ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 1 (7), стр. 70–79

РЕЛАКСАЦИЯ ДВУМЕРНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ (ДВУМЕРНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ) В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

С. Ф. Гаранин[*], *О. А. Амеличева*, *О. М. Буренков*, *Г. Г. Иванова*, *В. Н. Софронов*

Российский федеральный ядерный центр,
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
607190, Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 2002 г.

Численно решается задача о магнитогидродинамическом (МГД) движении одиночного вихря поперек магнитного поля в объеме, ограниченном жесткими стенками. Рассматривается случай больших чисел Рейнольдса (а также магнитных чисел Рейнольдса) и небольших чисел Альфвена–Маха M_A. В этом случае МГД-задача сводится к задаче двумерной гидродинамической турбулентности. Показано, что при малых M_A не происходит излучения звука турбулентностью и, таким образом, этот канал диссипации кинетической энергии при малых M_A отсутствует. Расчеты показали, что, как и должно быть для двумерной турбулентности, и в отличие от трехмерной турбулентности, диссипация кинетической энергии происходит за времена порядка L^2/ν (L — характерный размер системы, ν — кинематическая вязкость), что в наших расчетах, в которых вязкость была численной $\nu \sim v\Delta x$ (Δx — размер ячейки сетки), соответствовало временам $\sim (L/\Delta x)(L/v)$. В спектрах кинетической энергии турбулентного движения в ограниченной области в инерционном интервале (промежуточном между энергонесущим и вязким) значения $E(k)$ уменьшаются с ростом волновых чисел k быстрее, чем по закону k^{-3}. Распределение завихренности по объему со временем сужается (уменьшаются характерные значения $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$) и размывается, и при больших временах примерно сохраняет свою форму, а также асимметрию относительно положительных и отрицательных значений, связанную с асимметрией начальных условий.

PACS: 47.27.Ak, 47.27.Eq, 47.65.+a, 52.30.Cv

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные магнитогидродинамические (МГД) течения с движением плазмы поперек магнитного поля играют большую роль во многих динамических плазменных системах с замагниченной плазмой. В качестве примера можно привести систему МАГО (магнитное обжатие) [1–3], которая представляет собой подход для достижения управляемого синтеза, состоящий из двух стадий.

1. Вначале с помощью специальной тороидальной камеры МАГО, состоящей из двух отсеков, соединенных узким кольцевым соплом, (рис. 1), в отсе-

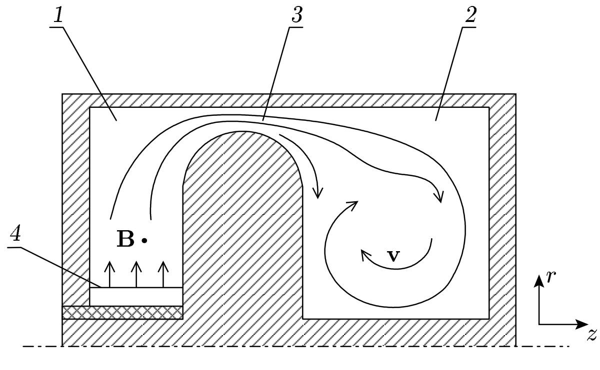

Рис. 1. Схема плазменной камеры МАГО: $\mathbf{B}$ — магнитное поле, *1*, *2* — номера отсеков, *3* — кольцевое сопло, *4* — магнитный поршень

[*] E-mail: sfgar@vniief.ru

ке *2* камеры создается замагниченная горячая плазма, пригодная для последующего сжатия (с азимутальным магнитным полем около 0.1 МГс, концентрацией порядка 10^{18} см$^{-3}$, температурой около 300 эВ и достаточно малым содержанием примесей, поскольку примеси могут увеличивать потери на излучение).

2. Затем с помощью мощных магнитных драйверов (например, взрывомагнитных генераторов) проводится квазиадиабатическое сжатие плазмы (со скоростями порядка 1 см/мкс) до параметров, соответствующих выполнению критерия Лоусона.

При этом на обоих стадиях движение плазмы происходит в плоскости rz, перпендикулярно азимутальному магнитному полю.

Нагрев плазмы на первой стадии происходит при ее вытеснении магнитным поршнем из отсека *1* в отсек *2*. При этом первоначально холодная плазма в районе сопла разгоняется до сверхзвуковых скоростей (превышающих альфвеновскую скорость) и нагревается при торможении в возникающих при выходе из сопла бесстолкновительных ударных волнах [4] и в результате аномального вязкого нагрева в приэлектродных слоях [5]. Таким образом, происходит преобразование магнитной энергии плазмы в кинетическую, а затем в тепловую. После перетекания плазмы во второй отсек и выравнивания полного давления в обоих отсеках во втором отсеке образуется сравнительно спокойная плазма с $\beta \approx 1$ (β — отношение теплового давления к магнитному), имеющая существенно дозвуковые скорости.

Эту плазму и предполагается сжимать квазисферическим или цилиндрическим образом, сдвигая стенки второго отсека камеры (например, перемещая внешнюю цилиндрическую стенку камеры рис. 1 внутрь по радиусу). Несмотря на сравнительно малые скорости плазмы и малую величину ее кинетической энергии по сравнению с магнитной, эти скорости остаются большими по сравнению со скоростями сжатия, и такое движение плазмы является важным в нескольких аспектах. Во-первых, ее движение может сказываться на конвективном остывании плазмы, перенося тепло от горячих ее областей к холодным стенкам. Во-вторых, в результате движения плазма может загрязняться примесями, смываемыми со стенок. Особенно существенным такое смытие вещества со стенок может быть при сжатии плазмы для достижения термоядерного зажигания [1–3], поскольку при этом вещество стенок будет заведомо находиться в плазменном состоянии и легко перемешиваться с водородной плазмой. Поэтому для таких систем важно знать, как будет эволюционировать гидродинамическое движение после стадии нагрева плазмы и как долго оно будет сохраняться.

Классические коэффициенты переноса замагниченной горячей плазмы [6], такие как вязкость и коэффициент магнитной диффузии, малы из-за замагниченности. Поэтому течения плазмы происходят с большими числами Рейнольдса и магнитными числами Рейнольдса и, как почти всегда в условиях больших чисел Рейнольдса, становятся турбулентными. Поскольку движение плазмы поперек магнитного поля происходит при небольших числах Альфвена–Маха M_A, МГД-неустойчивости также развиваются поперек магнитного поля [7] и возникающая турбулентность имеет двумерный характер [8]. В прямых двумерных МГД-расчетах (см., например, [2, 9]), проводящихся в конкретной специальной геометрии с конкретными граничными и начальными условиями с учетом большого разнообразия физических эффектов, затруднительно получить ответы на принципиальные вопросы, относящиеся к релаксации двумерного движения. Причинами этого является то, что, во-первых, приходится выделять интересующие явления на фоне других действующих факторов, а во-вторых, учет всех факторов неизбежно снижает вычислительные возможности, направленные на изучение самого двумерного течения и явлений, связанных непосредственно с ним. Поэтому есть смысл рассмотреть отдельно двумерное турбулентное МГД-течение, не учитывая принципиально несущественных для этого течения явлений. Поскольку в этом случае МГД-задача сводится к задаче двумерной гидродинамической турбулентности, основные ее особенности можно исследовать как в МГД-, так и в двумерной гидродинамической постановке.

В настоящей работе, так же как в работе [10], проводилось численное моделирование течений в ограниченной области при больших числах Рейнольдса, чтобы определить характеристики этих течений и скорости диссипации кинетической энергии. Возможными механизмами диссипации в расчетах являлись вязкость[1)], обусловленная разностной схемой, а также излучение звука с последующим нелинейным его затуханием в ударных волнах.

[1)] Для замагниченной плазмы с $(\omega\tau)_i \gg 1$ диссипация энергии из-за вязкости в m_i/m_e раз более существенна, чем омическая диссипация, а при малых M_A относительный вклад омической диссипации еще больше уменьшается. Однако для общих свойств турбулентного течения конкретный механизм диссипации, если она невелика и проявляет себя сильнее на малых масштабах, не важен.

Излучение звука, если оно возможно, могло быть одним из важных каналов диссипации кинетической энергии двумерного турбулентного движения, поскольку другие механизмы оказываются в двумерной турбулентности медленными из-за малых коэффициентов переноса (вязкости и магнитной диффузии) и поскольку скорость потерь энергии от излучения звука (см. [11], а также разд. 2) должна была бы определяться только числами Маха M (которые, для реальных течений после стадии нагрева в камере МАГО становятся меньшими 1, но не слишком малыми, $M \approx 0.4$). Для выяснения вопроса о возможности излучения звуковых волн турбулентностью в ограниченном объеме при малых числах Маха M (буквой M мы будем обозначать полное число Маха, которое в наших расчетах практически совпадало с M_A) достаточно исследовать эту возможность в упрощенной постановке, для одномерной задачи, в которой турбулентное движение выступает в качестве движущей силы, производящей в объеме сжатия и разрежения. Результаты этого исследования изложены в разд. 2.

Рассмотрение релаксации двумерного течения проведено на примере эволюции одиночного кругового вихря в квадратной коробке. Поскольку по мере эволюции течения начальные условия в определенной степени должны «забываться», для определения характеристик возникающей на поздних временах турбулентности (например, показателя степени у энергетического спектра в инерционном интервале) начальные условия не очень существенны. Интересно установить, однако, характерные времена перехода к турбулентности (порядок величины которых не должен зависеть от начальных условий и формы рассматриваемой области) и их соотношение с временами спада кинетической энергии из-за наличия вязкости.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Возможным каналом диссипации кинетической энергии турбулентного движения является генерация звуковых (в МГД-случае — магнитозвуковых) волн и их последующее ударно-волновое затухание. Теория излучения звука турбулентностью, занимающей конечный объем в неограниченной среде, развита Лайтхиллом [7]. Для применимости этой теории необходимо, чтобы размеры среды были велики по сравнению с характерными длинами звуковых волн, возбуждаемых при турбулентном движении. Если турбулентность занимает объем с характерным размером L, а характерные скорости движения v, то характерные длины волн имеют порядок cL/v (c — скорость звука, $c \gg v$), много больший размеров объема, занятого турбулентностью. В этом случае теория Лайтхилла неприменима и возникает вопрос, будут ли излучаться звуковые волны и, если будут, то с какой интенсивностью, т. е. будет ли идти диссипация турбулентного движения по этому каналу и с какой скоростью.

Поскольку масштаб пульсаций давления при турбулентном движении порядка ρv^2, для выяснения этого вопроса можно рассмотреть одномерное движение, возбуждаемое в области размером около L пульсациями давления с характерными временами порядка L/v. Так как $v \ll c$, то такие пульсации приведут к смещениям плазмы порядка $(v/c)^2 L$ и характерным скоростям порядка $(v/c)^2 v$. Поэтому мы рассмотрели движение в области, ограниченной с одной стороны жесткой стенкой, а с другой — поршнем, совершающим заданные колебания с амплитудой порядка $(v/c)^2 L$ и характерными временами около L/v. Вопрос, ответ на который мы искали, звучит так: будут ли при малых v возбуждаться ударные волны в области и будет ли поршень в среднем совершать работу? Для того чтобы в начальный момент движение поршня было достаточно плавным, оно задавалось в виде суммы двух синусов:

$$x = L\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(0.55\sin\frac{2\pi t}{1.1T} - 0.45\sin\frac{2\pi t}{0.9T}\right), \qquad (1)$$

где $T = 2L/v$. Для уверенности в правильности расчетов задачи считались с достаточно большим количеством точек и в течение достаточно большого времени — около $200T$.

На рис. 2 представлены профили скорости для расчетов с числом Маха $M \equiv v/c = 0.5$ и $M = 0.33$ на момент времени $t = 1000L/c$. Эти профили представительны для обоих расчетов и показывают, что при числе Маха $M = 0.5$ в области образуются ударные волны, а при $M = 0.33$ ударные волны не возникают. Расчеты показывают, что при $M \geq 0.5$ в области образуются ударные волны и поршень в среднем совершает работу, а при $M \leq 0.33$ ударные волны не возникают и поршень работы в среднем не совершает. Таким образом, можно сделать вывод, что в случае двумерной турбулентности, где в области малых масштабов содержится малая доля энергии (в спектре двумерной турбулентности значения $E(k)$ при больших волновых числах k уменьшаются быстрее,

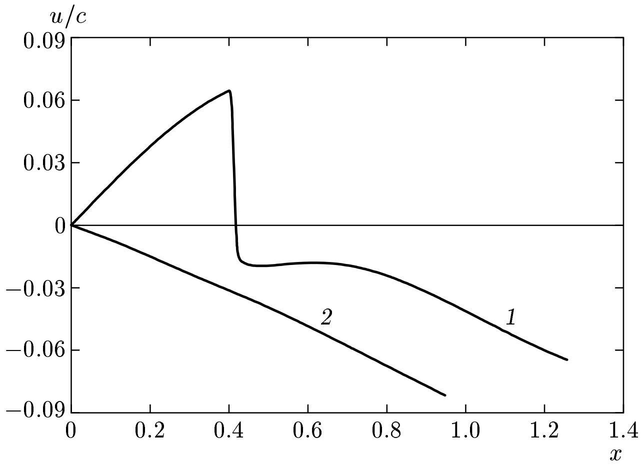

Рис. 2. Профили скорости u в газе, создаваемые поршнем, который движется по закону (1), для чисел Маха $M \equiv v/c = 0.5$ (*1*) и 0.33 (*2*) на момент времени $t = 1000L/c$

чем k^{-3}, см. ниже), для малых чисел Маха этот канал диссипации отсутствует.

Для трехмерной турбулентности в ограниченной области этот канал диссипации все же работает из-за наличия заметной доли энергии в коротковолновой части спектра, хотя он и сильно ослабляется при малых числах Маха. Действительно, характерные частоты пульсаций в турбулентности порядка kv. Поэтому в случае трехмерной турбулентности, где $E(k) \sim k^{-5/3}$ для больших k, а скорости, соответственно, $v_k \sim v(kL)^{-1/3}$, частоты растут с увеличением k и при достаточно больших k выполняется условие применимости теории Лайтхилла, $kv_k \sim c/L$. Поскольку количество энергии, испускаемой в виде звука единицей массы турбулентной среды в единицу времени,

$$\varepsilon_s \sim \frac{v^8}{c^5 L},$$

в области применимости теории эта же оценка будет справедлива при замене $v \to v_k$, $L \to 1/k$, что даст для ограниченного объема

$$\varepsilon_s \sim \frac{v^{10.5}}{c^{7.5} L}.$$

Таким образом, по сравнению с излучением звука в неограниченной среде, в ограниченной среде интенсивность излучения звука трехмерной турбулентностью дополнительно ослабляется множителем $(v/c)^{2.5}$.

3. ДВУМЕРНЫЙ РАСЧЕТ РЕЛАКСАЦИИ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

3.1. Постановка задачи

Для определения характеристик двумерных течений в ограниченной области была рассмотрена эволюция кругового вихря в квадратной области. Предполагалось, что в начальный момент времени в области $-3 < x < 3$, $-3 < y < 3$ с постоянными плотностью и скоростью звука задана азимутальная скорость, зависящая от радиуса по закону[2)]

$$v_\varphi = \begin{cases} r, & 0 < r < 1, \\ 2 - r, & 1 < r < 2, \\ 0, & 2 < r. \end{cases} \qquad (2)$$

Скорость звука предполагалась равной $c = 2.5$, так что начальное число Маха в этом расчете можно определить как $M = 0.4$. Такое распределение скорости неустойчиво [7] при $1 < r < 2$ и его двумерная эволюция будет приводить к турбулентности. Границы области считались жесткими и идеально скользящими.

В чисто гидродинамической постановке задача инвариантна относительно поворотов на угол $\pi/2$ и поэтому можно было бы рассчитывать задачу только для четверти области. Мы, однако, проводили расчеты в МГД-постановке в rz-геометрии с азимутальным магнитным полем, моделируя плоское течение тем, что область уводилась на большой, но конечный радиус (отношение величины радиуса к размеру области составляло 10). Это приводило к возмущениям, нарушающим симметрию задачи, поэтому надо было считать задачу во всей области.

Расчеты проводились по двумерной МГД-программе в идеальной постановке, т. е. с магнитным полем, вмороженным в вещество. Интегрировались уравнения идеальной магнитной гидродинамики [12]. Использовалась прямоугольная эйлерова (т. е. фиксированная пространственная) сетка и явная консервативная разностная схема второго порядка точности по пространству и времени. Пространственная аппроксимация конвективных членов имела первый порядок точности. Основным дис-

[2)] Надо отметить, что согласно МГД-расчетам возникающие в системе МАГО двумерные течения после стадии динамического нагрева плазмы являются достаточно сложными и изначально турбулентными, поэтому их развитие не содержит стадию развития неустойчивости, которую проходит течение с начальными условиями (2). Однако общие свойства развитого двумерного турбулентного течения, которые не зависят от начальных условий, должны быть применимы и к двумерным течениям МАГО.

сипативным процессом в расчетах была вязкость, обусловленная разностной схемой, имеющая порядок величины $\nu \sim v\Delta x$ (Δx — пространственный шаг сетки). Однако при малом значении этой величины для определения характеристик турбулентного течения в крупных и промежуточных масштабах (на энергонесущем и инерционном интервалах волновых векторов) несущественно, какова природа этой вязкости. Важно, что она сильно сказывается на малых масштабах и обеспечивает некоторый уровень диссипации кинетической энергии.

В расчетах скорость звука в начальный момент времени считалась чисто альфвеновской. В дальнейшем из-за диссипации кинетической энергии происходило некоторое увеличение внутренней энергии и некоторый рост полной скорости звука. Однако, поскольку мы рассматривали случай практически несжимаемой жидкости (при $M = 0.4$ кинетическая энергия в области составляла около 2 % от магнитной), это изменение было совершенно несущественным.

Сравнивая расчеты с разным числом ячеек, можно определить характерное число Рейнольдса рассматриваемого течения. Для расчета, результаты которого мы приведем, с числом ячеек 400×400 число Рейнольдса, определенное как

$$\mathrm{Re} \approx \frac{2v}{L d\ln E/dt}$$

(v — среднеквадратичная скорость в области, для нашей области считалось $L = 3$, $d\ln E/dt$ — декремент затухания кинетической энергии), составляет $\mathrm{Re} \approx 300$.

3.2. Результаты расчета

Поскольку затухание энергии в нашем двумерном случае обусловливалось счетной вязкостью порядка $\nu \sim v\Delta x$, при больших временах, когда характерные размеры течения определяются размером области L, кинетическая энергия E должна уменьшаться в соответствии с уравнением

$$\frac{dE}{dt} \approx E\frac{\nu}{L^2} \approx E\frac{v\Delta x}{L^2}. \qquad (3)$$

Так как $E \propto v^2$, из (1) следует, что при больших временах скорость уменьшается как $v \propto L^2/\Delta x t$, а энергия, соответственно, как $E \propto 1/t^2$. Для проверки этого был проведен расчет на сравнительно грубой сетке 100×100 до больших времен. Зависимость

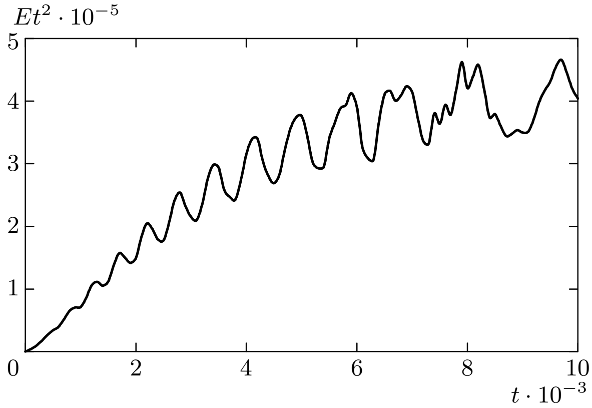

Рис. 3. Зависимость от времени величины Et^2 для расчета на сетке 100×100 (энергия измеряется в единицах начальной величины)

от времени величины Et^2 для этого расчета представлена на рис. 3 (энергия измеряется в единицах ее начальной величины, а время — в единицах отношения единицы размера к единице скорости). Как видно, для больших времен энергия действительно уменьшается как $1/t^2$.

На рис. 4 приведены изолинии $|v|$ рассматриваемого течения при расчете на сетке 400×400 для моментов времени $t = 0$ (начальный момент), а также $t = 30$, 200, 500. На рис. 4 видно, что по мере развития неустойчивости картина течения приобретает сложный, характерный для турбулентности вид.

Зависимости от времени кинетической энергии системы

$$E = \frac{1}{2}\int v^2 dx\, dy,$$

энстрофии

$$H = \frac{1}{2}\int (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})^2 dx\, dy$$

и момента импульса области

$$M = \int v_\varphi r\, dx\, dy$$

(радиус r и азимутальная скорость v_φ отсчитываются от центра области) показаны на рис. 5. Видно, что энергия уменьшается за достаточно большие времена, определяемые счетной вязкостью, время спада энергии в системе порядка L^2/ν и пропорционально числу Рейнольдса. Этот результат получен для течений на всех рассмотренных нами сетках (100×100, 200×200, 400×400) и является вполне определенным. Малые короткопериодные колебания кинетической энергии связаны с хождением звуковых (магнитозвуковых) волн, которые возбуждаются при этих

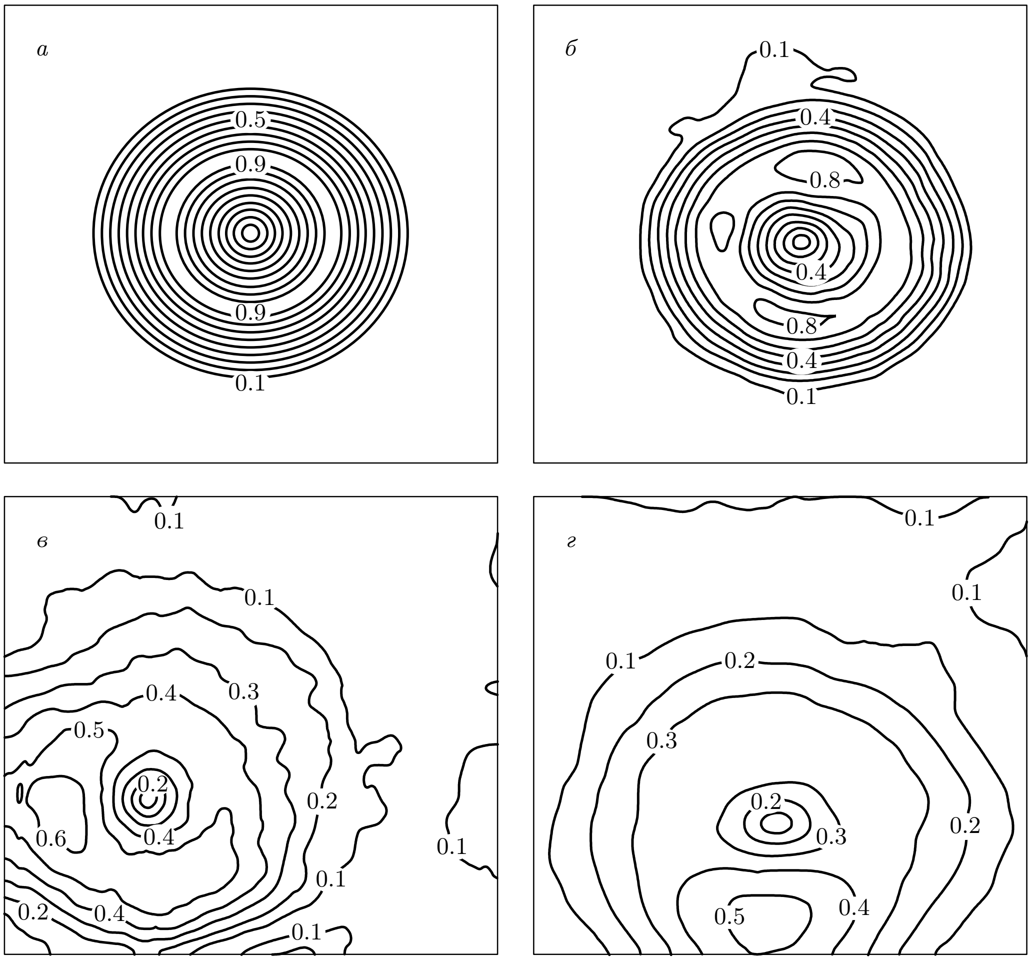

Рис. 4. Изолинии модуля скорости для моментов времени $t = 0$ (*а*), 30 (*б*), 200 (*в*), 500 (*г*)

числах Маха и, в соответствии с приведенным в разд. 2 рассмотрением, не приводят к диссипации кинетической энергии.

При использовании полученного результата о медленном затухании двумерной турбулентности, определяемом, в отличие от трехмерной, числами Рейнольдса, в случае плазменных течений в магнитном поле (для системы МАГО) важно правильно описывать физические механизмы, приводящие к диссипации — продольную физическую вязкость [6], которая в случае замагниченной плазмы может определяться в основном установлением равновесия между продольными и поперечными степенями свободы ионов, и сильно замагниченную сдвиговую вязкость [6]. Во многих расчетах в системе МАГО (см., например, [2, 9]) физическая вязкость не учитывалась, и тем не менее эти расчеты давали быстрое затухание движения. Это свидетельствует, по-видимому, о существенных численных погрешностях в описании движения плазмы на стадии после динамического нагрева, имеющих место в расчетах.

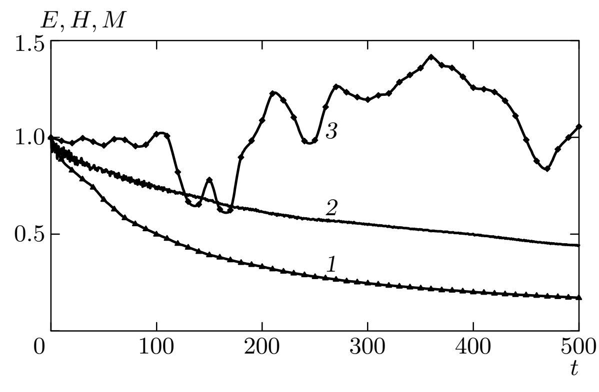

Рис. 5. Зависимости от времени H (*1*), E (*2*), M (*3*). Все величины измеряются в единицах начальных значений

Энстрофия, как видно на рис. 5, убывает несколько быстрее, чем энергия, что означает некоторое увеличение характерных масштабов течения. Наличие дополнительного по сравнению с уменьшением энергии потока энстрофии могло бы давать зависимость спектра кинетической энергии $E(k) \propto k^{-3}$ [8] в области больших волновых чисел k в некотором временном интервале. Однако в силу недостаточно больших чисел Рейнольдса Re эта перестройка характерных масштабов течения происходит при заметном уменьшении кинетической энергии. Поэтому такая зависимость спектра от энергии реально не наблюдается (см. ниже). Возможно, что при моделировании течения с большими значениями Re, например, на более тонкой сетке, можно было бы в некотором временном интервале на графиках зависимости энстрофии от времени увидеть сброс избыточной начальной энстрофии и получить зависимость спектра $E(k) \propto k^{-3}$.

Так как геометрия системы не инвариантна относительно поворотов на произвольный угол, момент импульса в ней не сохраняется, что и показывает рис. 5. Момент импульса при малых временах остается примерно постоянным, что означает увеличение масштабов вихря, поскольку кинетическая энергия в это время уменьшается. Затем, однако, происходит более существенное изменение момента, связанное с взаимодействием со стенками. Турбулизация течения и формирование других крупных вихрей приводили в расчетах с другими начальными условиями [10] даже к смене знака момента. В этом же расчете он совершает нерегулярные колебания с большим периодом, примерно сохраняя характерную величину, несмотря на то что кинетическая энергия уменьшается за время расчета более чем вдвое.

Спектры кинетической энергии рассматриваемого течения в том же расчете на сетке 400×400 в разные моменты времени представлены на рис. 6. Поскольку рассматривалось течение в конечной квадратной коробке, разложение поля скоростей в спектр проводилось по следующим формулам:

$$v_x = \sum_{m=1,n=0}^{N} a^x_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi y}{L},$$

$$v_y = \sum_{m=0,n=1}^{N} a^y_{mn} \cos\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi y}{L},$$

$$k^2 = \frac{(m^2+n^2)\pi^2}{L^2},$$

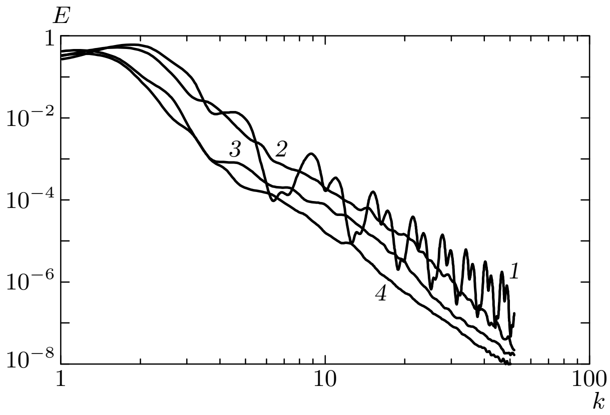

Рис. 6. Спектры кинетической энергии двумерной турбулентности в ограниченной области для моментов времени $t = 0$ (*1*), 50 (*2*), 300 (*3*), 500 (*4*)

$$E(k)\,dk = \sum_{m,n\neq 0} \left[(a^x_{mn})^2 + (a^y_{mn})^2\right] + \\ + 2\sum_{m} \left[(a^x_{m0})^2 + (a^y_{0n})^2\right].$$

Здесь N — число узлов сетки в одном направлении, x и y отсчитываются от границ области, а суммирование в последней формуле проводится по тем значениям m и n, которые попадают в заданный интервал значений dk. Величина полной энергии на рис. 6 измеряется в единицах ее начального значения. Приведены значения $E(k)$ только для $k < 50$, поскольку при больших k начинает сказываться влияние конечного числа узлов сетки и уменьшается точность вычисления интегралов Фурье (это можно увидеть по поведению рассчитанного спектра при $k \approx 50$, в особенности для $t = 500$, когда на кривых начинают появляться мелкие осцилляции).

В начальный момент времени при больших k энергия убывает пропорционально k^{-4} и имеет осцилляции, вызванные особенностями функции $v_\varphi(r)$, определяемой формулой (2). По мере развития турбулентности кривая спектра энергии на участке, соответствующем инерционному интервалу (примерно от $k \approx 3$ до $k \approx 15$), сохраняет почти постоянный угол с зависимостью $E(k) \propto k^{-n}$, где $n = 4.2 \pm 0.4$ для разных моментов времени. Таким образом, кривая спектра имеет наклон больший, чем необходимо для наличия прямого потока энстрофии в сторону малых масштабов (для которого нужна зависимость k^{-3} [8]). На рис. 6 также видно, что имеет место конденсация энергии для малых

k, которая ожидалась в ограниченных объемах [8]: спектр энергии со временем сужается и значения энергии уменьшаются при больших k весьма резко, при этом основная доля энергии сосредотачивается в гармониках с минимально возможными в ограниченной системе волновыми числами.

Нами рассматривалось течение в области с идеально скользящими стенками. Однако в двумерной турбулентности из-за отсутствия передачи энергии в область больших волновых векторов k характер поведения спектра при больших k должен сохраниться и для течения в области с условием равенства нулю скорости на границах (условие прилипания). Затухание гидродинамического движения в двумерном случае будет происходить за времена порядка L^2/ν. При этом силы сопротивления при течении по трубе или обтекании тел должны быть по порядку величины такими же, как при ламинарном течении, и при сколь угодно больших числах Рейнольдса отличаться от них лишь постоянным множителем.

Следует отметить также некоторое отличие процессов теплопередачи и перемешивания веществ в двумерной турбулентности от таковых в трехмерной. В двумерном случае, когда $E(k)$ уменьшается в инерционной области быстрее, чем по закону k^{-3}, относительная скорость v двух частиц, находящихся на малом расстоянии λ друг от друга, определяется большими масштабами течения и пропорциональна этому расстоянию:

$$v \propto v_0 \frac{\lambda}{L},$$

где v_0 и L — характерная скорость и пространственный масштаб течения. Поэтому изменение этого расстояния со временем будет происходить по закону $\lambda_1 \exp(v_0 t/L)$ (λ_1 — начальное расстояние). Таким образом, время, необходимое для того чтобы частицам разойтись на большое расстояние λ_2, будет логарифмически зависеть от начального расстояния:

$$t \propto \frac{L}{v_0} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

в отличие от трехмерной турбулентности, где в инерционной области даже две бесконечно близкие частицы за конечное время расходятся на конечное расстояние [11]. Таким образом, в двумерном случае процессы теплопередачи и перемешивания будут несколько замедленны (если под λ_2 подразумевать основной масштаб течения L, а под λ_1 — вязкий масштаб, в двумерном случае равный $\lambda_1 \sim \sqrt{L\nu/v_0}$, то в $\ln\sqrt{\mathrm{Re}}$ раз) по сравнению с временем $t \sim L/v_0$ этих процессов, характерным для трехмерного случая. В соответствии с этими соображениями в двумерном случае пульсации температуры (и концентрации перемешиваемых веществ) будут также отличаться от пульсаций в трехмерном случае: повторяя вывод распределения этих пульсаций [11], в двумерном случае получаем, что в инерционной области они должны быть распределены пропорционально $\ln\lambda$, т. е. практически не зависеть от расстояния, тогда как в трехмерном случае эти пульсации пропорциональны $\lambda^{1/3}$.

Применительно к течениям замагниченной плазмы это должно означать более неоднородные по сравнению с трехмерным случаем распределения примесей и температуры плазмы, что может быть существенным для описания излучения плазмы на примесях и ее остывания. Так, модели гомогенного перемешивания, применяемые для описания трехмерных течений, могут оказаться неприменимыми в двумерном случае.

Для двумерного течения идеальной жидкости в силу теоремы Томсона [11] завихренность

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z = -\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

должна сохраняться в каждой лагранжевой частице жидкости. Поскольку, однако, в двумерном турбулентном течении существуют потоки энстрофии в сторону больших волновых чисел и энстрофия во всей области убывает даже при сохранении кинетической энергии, завихренность каждой частицы будет также меняться. Интересно рассмотреть, как это происходит и как эволюционирует распределение завихренности по объему.

Для проведенного расчета было получено распределение завихренности по объему $W(\mathrm{rot})$, где $\mathrm{rot} \equiv (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z$, т. е. W — доля полного объема dV/V, в котором величина rot находится в заданном интервале $d\,\mathrm{rot}$, так что

$$W = \frac{dV}{V\,d\,\mathrm{rot}}.$$

На рис. 7 представлена эволюция этого распределения для моментов времени $t = 0, 50, 200, 500$.

Из рис. 7 видно, что с течением времени происходит сужение распределения. Вначале при $t < 50$ происходит некоторая диффузия распределения как для положительных, так и для отрицательных значений. Провалы между первоначальными максимумами, соответствующими для положительного значения ротора области растущей скорости на рис. 4a, для отрицательного значения — области падающей

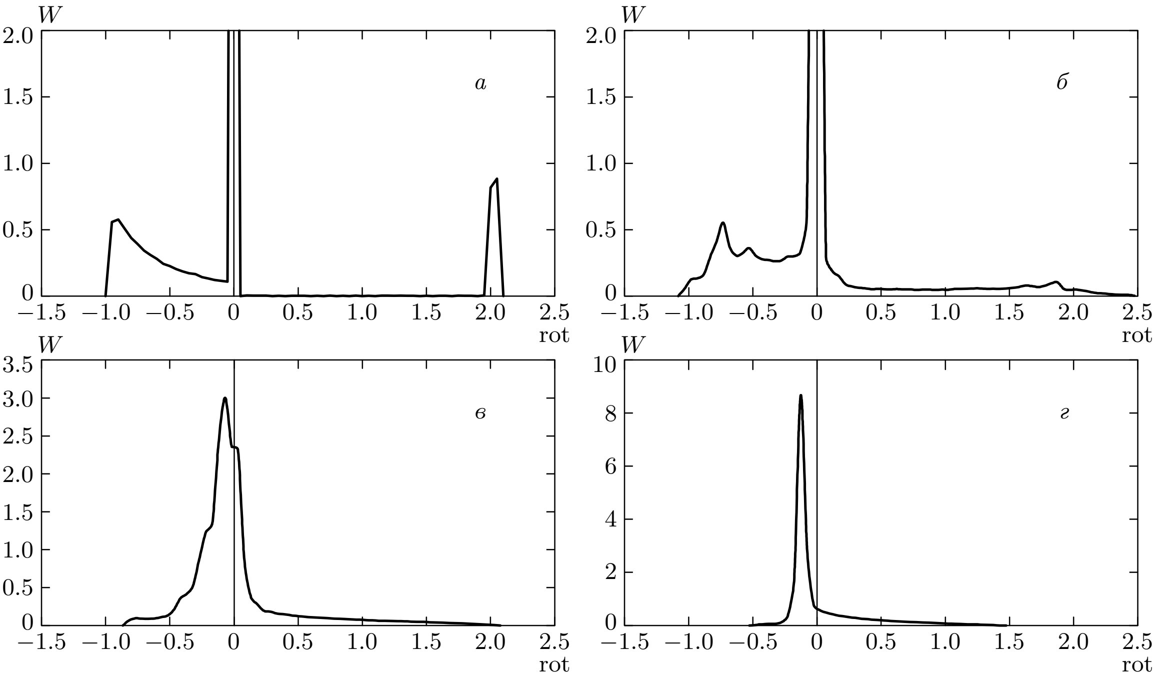

Рис. 7. Эволюция распределения завихренности по объему для последовательных моментов времени $t = 0$ (*а*), 50 (*б*), 200 (*в*), 500 (*г*)

скорости и для нулевого — области неподвижной жидкости, «замываются». Затем максимумы для отрицательных и положительных значений завихренности исчезают и остается только один в районе нуля. Для больших времен распределение завихренности примерно сохраняет свою форму: имеется максимум при небольших отрицательных значениях, быстро убывающее крыло в сторону отрицательных значений и медленно убывающее крыло в сторону положительных. Однако соотношение ширин эти крыльев со временем меняется при изменении $t = 200$ до $t = 500$. Возможно, это связано с тем, что времена $t = 200$–500 еще не являются достаточно большими для выхода на установившееся состояние двумерной турбулентности. Из сравнения кривых *1* и *2* рис. 5 видно, что отношение величин H и E в этом диапазоне времен еще меняется. Следует отметить сохраняющуюся асимметрию в распределении завихренности, которая является следствием начальных условий. Таким образом, начальные условия задачи окончательно не «забываются», что подтверждает и динамика вращательного момента (рис. 5), который сохраняет свой знак, хотя и совершает довольно большие колебания (для других начальных условий он сохранял знак в среднем за большое время [10]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем общие выводы, относящиеся к двумерной турбулентности в ограниченной области.

1. В случае двумерной турбулентности в ограниченной области при малых числах Маха M не происходит излучения звука турбулентностью и, таким образом, этот канал диссипации при малых M отсутствует полностью.

2. Вследствие существенных различий в свойствах двумерных и трехмерных турбулентных течений необходимо быть осторожным при применении двумерных расчетов к трехмерным турбулентным течениям. В трехмерных течениях затухание кинетической энергии, процессы теплопередачи и перемешивания веществ могут происходить гораздо быстрее, чем дают двумерные расчеты. Так, для течения в ограниченной области в трехмерном случае затухание кинетической энергии должно происходить за времена порядка $\alpha L/v$, где α — малый множитель, характеризующий величину турбулентных пульсаций, а в двумерных расчетах — за времена порядка L^2/ν.

3. Спектр энергии турбулентности при больших временах сужается, что показывает конденсацию энергии в области малых k. При больших k энергия уменьшается с ростом k быстрее, чем по закону k^{-3}.

4. Распределение завихренности по объему при больших временах примерно сохраняет свою форму и имеет асимметрию относительно положительных и отрицательных значений, связанную с асимметрией начальных условий. В этом смысле начальные условия задачи окончательно не «забываются».

Кроме того, выводы, существенные для задач описания двумерных турбулентных течений замагниченной плазмы поперек магнитного поля в областях, ограниченных материальными стенками (например, для системы МАГО), заключаются в следующем.

Во-первых, поскольку время диссипации энергии двумерной турбулентности не связано с передачей энергии малым масштабам, для расчетов плазменных течений в магнитном поле необходимо правильно описывать физические механизмы, приводящие к диссипации (продольную физическую вязкость [6], которая в случае замагниченной плазмы может определяться в основном установлением равновесия между продольными и поперечными степенями свободы ионов, и сильно замагниченную сдвиговую вязкость [6]).

Во-вторых, распределения примесей и температуры плазмы могут быть более неоднородными по сравнению с трехмерным случаем, что может оказаться существенным для описания излучения плазмы на примесях и ее остывания.

Авторы благодарны Н. В. Змитренко, В. И. Мамышеву, В. Ф. Тишкину и В. Б. Якубову за сотрудничество на начальном этапе проведенного исследования и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Буйко, Г. И. Волков, С. Ф. Гаранин и др., ДАН **344**, 323 (1995).

2. I. R. Lindemuth, R. E. Reinovsky, V. K. Chernyshev, V. N. Mokhov et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1953 (1995).

3. S. F. Garanin, IEEE Trans. Plasma Sci. **26**, 1230 (1998).

4. С. Ф. Гаранин, А. И. Голубев, Н. А. Исмаилова, Физика плазмы **26**, 426 (2000).

5. С. Ф. Гаранин, Физика плазмы **26**, 309 (2000).

6. С. И. Брагинский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1963), вып. 1, с. 183.

7. С. Ф. Гаранин, С. Д. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 743 (1996).

8. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, УФН **170**, 921 (2000).

9. A. M. Buyko, S. F. Garanin, G. G. Ivanova et al., in *Digest of Technical Papers*, 12^{th} *IEEE Int. Pulsed Power Conf.*, ed. by C. Stallings and H. Kirbie, Monterey, California, USA (1999), Vol. 2, p. 1052.

10. S. F. Garanin, O. M. Burenkov, G. G. Ivanova et al., in *Digest of Technical Papers, Pulsed Power Plasma Science — 2001*, ed. by R. Reinovsky and M. Newton, Las Vegas, Nevada, USA (2001), Vol. 1, p. 512.

11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).