных обстоятельства: в рассматриваемом приближении параметр ν в выражениях (21), (22) выпадает, и величины N, E зависят от μ линейно (квадратичные члены также выпадают). В результате выражения (21) для параметров $\{N, E\}$ приводятся к виду

$$N = 2\pi \int_0^\infty dx\, x \left\{ \tilde{\psi}^2 + \frac{\lambda^3}{8|E_0|^2} \times \right.$$
$$\times\, (6\lambda\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 6\lambda^2\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^2\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^3\,\dddot{\mu})(x\tilde{\psi})^2 -$$
$$-\frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4|E_0|}(x\tilde{\psi})^2 + \left(\frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4}\right)^2 \left[\frac{x^2}{|E_0|}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right)\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) - \right.$$
$$- \frac{3}{|E_0|}\tilde{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right) \times$$
$$\left.\left. \times\, (\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}))^2 + (\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}))^2 \right]\right\}, \qquad (23)$$

$$E = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right)\frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\, x(x\tilde{\psi})^2 +$$
$$+ \pi\int_0^\infty dx\, x \left\{ \left(\frac{\lambda^2\ddot{\lambda}}{4}\right)^2 \left[3\tilde{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right)\left(\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right)^2 - \right.\right.$$
$$- |E_0|\left(\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right)^2 - x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) -$$
$$\left. - x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right)\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) \right] +$$
$$\left. + \frac{\lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda}}{8}x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) \right\}. \qquad (24)$$

Используя формулы (П.4), (П.8), приведем выражения (23), (24) к более компактной форме

$$N - N_{cr} = 2\pi \times$$
$$\times \int_0^\infty dx\, x \left\{ -\frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4|E_0|}(x\tilde{\psi})^2 - \frac{3}{|E_0|}\left(\frac{\lambda^3\ddot{\lambda}}{4}\right)^2 x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^3}{8|E_0|^2}(6\lambda\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 6\lambda^2\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^2\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^3\dddot{\mu})(x\tilde{\psi})^2 \right\}, \qquad (25)$$

$$E = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right)\frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\; x(x\tilde{\psi})^2 +$$
$$+ ((\lambda^2\ddot{\lambda})^2 + \lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda})\frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\, x(x^2\tilde{\psi})\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}), \qquad (26)$$

где величина N_{cr} равна числу частиц в стационарном решении (3)

$$N_{cr} = 2\pi\int_0^\infty dx\, x\tilde{\psi}^2. \qquad (27)$$

Эта величина не зависит от выбора энергии $|E_0|$. Простые преобразования уравнения (23) с использованием уравнения (24) позволяют привести уравнение (23) к виду

$$\frac{|E_0|}{2\lambda^2}\left(N - 2\pi\int_0^\infty dx\, x\tilde{\psi}^2\right) + E = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty dx\, x \left\{ \dot{\lambda}^2(x\tilde{\psi})^2 - \right.$$
$$- \frac{1}{|E_0|}(3\lambda^2\dot{\lambda}^2\dot{\mu} - \lambda^3\ddot{\lambda}\dot{\mu} + \lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\mu})(x\tilde{\psi})^2 -$$
$$- \left(\frac{\lambda^2\ddot{\lambda}}{2}\right)^2 x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) +$$
$$\left. + \frac{\lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda}}{2}x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}) \right\}. \qquad (28)$$

В формулах (25), (26) величины (N, E) — число частиц и энергия, сосредоточенные в коллапсирующей области до правой точки поворота. Процессы туннелирования приводят к несохранению этих величин. Сохраняющимися величинами являются $\{N_{col}, E_{col}\}$, определенные по волновой функции ψ_{col} в начальный момент времени. Для замыкания системы уравнений необходимо найти число частиц и энергию в области за правой точкой поворота.

5. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ В ОБЛАСТИ ЗА ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Для исследования области за точкой поворота представим функцию ψ_{col} в виде

$$\psi_{col} = \frac{1}{\lambda}\hat{\psi}\exp\left[i|E_0|\int\frac{dt}{\lambda^2}+\frac{i\lambda\dot{\lambda}}{4}x^2\right]. \qquad (29)$$

Подставляя выражение (29) в формулу (1), получим уравнение для функции $\hat{\psi}$ в переменных (t,x):

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\psi}+|\hat{\psi}|^2\hat{\psi}-|E_0|\hat{\psi}-\frac{x^2}{4}\lambda^3\ddot{\lambda}\hat{\psi}+i\lambda^2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t}=0. \qquad (30)$$

В существенно нелинейной области функция $|\hat{\psi}|$ близка к $\tilde{\psi}$, а вне этой области нелинейный член мал. С учетом этого замечания уравнение (30) можно записать в виде

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\psi}+\tilde{\psi}^2\hat{\psi}-|E_0|\hat{\psi}+a(\tau)x^2\hat{\psi}+i\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\tau}=0, \qquad (31)$$

где $a(\tau)\equiv-\lambda^3\ddot{\lambda}/4$. Новое время τ связано со временем t соотношением

$$d\tau=\frac{1}{\lambda^2}dt \qquad (32)$$

Уравнение (31) описывает движение двумерной квантовомеханической частицы в поле потенциального барьера $-\tilde{\psi}^2-a(\tau)x^2$.

Как известно из квантовой механики [21], в потенциале такого вида возникает поток частиц, «уходящих» от барьера. Правая точка поворота $x_{t.p.}$ находится из условия равенства потенциальной энергии $a(\tau)x^2$ «полной энергии» $|E_0|$ в уравнении (31) и равна

$$x_{t.p.}=\frac{2\sqrt{|E_0|}}{(-\lambda^3\ddot{\lambda})^{1/2}}. \qquad (33)$$

В окрестности точки поворота в области $x<x_{t.p.}$ волновая функция $\hat{\psi}$ равна

$$\hat{\psi}=\frac{B|E_0|^{1/8}(-\lambda^3\ddot{\lambda})^{1/8}}{\sqrt{2}(x_{t.p.}-x)^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\pi|E_0|}{2\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}+\frac{2}{3}|E_0|^{1/4}(-\lambda^3\ddot{\lambda})^{1/4}(x_{t.p.}-x)^{3/2}\right\}. \qquad (34)$$

Константа B в формуле (34) порядка единицы и может быть найдена из численного решения для функции $\tilde{\psi}$ в области $x_{t.p.}\gg x\gg 1$

$$\tilde{\psi}_{x\gg1}=\frac{B|E_0|^{1/4}}{\sqrt{x}}\ \exp\left(-\sqrt{|E_0|}x\right). \qquad (35)$$

В области за точкой поворота $x>x_{t.p.}$ волновая функция $\hat{\psi}$ определяется выражением

$$\hat{\psi}=\frac{(|E_0|)^{1/4}B}{(x^2-x_{t.p.}^2)^{1/4}}\left(\frac{x_{t.p.}}{x}\right)^{1/2}\times\exp\left\{-\frac{\pi|E_0|}{2\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}+\frac{i\pi}{4}+\frac{ix}{4}(-\lambda^3\ddot{\lambda})^{1/2}(x^2-x_{t.p.}^2)^{1/2}-\frac{i|E_0|}{(-\lambda^3\ddot{\lambda})^{1/2}}\ln\left(\frac{x+(x^2-x_{t.p.}^2)^{1/2}}{x_{t.p.}}\right)\right\}. \qquad (36)$$

Формулы (31), (36) позволяют найти поток частиц J, вылетающих из-под барьера в единицу реального времени t:

$$J=\frac{i}{\lambda^2}2\pi x\left\{\hat{\psi}\frac{\partial\hat{\psi}^*}{\partial x}-\hat{\psi}^*\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}\right\}=\frac{4\pi B^2(|E_0|)}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right). \qquad (37)$$

Частицы, вылетающие из-под барьера, продолжают двигаться к точке коллапса. Полное число частиц в области коллапса сохраняется, а функция $N(t)$, определяемая формулой (25), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-J \qquad (38)$$

с граничным условием в начальный момент времени t_{in}

$$N(t_{in})=N_{col}. \qquad (39)$$

Выражение (36) для волновой функции $\hat{\psi}$ справедливо в области $x<x_{max}$, где x_{max} — максимальное удаление от барьера коллапсирующих частиц.

Формула (36) позволяет найти все физические величины, связанные с существованием надбарьерных частиц за правой точкой поворота. Для числа частиц N_{tail} и энергии ε_{tail}, сосредоточенных в этой области, получаем

$$N_{tail}=2\pi B^2(|E_0|)^{1/2}x_{t.p.}\times\exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right)\ln\left(\frac{2x_{max}}{x_{t.p.}}\right), \qquad (40)$$

$$\varepsilon_{tail} = \frac{\pi}{8\lambda^2} B^2 x_{t.p.}(|E_0|)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right) \times$$
$$\times \left\{ \left(\lambda\dot{\lambda} + \sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}\right)^2 \left(x_{max}^2 - \frac{t_{t.p.}^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + x_{t.p.}^2((\lambda\dot{\lambda})^2 + \lambda^3\ddot{\lambda}) \ln\left(\frac{2x_{max}}{x_{t.p.}}\right) - \lambda\dot{\lambda}\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}} x_{t.p.}^2 \right\}.$$

Для вклада в величину L надбарьерной области за правой точкой поворота L_{tail} находим выражение

$$L_{tail} = \pi\lambda^2 B^2(|E_0|)^{1/2} x_{t.p.} \exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right) \times$$
$$\times \left[\left(x_{max}^2 - \frac{x_{t.p.}^2}{2}\right) + x_{t.p.}^2 \ln\left(\frac{2x_{max}}{x_{t.p.}}\right)\right]. \quad (41)$$

Используя три точных закона сохранения и формулы (25), (26), (40), получим замкнутую систему уравнений для величин λ, μ, в которую входит параметр обрезания x_{max}:

$$N_{col} - N_{cr} = \frac{\gamma_0}{4|E_0|}(-\lambda^3\ddot{\lambda}) - \frac{3\gamma_1}{|E_0|}(\lambda^3\ddot{\lambda})^2 + \frac{\gamma_0\lambda^2}{8|E_0|^2} \times$$
$$\times (6\lambda^2\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 6\lambda^3\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^4\dddot{\mu}) + N_{tail}, \quad (42)$$

$$E_{col} = \frac{\gamma_0}{16}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right) +$$
$$+ \gamma_1[(\lambda^2\ddot{\lambda})^2 + \lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda}] + \varepsilon_{tail},$$

$$E_{col} = \frac{1}{16}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\gamma_0\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right) + 8\gamma_1\lambda^5\ddot{\lambda} + L_{tail}\right\},$$

где константы γ_0, γ_1 определены в Приложении (формула (П.9)). От параметра обрезания x_{max} следует избавиться. Третье из уравнений (42) может быть использовано для этой цели. Интегрируя его, находим

$$\left[E_{col}t^2 + B_1 t + B_0\right] =$$
$$= \frac{\gamma_0}{8}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right) + \gamma_1\lambda^5\ddot{\lambda} + \frac{1}{8}L_{tail}. \quad (43)$$

В формуле (43) величины B_0, B_1 — константы интегрирования. Умножая уравнение (43) на величину $\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sqrt{-\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}}\right)^2$, первое из уравнений (42) умножая на величину

$$\frac{x_{t.p.}^2}{8\lambda^2}\left(\lambda^3\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\lambda}\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}\right)$$

и вычитая оба полученных таким образом уравнения из второго уравнения (42), получим первое уравнение, не содержащее параметра обрезания x_{max}:

$$E_{col} - \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sqrt{-\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}}\right)^2 \left(E_{col}t^2 + B_1 t + B_0\right) +$$
$$+ (N_{col} - N_{cr})\frac{|E_0|}{2\lambda^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{-\lambda\ddot{\lambda}}}\right) =$$
$$= \frac{\gamma_0}{16}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right) + \gamma_1\left[\left(\lambda^2\ddot{\lambda}\right)^2 + \lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda}\right] -$$
$$- \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sqrt{-\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}}\right)^2 \left[\frac{\gamma_0}{8}\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4\dot{\mu}}{|E_0|}\right) + \gamma_1\lambda^5\ddot{\lambda}\right] +$$
$$+ \frac{|E_0|}{2\lambda^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{-\lambda\ddot{\lambda}}}\right)\left[\frac{\gamma_0}{4|E_0|}(-\lambda^3\ddot{\lambda}) - \frac{3\gamma_1}{|E_0|}(\lambda^3\ddot{\lambda})^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_0\lambda^2}{8|E_0|^2}\left(6\lambda^2\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 6\lambda^3\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^4\dddot{\mu}\right)\right] +$$
$$+ \pi B^2|E_0|^2\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^4\ddot{\lambda}}\exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right). \quad (44)$$

Второе уравнение, не содержащее параметр x_{max}, может быть получено дифференцированием первого из уравнений (41) по времени t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\gamma_0}{4|E_0|}(-\lambda^3\ddot{\lambda}) - \frac{3\gamma_1}{|E_0|}(\lambda^3\ddot{\lambda})^2 + \frac{\gamma_0\lambda^2}{8|E_0|^2} \times \right.$$
$$\left. \times (6\lambda^2\dot{\lambda}^2\dot{\mu} + 6\lambda^3\ddot{\lambda}\dot{\mu} + 6\lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\mu} + \lambda^4\dddot{\mu})\right\} +$$
$$+ \frac{4\pi B^2|E_0|}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{\pi|E_0|}{\sqrt{-\lambda^3\ddot{\lambda}}}\right) = 0. \quad (45)$$

Система двух уравнений (44), (45) для величин (λ, μ) описывает весь процесс коллапса (или расширения). Процесс коллапса можно разбить на два этапа. Первый этап занимает практически всю область по времени за исключением экспоненциально узкой окрестности точки коллапса. Второй этап — экспоненциально узкая область окрестности точки коллапса.

6. ПРОЦЕСС КОЛЛАПСА ВНЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УЗКОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ КОЛЛАПСА

В этой области удобно воспользоваться системой уравнений (42), в которой следует опустить слагаемые, связанные с процессом туннелирования

$\{N_{tail}, \varepsilon_{tail}, L_{tail}\}$. Вычитая из второго уравнения (42) третье, получим одно уравнение для величины λ:

$$(\lambda^2\ddot{\lambda})^2 + \lambda^3\dot{\lambda}^2\ddot{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\lambda^5\ddot{\lambda}). \tag{46}$$

Уравнение (46) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}[\lambda(\lambda\dddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}\ddot{\lambda})] + 5\dot{\lambda}(\lambda\dddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}\ddot{\lambda}) = 0. \tag{47}$$

Уравнение (47) легко интегрируется один раз, и в результате получаем

$$\lambda^6[\lambda\dddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}\ddot{\lambda}] = \mathrm{const}. \tag{48}$$

Константа в правой части уравнения (48) может быть только нулем. В результате возникает уравнение, исследованное в работе [20], решение которого есть

$$\lambda^2 = C_1(t_0 - t)^2 + C/C_1, \tag{49}$$

где C, C_1, t_0 — константы интегрирования. Значение константы $C = 0$ соответствует сепаратрисе, отделяющей область коллапса от области расширения.

Величину $\dot{\mu}$ ищем в виде

$$\dot{\mu} = \frac{\alpha|E_0|}{\lambda^2}. \tag{50}$$

Подставляя это значение $\dot{\mu}$ в первое и третье уравнения (42), получим

$$E_{col} = \frac{1}{8}\gamma_0 C_1(1-\alpha) + \gamma_1 C C_1, \tag{51}$$

$$N_{col} - N_{cr} = \frac{\gamma_0 C}{4|E_0|}(-1+2\alpha) - \frac{3\gamma_1}{|E_0|}C^2.$$

Условие разрешимости уравнений (51) накладывает одно ограничение на параметры $\{E_{col}, N_{col} - N_{cr}, C, C_1\}$:

$$\frac{4E_{col}}{C_1} + \frac{|E_0|}{C}(N_{col} - N_{cr}) = \frac{\gamma_0}{4} + \gamma_1 C. \tag{52}$$

Из уравнений (51) находим значение параметра α

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_0}\left\{\gamma_1 C + \frac{2E_{col}}{C_1} + \frac{|E_0|}{C}(N_{col} - N_{cr})\right\}. \tag{53}$$

7. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УЗКАЯ ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ КОЛЛАПСА

В экспоненциально узкой окрестности точки коллапса становятся существенными процессы туннелирования и накопления «частиц» за правой точкой поворота (в области $x > x_{t.p.}$). В этой, а также в переходной области следует пользоваться системой уравнений (44), (45). Решение этой системы уравнений для функций λ, μ ищем в виде

$$\lambda = \frac{\sqrt{t^* - t}}{f}, \quad \dot{\mu} = \frac{\tilde{\chi}|E_0|}{t^* - t}, \tag{54}$$

где t^* — момент коллапса, $f, \tilde{\chi}$ — медленные функции времени. Учитывая медленность изменения функции f, находим

$$\frac{1}{2\lambda^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{-\lambda\ddot{\lambda}}}\right) = -f\dot{f}, \quad \lambda^3\ddot{\lambda} = -\frac{1}{4f^4}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda^2 = \frac{2\dot{f}}{f^3}, \quad \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sqrt{-\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}} = -\frac{\dot{f}}{f}.$$

В окрестности точки перехода второй член в левой части формулы (44) мал. Третий член в левой части формулы (44) может быть убран с помощью замены

$$\tilde{\chi} = -\frac{4|E_0|}{\gamma_0}(N_{col} - N_{cr})f^6 + \chi. \tag{56}$$

В результате система уравнений (44), (45) с помощью формул (55), (56) приводится к виду

$$\frac{\gamma_0}{16}\left\{\frac{\dot{f}}{f^3} + \frac{\dot{\chi}}{f^4} - \frac{2\chi\dot{f}}{f^5}\right\} + \\ + \frac{2\pi B^2|E_0|^2 f^4}{t^* - t}\exp\left(-2\pi|E_0|f^2\right) = 0, \tag{57}$$

$$-\frac{\gamma_0\dot{f}}{4f^5} - \frac{\gamma_0\dot{\chi}}{8f^6} + \frac{3}{4}\frac{\chi\dot{f}}{f^7} + \\ + \frac{4\pi B^2|E_0|^2 f^2}{t^* - t}\exp(-2\pi|E_0|f^2) = 0.$$

Умножая второе из уравнений (57) на величину $f^2/2$ и вычитая его из первого уравнения (57), получим уравнение, не содержащее экспоненциальных членов

$$\dot{\chi} - 4\chi\frac{\dot{f}}{f} + \frac{3}{2}f\dot{f} = 0. \tag{58}$$

Общее решение уравнения (58) есть

$$\chi = \frac{3}{4} f^2 + \tilde{\alpha} f^4, \tag{59}$$

где $\tilde{\alpha}$ — константа.

Подставляя значение (59) для функции χ в первую из формул (57), получим одно уравнение для функции f:

$$\frac{\dot{f}}{f^5} = -\frac{16\pi B^2 |E_0|^2}{\tilde{\alpha}\gamma_0 (t^* - t)} \exp(-2\pi |E_0| f^2). \tag{60}$$

Решая уравнения (60), найдем функцию f:

$$2\pi |E_0| f^2 = \ln\left(\frac{64\pi^2 B^2 |E_0|^3 f^6}{(-\tilde{\alpha})\gamma_0} \ln\left(\frac{1}{t^* - t}\right)\right). \tag{61}$$

Для определения значения константы $\tilde{\alpha}$ в уравнениях (59), (61), необходимо решить систему уравнений (44), (45) в промежуточной области, в которой экспоненциальные члены того же порядка, что и члены, входящие в уравнение (46).

8. РАЗБИЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ НА КОЛЛАПСИРУЮЩУЮ ЧАСТЬ ψ_{col} И ОРТОГОНАЛЬНОЕ К НЕЙ ДОПОЛНЕНИЕ $\psi_\perp$

Предположим, что задана волновая функция ψ в начальный момент времени такая, что она может быть представлена в виде (5), (6):

$$\psi = \psi_{col} + \psi_\perp$$

и норма функции $\psi_\perp$ мала. Отметим, прежде всего, что существуют три свободных параметра: величина $|E_0|$ и координаты (x_0, y_0) точки коллапса. Задав эти величины, построим базис, по которому будет разложена величина ψ_{col} (6). Из формул (9), (10), (15), (16) следует, что базис состоит из функций

$$\tilde{\psi}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi}), \quad \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}), \quad x^2\tilde{\psi}, \tag{62}$$
$$\hat{L}^{-1}(x^2\phi), \quad \hat{L}^{-1}(\phi), \quad \hat{L}^{-1}(\tilde{\psi}\phi^2).$$

Функцию ψ_{col} следует разложить по базису (62). После этого норма функции $\psi_\perp$ должна быть минимизирована по всем свободным параметрам: $|E_0|, (x_0, y_0)$ и коэффициентам разложения функции ψ_{col} по базису (62). Минимизация по свободным параметрам определит положение центра коллапса, величину $|E_0|$ и начальные данные для системы уравнений (44), (45) (с учетом уравнений (43), (49), (50), (51), (53)).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В адиабатическом приближении получена система уравнений, описывающая процесс коллапса во всем временном интервале до особой точки. Практически всюду, за исключением экспоненциально узкой области вблизи точки коллапса, процессы туннелирования в перевернутом параболическом потенциале несущественны. Туннелирование приводит к накоплению частиц в области за правой точкой поворота. Существенно, что энергия частиц в этой области стремится к $+\infty$ при приближении к точке коллапса.

В рассматриваемой задаче имеются три точных закона сохранения: числа частиц, полной энергии, а также «квазиконформный» закон сохранения. Использование квазиконформного закона сохранения позволяет избавиться от расходящихся при приближении к точке коллапса величин, связанных с накоплением частиц в области за правой точкой поворота. В результате возникает система двух уравнений для величин $\{\lambda, \dot{\mu}\}$. При решении этой системы уравнений в окрестности точки коллапса возникает свободный параметр $\tilde{\alpha}$. Значение параметра $\tilde{\alpha}$ определяется условиями сшивки решений в переходной области, в которой все члены в системе уравнений (44), (45) одного порядка. Важной особенностью рассматриваемой задачи является выпадение величины $\dot{\mu}$ из всех уравнений во втором порядке теории возмущений и ее появление лишь в четвертом порядке.

Достаточным условием для коллапса является отрицательное значение энергии E [19]. Если число частиц $N < N_{cr}$, то решение уравнения (1) остается конечным при всяком конечном времени [16]. Существуют коллапсирующие решения при $N = N_{cr}$ и любом значении энергии E>0 [5]. В адиабатическом приближении нами установлена неявная связь начальных данных с условием возникновения коллапса при конечном значении времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и в рамках программы Министерства науки Р Ф. Работа И. М. Сигал выполнена при финансовой поддержке NSERC (грант № A7901).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем, прежде всего, соотношения, которые использованы нами при выводе уравнений для величин $\{N, E, \lambda, \mu\}$. Умножая обе части уравнения (7) на функцию $\partial(x^{2n+1}\psi)/\partial x$ и интегрируя по $x\,dx$ на интервале $(0,\infty)$, получим бесконечное число соотношений для интегралов от функции $\tilde{\psi}$:

$$\int_0^\infty dx\, x\left\{-4n^3x^{2n-2}\tilde{\psi}^2+\right.$$
$$\left.+(4n+2)|E_0|x^{2n}\tilde{\psi}^2-(3n+1)x^{2n}\tilde{\psi}^4\right\}=0, \quad (\text{П}.1)$$

где $n=0,1,2,\ldots$ Часть этих уравнений была получена и использована в работе [20]. Прямой проверкой можно убедиться в справедливости следующих уравнений, которым удовлетворяет функция $\tilde{\psi}$:

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right)\right)=2|E_0|\tilde{\psi}, \quad (\text{П}.2)$$
$$\hat{L}_2\tilde{\psi}=2\tilde{\psi}^3,$$
$$\hat{L}\left(x^2\tilde{\psi}\right)=2x^2\tilde{\psi}^3+4\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right),$$
$$\tilde{L}\left(\tilde{\psi}^3\right)=2|E_0|\tilde{\psi}^3+6\tilde{\psi}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)^2,$$
$$\hat{L}\left(x^2\tilde{\psi}^3\right)=-2\tilde{\psi}^3+2|E_0|x^2\tilde{\psi}^3+6\tilde{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right)\right)^2,$$

где оператор $\hat{L}_1$ дается выражением (11).

Используя уравнения (П.1), (П.2), получим три соотношения:

$$\int_0^\infty dx\, x\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right)\right)^2=\int_0^\infty dx\, x\tilde{\psi}^2-$$
$$-|E_0|\int_0^\infty dx\, x\left(x\tilde{\psi}\right)^2+\int_0^\infty dx\, x\left(x^2\tilde{\psi}^4\right), \quad (\text{П}.3)$$

$$\int_0^\infty dx\, x\tilde{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right)\right)^3=\frac{|E_0|}{3}\int_0^\infty dx\, x\left(x^2\tilde{\psi}^4+\tilde{\psi}^2\right),$$

$$\int_0^\infty dx\, xx^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tilde{\psi}\right)\right)^2=$$
$$=\int_0^\infty dx\, x\left\{5\left(x\tilde{\psi}\right)^2-|E_0|x^4\tilde{\psi}^2+\left(x\tilde{\psi}\right)^4\right\}.$$

Найдем величину I, определяемую выражением

$$I=\int_0^\infty dx\, x\left\{3\tilde{\psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right)\left(\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right)^2-\right.$$
$$\left.-|E_0|(\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi}))^2\right\}. \quad (\text{П}.4)$$

Интегрируя по частям, приведем выражение для I к виду

$$I=-\int_0^\infty dx\, \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\ [(3\tilde{\psi}^2-|E_0|)x^2]\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{L}^{-1}\left(x^2\tilde{\psi}\right)\right). \quad (\text{П}.5)$$

С другой стороны, величина I равна

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\left(\hat{L}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right]-\right.$$
$$\left.-x^2(3\tilde{\psi}^2-|E_0|)\frac{\partial}{\partial x}\ \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right\}. \quad (\text{П}.6)$$

В выражении (П.6) третий член есть полная производная и интеграл от нее равен нулю. В результате величина I определяется выражением

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\times$$
$$\times\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\left[x^2(3\tilde{\psi}^2-|E_0|)\right]\frac{\partial}{\partial x}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\ \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\frac{\partial}{\partial x}(x^4\tilde{\psi}). \quad (\text{П}.7)$$

Из формул (П.5), (П.7) получаем

$$I=\int_0^\infty dx\, \hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\frac{\partial}{\partial x}(x^4\tilde{\psi}). \quad (\text{П}.8)$$

Определим две константы γ_0,γ_1:

$$\gamma_0=2\pi\int_0^\infty dx\, x(x\tilde{\psi})^2, \quad (\text{П}.9)$$

$$\gamma_1=\frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\, x\left\{x^2\tilde{\psi}\hat{L}^{-1}(x^2\tilde{\psi})\right\}.$$

В величинах γ_0,γ_1 можно выделить зависимость от $|E_0|$ и записать их в виде

$$\gamma_0=\frac{1}{|E_|}\gamma_{00},\quad \gamma_1=\frac{1}{|E_0|^3}\gamma_{11}, \quad (\text{П}.10)$$

где величины γ_{00},γ_{11} не зависят от выбора $|E_0|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
2. P. L. Keley, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005 (1965).
3. А. Л. Дышко, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ **6**, 665 (1967).
4. E. Dawes and J. H. Marburger, Phys. Rev. **179**, 862 (1969).
5. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1970).
6. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1746 (1972).
7. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
8. В. Е. Захаров, В. Ф. Швец, Письма в ЖЭТФ **47**, 227 (1988).
9. M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, Phys. Rev. A **38**, 3837 (1988).
10. N. E. Kosmatov, V. F. Shvets, and V. E. Zakharov, Physica D **52**, 16 (1991).
11. B. J. Le Mesurier, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, *The Focusing Singularity of non-linear Schrödinger Equation*, Directions in Partial Differential Equations, ed. by M. G. Grandall, P. H. Rabinovitz, R. E. Tuner, Academic Press (1987), p. 159.
12. Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem, *The nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and wave Collapse*, Springer-Verlag, New York (1999).
13. A. I. Smirnov and G. M. Fraiman, Physica D **52**, 2 (1991).
14. V. M. Malkin, Phys. Lett. A **151**, 285 (1990).
15. D. Pelinovsky, Physica D **119**, 801 (1998).
16. M. I. Weinstein, Commun. Math. Phys. **87**, 567 (1983).
17. G. Perelman, in *Nonlinear Dynamics and Renormalization Group*, ed. by I. M. Sigal and C. Sulem, American Mathematical Society, Providence, 2001, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 27, p. 147.
18. L. Berge, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
19. V. N. Vlasov, I. A. Petrishchev, and V. I. Talanov, Izv. Rad. **14**, 1353 (1971).
20. Ю. Н. Овчинников, И. М. Сигал, Письма в ЖЭТФ **75**, 428 (2002).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).