ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 5, стр. 1113–1116

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ «РАСПУТЫВАНИЕ» КВАНТОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Л. В. Ильичев *

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 10 декабря 2002 г.

Рассматривается вопрос о «распутывании» квантовой операции, т. е. процедуре «перенацеливания» окружения на получение той или иной информации от квантовой системы, не меняющей саму операцию. Найдено распутывание, при котором в окружение поступает минимальный объем информации, причем это распутывание не зависит от числа осуществившихся событий.

PACS: 03.67.-a, 03.65.-w

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие операции [1] является одним из основных в квантовой теории информации. Это есть наиболее общее (совместимое, естественно, с законами квантовой механики) отображение

$$\mathcal{E} : \hat{\varrho}_{in} \mapsto \hat{\varrho}_{out} = \mathcal{E}(\hat{\varrho}_{in}), \tag{1}$$

переводящее входное состояние $\hat{\varrho}_{in}$ некоторой квантовой системы в выходное состояние $\hat{\varrho}_{out}$, которое, возможно, относится к другой системе. Типичен взгляд на стрелку в выражении (1) как на канал передачи (квантовой) информации. Физические свойства канала и определяют вид операции $\mathcal{E}$.

Существуют три условия, которым должна удовлетворять квантовая операция: 1) для любого входного состояния $\hat{\varrho}$ имеем $\mathrm{Tr}\,\mathcal{E}(\hat{\varrho}) \le 1$ (эта величина есть, по существу, вероятность срабатывания канала); 2) отображение $\mathcal{E}$ линейно; 3) $\mathcal{E}$ имеет так называемое свойство полной положительности. Последнее условие гарантирует положительность выходного состояния системы, даже если $\mathcal{E}$ действует на подсистему.

Имеет место представление $\mathcal{E}$ в виде операторной суммы (operator-sum representation) [1]. А именно, для любой квантовой операции $\mathcal{E}$ существует набор $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ операторов, действующих из пространства входных состояний $\mathcal{H}_{in}$ в пространство выходных состояний $\mathcal{H}_{out}$ так, что

$$\mathcal{E}(\hat{\varrho}) = \sum_{\alpha\in A} \hat{E}_\alpha \hat{\varrho} \hat{E}_\alpha^\dagger. \tag{2}$$

Для простоты и определенности ограничимся случаем конечного набора $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Мы полагаем также выполненным условие так называемой полноты операции:

$$\sum_\alpha \hat{E}_\alpha^\dagger \hat{E}_\alpha = 1. \tag{3}$$

Физически это означает, что операция обязательно осуществится — канал сработает. Однако сработать он может, как подсказывает выражение (2), одним из N способов. При этом вероятность $P(\alpha)$ α-го способа срабатывания при входном состоянии $\hat{\varrho}$ есть $\mathrm{Tr}(\hat{E}_\alpha^\dagger \hat{E}_\alpha \hat{\varrho})$, а выходное состояние при этом $\hat{E}_\alpha \hat{\varrho} \hat{E}_\alpha^\dagger / P(\alpha)$. Выражение (2) есть усредненный по распределению $\{P(\alpha)\}_{\alpha=1}^N$ результат. Каждый способ срабатывания канала есть некоторое событие, например, щелчок определенного детектора (с номером α).

Из вида (2) легко угадывается преобразование набора $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, оставляющее неизменной операцию $\mathcal{E}$:

$$\hat{E}_\alpha \mapsto \hat{E}_\alpha(U) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_\beta U_{\alpha\beta} \hat{E}_\beta, \tag{4}$$

*E-mail: leonid@iae.nsk.su

где U — унитарная матрица из $SU(N)$. Этот факт хорошо известен. Если щелчок детектора α вызван поглощением фотона типа α, то физически преобразование (4) можно реализовать с помощью системы светоделителей, так что амплитуда вероятности щелчка детектора α будет включать в себя альтернативы, в которых этот щелчок вызывается фотонами типов $\beta \neq \alpha$. Это дает некоторое основание назвать множество событий, соответствующих набору $\{\hat{E}_\alpha(U)\}_{\alpha=1}^N$, суперпозиционными по отношению к исходному множеству, соответствующему набору $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Выбор конкретного набора $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, реализующего разложение (2), мы будем называть вслед за Кармайклом «распутыванием» (unravelling) квантовой операции $\mathcal{E}$.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Проведем поиск экстремального (смысл этого термина будет определен ниже) распутывания. Вероятность появления события α есть теперь

$$P(\alpha; U) = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}_\alpha(U)\hat{\varrho}\hat{E}_\alpha^\dagger(U)\right) = \sum_{\beta,\,\beta'} M_{\beta\beta'} U_{\alpha\beta'} \bar{U}_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

где

$$M_{\beta\beta'} = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}_\beta^\dagger \hat{E}_{\beta'}\hat{\varrho}\right) \tag{6}$$

— матрица с единичным следом, отвечающая некоторой эрмитовой положительно-определенной квадратичной форме.

С появлением события (т. е. при осуществлении операции) во внешней среде записывается объем информации

$$S_1(U) = -\sum_\alpha P(\alpha; U) \ln P(\alpha; U). \tag{7}$$

Как было показано в работе [2], $S_1(U)$ есть также средний объем информации, необходимой для описания выходного состояния после осуществления одного конкретного события. Нашей задачей является нахождение распутывания, т. е. матрицы $U(1)$ (номер в скобках отвечает числу осуществившихся событий), для которой $S_1(U)$ экстремально. Одновременно мы покажем, что найденный экстремум является минимумом. Проблема поиска «минимального» распутывания квантовой операции применительно к некоторым задачам квантовой оптики ставилась в работах [3], где было найдено решение для случая чистого исходного состояния. Критерий «минимального» распутывания в указанных работах формулировался иначе, однако он полностью эквивалентен и является частным случаем приведенного ниже общего решения.

Для нахождения экстремума воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, фиксировав условие унитарности $UU^* = 1$. С пока неопределенной матрицей коэффициентов Лагранжа должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}\left(S_1(U) + \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta'} \lambda_{\alpha_1\alpha_2} \bar{U}_{\alpha_1\beta'} U_{\alpha_2\beta'}\right)\Bigg|_{U=U(1)} = 0, \tag{8}$$

откуда следует

$$[\ln P(\alpha, U(1)) + 1] \sum_{\beta'} M_{\beta\beta'} U_{\alpha\beta'}(1) = \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha'} U_{\alpha'\beta}(1). \tag{9}$$

Заметим, что в силу унитарности матрицы U можно без изменения варьируемой величины в (8) всегда произвести замену

$$\lambda_{\alpha\alpha'} \to \delta_{\alpha\alpha'}\lambda_{\alpha\alpha}. \tag{10}$$

Если эту замену осуществить в выражении (9), то оно сразу превращается в следующее условие на $U(1)$:

$$\sum_{\beta'} M_{\beta\beta'} U_{\alpha\beta'}(1) = \mu_\alpha U_{\alpha\beta}(1) \tag{11}$$

— строки матрицы $U(1)$ оказываются собственными векторами матрицы M. Одновременно конкретизируются величины $\lambda_{\alpha\alpha}$. Полученный результат можно записать также следующим образом:

$$M_{\beta\beta'} = \sum_{\alpha'} \mu_{\alpha'} U_{\alpha'\beta}(1) \bar{U}_{\alpha'\beta'}(1). \tag{12}$$

Вопрос об экстремальном распутывании квантовой операции естественно отнести и к историям — сериям событий как исходам последовательных применений операции к одной и той же квантовой системе. Предположим для простоты, что в промежутках между применениями операции система не эволюционирует. Выражение для вероятности реализации истории $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ есть очевидное обобщение равенства (5):

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n; U) = \\ = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}_{\alpha_n}(U) \dots \hat{E}_{\alpha_1}(U)\hat{\rho}\hat{E}^\dagger_{\alpha_1}(U) \dots \hat{E}^\dagger_{\alpha_n}(U)\right) = \\ = \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_n \\ \beta'_1,\dots,\beta'_n}} M_{\beta_1\dots\beta_n,\beta'_n\dots\beta'_1} U_{\alpha_1\beta'_1} \dots U_{\alpha_n\beta'_n} \times \\ \times \bar{U}_{\alpha_1\beta_1} \dots \bar{U}_{\alpha_n\beta_n}, \quad (13)$$

где

$$M_{\beta_1\dots\beta_n,\beta'_n\dots\beta'_1} = \\ = \mathrm{Tr}\left(\hat{E}^\dagger_{\beta_1} \dots \hat{E}^\dagger_{\beta_n} \hat{E}_{\beta'_n} \dots \hat{E}_{\beta'_1}\hat{\rho}\right). \quad (14)$$

Соображения, аналогичные примененным в случае однособытийной истории, дают следующие условия на матрицу $U(n)$ экстремального распутывания в случае n событий. Для каждого i $(1 \le i \le n)$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\cancel{\beta_i},\dots,\beta_n \\ \beta'_1,\dots,\beta'_n}} \bar{U}_{\alpha_1\beta_1}(n) \dots \cancel{\bar{U}_{\alpha_i\beta_i}}(n) \dots \bar{U}_{\alpha_n\beta_n}(n) \times \\ \times M_{\beta_1\dots\beta_n,\beta'_n\dots\beta'_1} U_{\alpha_1\beta'_1}(n) \dots U_{\alpha_n\beta'_n}(n) = \\ = \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n} U_{\alpha_i\beta_i}(n). \quad (15)$$

Здесь зачеркивание означает отсутствие соответствующего символа. Если в этом выражении взять $i = 1$ и просуммировать его по $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, то с учетом того, что в силу (3)

$$\sum_{\beta_n} M_{\beta_1\dots\beta_{n-1}\beta_n,\beta_n\beta'_{n-1}\dots\beta'_1} = M_{\beta_1\dots\beta_{n-1},\beta'_{n-1}\dots\beta'_1}$$

и т. д., мы получаем важный результат:

$$U_{\alpha\beta}(n) = U_{\alpha\beta}(1) \quad (16)$$

для любого n и

$$\mu_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} = \sum_{\alpha_n} \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n}. \quad (17)$$

Как обобщение формулы (12) имеем

$$M_{\beta_1\dots\beta_n,\beta_n\dots\beta'_1} = \sum_{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n} \mu_{\alpha'_1\dots\alpha'_n} U_{\alpha'_1\beta_1}(1) \dots U_{\alpha'_n\beta_n}(1) \times \\ \times \bar{U}_{\alpha'_1\beta'_1}(1) \dots \bar{U}_{\alpha'_n\beta'_n}(1). \quad (18)$$

Докажем теперь, что найденный экстремум является минимумом. Для этого рассмотрим билинейный по dU и dU^* член в разложении разности

$$\delta S_n(U(1)) = S_n(U(1) + dU) - S_n(U(1)). \quad (19)$$

Предварительно заметим, что из условия унитарности следует, что

$$\sum_\beta \Big(U_{\alpha\beta}(1)\, d\bar{U}_{\alpha'\beta} + dU_{\alpha\beta}\, \bar{U}_{\alpha'\beta}(1) + \\ + dU_{\alpha\beta}\, d\bar{U}_{\alpha'\beta}\Big) = 0 \quad \forall \alpha, \alpha'. \quad (20)$$

С помощью этого соотношения билинейная по dU и dU^* вариация вероятности представима в виде

$$\delta P(\alpha_1, \dots, \alpha_n; U(1)) = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha'_i} (\mu_{\alpha_1\dots\alpha'_i\dots\alpha_n} - \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n}) K_{\alpha'_i\alpha_i}. \quad (21)$$

Здесь

$$K_{\alpha'\alpha} = \sum_{\beta,\beta'} \bar{U}_{\alpha'\beta'}(1)\, U_{\alpha'\beta}(1)\, dU_{\alpha\beta'}\, d\bar{U}_{\alpha\beta}. \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что в силу (20) $K_{\alpha'_i\alpha_i} = K_{\alpha_i\alpha'_i}$. Кроме того, очевидно, что $K_{\alpha'_i\alpha_i} \ge 0\ \forall \alpha, \alpha'$. С помощью выражения (21) вариация энтропии $\delta S_n(U(1))$ представима в виде

$$\delta S_n(U(1)) = \\ = -\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \\ \alpha'_i}} \ln \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n} (\mu_{\alpha_1\dots\alpha'_i\dots\alpha_n} - \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n}) \times \\ \times K_{\alpha'_i\alpha_i}. \quad (23)$$

Путем перестановки $\alpha_i \leftrightarrow \alpha'_i$ в каждом i-м члене этого ряда и взятия полусуммы исходного и полученного выражений получаем результат

$$\delta S_n(U(1)) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \\ \alpha'_i}} \ln \frac{\mu_{\alpha_1\dots\alpha'_i\dots\alpha_n}}{\mu_{\alpha_1\dots\alpha_n}} (\mu_{\alpha_1\dots\alpha'_i\dots\alpha_n} - \mu_{\alpha_1\dots\alpha_n}) \times \\ \times K_{\alpha'_i\alpha_i}, \quad (24)$$

положительность которого очевидна.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом доказана следующая теорема.

Матрица унитарного преобразования экстремального распутывания квантовой операции для историй с произвольным числом событий построена из собственных векторов матрицы $M_{\beta\beta'}$ (6). При этом во внешнюю среду поступает минимально возможный для данной длины истории объем информации.

Заметим, что принцип распутывания применим и к квантовому управляющему уравнению в форме Линдблада [4]. Роль набора $\{\hat{E}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ теперь играет набор операторов Линдблада (при этом не обязан выполняется критерий операции (2)). Матрица «минимального» распутывания для одного события определяется точно так же. Однако она уже не является универсальной и для каждого числа событий своя.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

2. C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **47**, 4010 (1993).

3. J. K. Breslin, G. J. Milburn, and H. M. Wiseman, Phys. Rev. Lett. **74**, 4827 (1995); J. K. Breslin and G. J. Milburn, J. Mod. Opt. **44**, 2469 (1997).

4. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).