ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 4, стр. 688–695 © 2003

# КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ И СПИНА В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ СРЕДАХ

***А. Я. Силенко*** *

*Научно-исследовательский институт ядерных проблем*
*Белорусского государственного университета*
*220050, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 11 сентября 2002 г.

Найдены квантовомеханические уравнения движения частиц и спина в средах с поляризованными электронами при наличии внешних полей. На движение электронов и их спина влияет обменное взаимодействие, а на движение позитронов и их спина — аннигиляционное. Для частиц со спином $S \geq 1$ учтены слагаемые второго порядка по спину. Найденные уравнения могут быть использованы для описания движения частиц и спина как в магнитных, так и в немагнитных средах.

PACS: 13.88.+e, 41.75.-i

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании взаимодействия частиц с веществом одной из наиболее важных проблем является квантовомеханическое описание движения частиц и спина. Классическая теория движения частиц и спина разработана весьма детально (см. [1, 2]). Квантовомеханическое уравнение движения релятивистских частиц в электромагнитном поле найдено в работе Дербенева и Кондратенко [3]. Еще раньше было найдено уравнение движения спина. Как известно, движение спина релятивистских частиц в электромагнитном поле описывается уравнением Баргманна–Мишеля–Телегди (БМТ) [4]. Его последовательный квантовомеханический вывод для частиц со спином $1/2$ проведен в работе [5], а для частиц с произвольным спином — в работах [6, 7]. Дербеневым и Кондратенко было исследовано влияние радиационных эффектов на движение спина [3]. Детальный анализ динамики поляризации частиц высоких энергий с учетом радиационных эффектов содержится в работе [8]. Последовательное квантовомеханическое описание взаимодействия релятивистских частиц с произвольным спином с электромагнитным полем при учете квадратичных по спину слагаемых было проведено в [7, 9]. Уравнение движения спина, полученное с помощью найденного в [7, 9] лагранжиана, приведено в [10].

Важное значение имеет исследование движения частиц и динамики их поляризации в средах с поляризованными электронами. Особенности взаимодействия поляризованных частиц с поляризованным веществом были проанализированы в [11]. Полученные в этой работе результаты и выведенное в [12] выражение для оператора Гамильтона в представлении Фолди–Ваутхойзена (ФВ) [13] используются в настоящей работе для нахождения квантовомеханических уравнений движения частиц и спина для релятивистских частиц с произвольным спином, движущихся в средах с поляризованными электронами при наличии внешних полей.

В настоящей работе не рассматривается сильное взаимодействие, которое также может приводить к изменению поляризации частиц в веществе [11, 14–16]. Также не учитывается влияние радиационных эффектов на поляризацию пучка. Эти эффекты в принципе могут приводить к дополнительному вращению вектора поляризации и к радиационной самополяризации (см. [3, 17]). Однако они становятся заметными только при высоких энергиях частиц (для электронов и позитронов при энергиях больше 10 ГэВ).

В работе используется релятивистская система единиц $\hbar = c = 1$.

* E-mail: silenko@inp.minsk.by

## 2. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ЧАСТИЦ В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ СРЕДАХ

Для описания взаимодействия релятивистских частиц с веществом и внешними полями с помощью уравнений движения частиц и спина наиболее удобным является представление ФВ [13]. В этом представлении операторы имеют наиболее простой вид, соответствующий виду операторов в нерелятивистской квантовой механике. Особенно удобно представление ФВ для описания поляризационных эффектов, поскольку в других представлениях (например, в представлении Дирака для частиц со спином $1/2$) оператор поляризации определяется громоздкими выражениями (см. [18]).

Формула для оператора Гамильтона в представлении ФВ, характеризующего взаимодействие частиц со спином $1/2$ с электромагнитным полем, была выведена в [12]. С точностью до линейных по полю слагаемых она имеет вид[1)]

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \beta\epsilon' + e\Phi + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\epsilon'+m} + \mu'\right)\frac{1}{\epsilon'},\right.\\ \left.\left(\boldsymbol{\Sigma}\cdot[\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E}] - \boldsymbol{\Sigma}\cdot[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}] - \nabla\cdot\mathbf{E}\right)\right\}_+ +\\ + \frac{\mu_0 m}{16}\left\{\frac{2\epsilon'^2 + 2\epsilon' m + m^2}{\epsilon'^4(\epsilon'+m)^2}, \boldsymbol{\pi}\cdot\nabla(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi})\right\}_+ -\\ - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\epsilon'} + \mu'\right), \boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{H}\right\}_+ +\\ + \frac{\mu'}{4}\left\{\frac{1}{\epsilon'(\epsilon'+m)}, \left[(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{H}) +\right.\right.\\ \left.\left. + 2\pi(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\pi})\right]\right\}_+, \quad (1)\end{aligned}$$

где

$$\epsilon' = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

$\mu_0 = e/2m$, $\mu' = \mu - \mu_0$ и $\mu$ — дираковский, аномальный и полный магнитные моменты, $e$ и $m$ — заряд и масса частицы, $\boldsymbol{\pi} = -i\nabla - e\mathbf{A}$ — оператор кинетического импульса, $\Phi$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ — потенциалы и напряженности электромагнитного поля, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрица Паули, $\{\ldots,\ldots\}_+$ обозначает антикоммутатор.

Переход к квазиклассическому описанию заключается в усреднении операторов по волновым функциям стационарных состояний. Для свободных частиц нижний спинор в представлении ФВ равен нулю [19]. Для частиц во внешнем поле отношение нижнего спинора к верхнему по порядку величины не превышает $|W_{int}|/E$, где $W_{int}$ — энергия взаимодействия частицы с полем, $E$ — полная энергия частицы. Таким образом,

$$\frac{\chi^\dagger\chi}{\phi^\dagger\phi} \sim (W_{int}/E)^2.$$

Поэтому вклад нижнего спинора пренебрежимо мал, и для квазиклассического описания достаточно использовать только верхний спинор. Движение частиц во внешних электрическом и магнитном полях допускает квазиклассическое описание, что позволяет говорить о траектории частиц. Можно также пренебречь коммутаторами операторов динамических переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ и их функций, что дает возможность ввести произвольный порядок данных операторов в квантовомеханических выражениях (см. [17–20]). В [20] была подробно рассмотрена точность этих допущений при описании движения частиц в магнитном поле. В то же время спин частицы в любом случае остается существенно квантовой величиной.

Для частиц с произвольным спином оператор Гамильтона можно найти, используя найденные в [7, 9] выражения для лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,\\ \mathcal{L}_1 = \frac{e}{2m}\left\{\left(g - 2 + \frac{2}{\gamma}\right)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}) -\right.\\ - (g-2)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) +\\ \left. + \left(g - 2 + \frac{2}{\gamma+1}\right)(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\right\},\\ \mathcal{L}_2 = \frac{Q}{2s(2s-1)}\left[(\mathbf{S}\cdot\nabla) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\times\\ \times\left[(\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) +\right.\\ \left. + (\mathbf{S}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\right] + \frac{e}{2m^2}\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{v}\times\nabla])\times\\ \times\left[\left(g - 1 + \frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}) -\right.\\ - (g-1)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) +\\ \left. + \left(g - \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\right],\end{aligned} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \frac{\sqrt{m^2+\boldsymbol{\pi}^2}}{m},$$

[1)] Аналогичная формула для частиц со спином 1 была найдена в [10].

где $g = 2\mu m/(eS)$, $\mathbf{v}$ — оператор скорости, $\gamma$ — лоренц-фактор, $Q$ — квадрупольный момент, $\mathbf{S}$ — оператор спина, $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля. В лагранжиане (2) величина $\mathcal{L}_1$ содержит линейные, а величина $\mathcal{L}_2$ – квадратичные по спину слагаемые. Эрмитов вид соотношения (2) получается с помощью замены

$$\mathcal{L} \to \frac{\mathcal{L}+\mathcal{L}^\dagger}{2}.$$

Зависящая от спина часть гамильтониана равна лагранжиану взаимодействия с обратным знаком:

$$\mathcal{H}^{(s)} = -\mathcal{L}.$$

Ту не зависящую от спина часть гамильтониана, которая существенна при выводе уравнений движения частиц, легко определить с помощью известной операции «удлинения» производной. Для свободных частиц в представлении ФВ зависимость между оператором Гамильтона и оператором импульса $\mathbf{p}$ для верхнего спинора имеет вид

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}.$$

При наличии внешнего поля операция «удлинения» производной приводит к замене

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H} - e\Phi, \quad \mathbf{p} \to \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}.$$

В результате полный гамильтониан определяется формулой

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(s)}, \quad \mathcal{H}^{(0)} = \sqrt{m^2+\boldsymbol{\pi}^2} + e\Phi = \gamma m + e\Phi,$$
$$\mathcal{H}^{(s)} = -\mathcal{L},$$

или

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2+\boldsymbol{\pi}^2} + e\Phi - (\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2). \qquad (3)$$

Подчеркнем, что в уравнении (3) оставлен только верхний спинор и пренебрегается коммутаторами операторов динамических переменных и их функций. Приближенная связь между операторами скорости и кинетического импульса описывается выражением

$$\mathbf{v} \approx \boldsymbol{\pi}/\epsilon' = \boldsymbol{\pi}/\gamma m.$$

Поэтому формулы (1) и (3) полностью согласуются между собой.

Наличие поляризации у электронов среды не изменяет вида гамильтониана (3), если пучок не содержит ни электронов, ни позитронов. Это происходит потому, что среднее поле, действующее на частицы в среде, характеризуется электрической напряженностью $\mathbf{E}$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}$.

Однако вид гамильтониана меняется, если пучок состоит из электронов или позитронов. Для электронов имеет место обменное взаимодействие, которое является весьма сильным[2)]. Основной вклад в него вносит кулоновское обменное взаимодействие, или кулоновское рассеяние. Обменное магнитное рассеяние дает существенно меньший вклад в гамильтониан, но в магнитных кристаллах по порядку величины он сравним с вкладом обычного магнитного поля (см. [11]). Известные формулы для амплитуды рассеяния, откуда можно получить выражение для эффективного гамильтониана взаимодействия (см. [11]), выведены для нерелятивистского случая $v \ll c$. В этом случае для электронов магнитное поле $\mathbf{B}$ в (3) необходимо заменить эффективным квазимагнитным полем [11]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B} \to \mathbf{G}_e = \mathbf{B} + \mathbf{H}^c_{eff} + \mathbf{H}^m_{eff},\\
&\mathbf{H}^c_{eff} = -\frac{4\pi|e|N}{mv^2}\mathbf{P},\\
&\mathbf{H}^m_{eff} = \frac{2\pi|e|N}{m}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n},
\end{aligned} \qquad (4)$$

где $N$ и $\mathbf{P} = \langle\boldsymbol{\sigma}'\rangle$ — плотность и вектор поляризации (средний спин) поляризованных электронов вещества, $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ — направление распространения пучка. Для нерелятивистских электронов, для которых справедлива формула (4), обычно

$$|\mathbf{H}^c_{eff}| \gg |\mathbf{B}|, \quad |\mathbf{H}^c_{eff}| \gg |\mathbf{H}^m_{eff}|$$

(см. [11]).

При взаимодействии позитронов с электронами вещества помимо взаимодействия, описываемого гамильтонианом (3), существует аннигиляционное взаимодействие, которое в нерелятивистском случае определяется оператором [19]

$$W_a = \frac{\pi e^2}{2m^2}\left[3 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}')\right]\delta(\mathbf{r}),$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}'$ — матрицы Паули для позитрона и электрона. Выражение для зависящей от спина части оператора аннигиляционного взаимодействия после усреднения приобретает вид ($\mathbf{P} = \langle\boldsymbol{\sigma}'\rangle$)

$$W^{(s)}_a = \frac{\pi e^2 N}{2m^2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P}\right). \qquad (5)$$

Эффективное поле $\mathbf{H}^a_{eff}$, соответствующее аннигиляционному взаимодействию, определяется по формуле:

$$W^{(s)}_a = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{H}^a_{eff},$$

2) Напомним, что обменное взаимодействие приводит к ферромагнетизму.

где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}$$

— оператор магнитного момента позитрона. Отсюда легко получить выражение для эффективного поля, действующего на нерелятивистские позитроны в поляризованных средах:

$$\mathbf{G}_p = \mathbf{B} + \mathbf{H}^a_{eff} = \mathbf{B} - \frac{\pi|e|N}{m}\mathbf{P}. \quad (6)$$

Формулы (4), (6) удобнее представить в более компактной форме записи, вводя вектор намагниченности (магнитного момента единицы объема) $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = -\frac{|e|N}{2m}\mathbf{P}.$$

При этом одновременно учитываются диа-, пара- и ферромагнитные эффекты, а формулы (4), (6) приобретают вид

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{B} + \frac{8\pi}{v^2}\mathbf{M} - 4\pi(\mathbf{M}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \quad \mathbf{G}_p = \mathbf{B} + 2\pi\mathbf{M}. \quad (7)$$

Для изотропно намагничивающихся веществ можно ввести магнитную проницаемость $\mu_m$, и в этом случае[3)]

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e &= \mathbf{B} + \frac{2(\mu_m - 1)}{\mu_m v^2}\mathbf{B} - \frac{\mu_m - 1}{\mu_m}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \\ \mathbf{G}_p &= \frac{3\mu_m - 1}{2\mu_m}\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулы (8) для электронов и позитронов в поляризованном веществе выведены в нерелятивистском приближении, которое допускает учет основных релятивистских поправок. В этом приближении соответствующее выражение для оператора Гамильтона, получаемое из (3) путем замены $\mathbf{B}$ на $\mathbf{G}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2} + e\Phi + \\ + \frac{e}{2m}\Big\{ g(\mathbf{S}\cdot\mathbf{G}) + (g-1)(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\Big\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{G}_e, \mathbf{G}_p$.

Формулы (4), (7)–(9) для электронов, содержащие пропорциональные $1/v^2$ слагаемые, справедливы только в тех случаях, когда скорости частиц не слишком малы. Представляет интерес рассмотрение предельного случая малых скоростей[4)]. Этот случай описывается обычной теорией обменного взаимодействия. Как известно, оно характеризуется оператором взаимодействия [21]

$$V = -\frac{1}{2}J[1 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}')],$$

где $J$ — обменный интеграл, а $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}'$ — матрицы Паули для электронов пучка и среды. После усреднения по координатам и суммирования по электронам вещества оператор $V$ приобретает вид

$$\langle V\rangle = -\frac{1}{2}\langle J\rangle[1 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{P})]. \quad (10)$$

Удобно ввести, как это было сделано выше, квазимагнитное поле $\mathbf{H}^c_{eff}$, которое определяется соотношением

$$\langle V\rangle = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{H}^c_{eff} = \frac{|e|}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}^c_{eff}).$$

В этом случае

$$\mathbf{H}^c_{eff} = -\frac{m}{|e|}\langle J\rangle\mathbf{P}, \quad (11)$$

а суммарное квазимагнитное поле, действующее на электроны пучка, имеет вид:

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} + \mathbf{H}^c_{eff}.$$

Вводя вектор намагниченности $\mathbf{M}$ и магнитную проницаемость $\mu_m$, преобразуем эту формулу к виду

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} + \frac{2m^2}{e^2N}\langle J\rangle\mathbf{M} = \mathbf{B} + \frac{m^2}{2\pi e^2 N}\,\frac{\mu_m - 1}{\mu_m}\langle J\rangle\mathbf{B}. \quad (12)$$

Проведем оценку величины квазимагнитного поля, определяемого формулами (11), (12), для частиц в конденсированных средах (парамагнитных и ферромагнитных). Обменный интеграл $J$ определяется путем усреднения оператора взаимодействия электронов $e^2/r$. Поэтому для оценки можно принять

$$J \sim e^2/a_0, \quad N \sim 1/a_0^3,$$

где $a_0$ — боровский радиус атома. Отсюда

$$\frac{m^2}{e^2N}\langle J\rangle \sim m^2a_0^2 \sim \frac{1}{\alpha^2},$$

3) Следует учитывать, что магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля $H$.

4) При кулоновском рассеянии электроны можно считать «быстрыми» («медленными»), если их скорость велика (мала) по сравнению с величиной $v_0 = e^2/\hbar \approx c/137$ [21]. Величина $v_0$ соответствует кинетической энергии электронов $mv_0^2/2 = 13.5$ эВ.

где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. В соответствии с этой оценкой

$$\mathbf{H}^c_{eff} \sim \frac{\mu_m - 1}{\alpha^2 \mu_m}\mathbf{B} \sim 10^4 \frac{\mu_m - 1}{\mu_m}\mathbf{B}.$$

Реальная величина $\mathbf{H}^c_{eff}$ может быть в несколько раз или на порядок меньше за счет неполного перекрывания волновых функций в обменном интеграле (см. [21]). Приведенная оценка квазимагнитного поля $\mathbf{H}^c_{eff}$ находится в полном согласии с теорией ферромагнетизма.

## 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ И СПИНА

В представлении ФВ мы получаем операторные уравнения движения частиц и спина, вычисляя коммутаторы гамильтониана $\mathcal{H}$ (определяемого формулами (3), (9)), с операторами $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{S}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = i[\mathcal{H}, \boldsymbol{\pi}] - e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = i[\mathcal{H}, \mathbf{S}]. \qquad (13)$$

Общее решение задачи о движении классической частицы со спином в электромагнитном и гравитационном полях приведено в [1, 2]. Квантовомеханическое уравнение движения релятивистских частиц с произвольным спином в электромагнитном поле, найденное в работе Дербенева и Кондратенко [3], имеет вид[5)]

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] - \frac{e}{2m}\nabla\left\{\left(g - 2 + \frac{2}{\gamma}\right)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}) - (g-2)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) + \left(g - 2 + \frac{2}{\gamma+1}\right)(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\right\}. \qquad (14)$$

Вид уравнений движения частиц в поляризованных средах не меняется по сравнению с (14), если выражение для гамильтониана остается неизменным. Изменение выражения для гамильтониана в этом случае имеет место только для электронов и позитронов.

[5)] В настоящей работе мы не учитываем движение частиц, обусловленное реакцией излучения. Оно существенно только при больших энергиях. В этом случае сила реакции излучения в основном приводит к замедлению частицы, а также к появлению сравнительно небольшой составляющей скорости в направлении, перпендикулярном к направлению ее первоначального движения.

Конечно, операторы Гамильтона для частиц со спинами $S = 1/2$ и $S \geq 1$ несколько различаются вследствие наличия в гамильтониане (3) слагаемых, квадратичных по спину. Однако данные слагаемые, как правило, весьма малы, и при анализе движения частиц их можно не учитывать. В пределах принятой в настоящей работе точности уравнения движения для частиц со спинами $S = 1/2$ и $S \geq 1$ совпадают.

Уравнение движения частицы (14) дает квантовомеханическое выражение для силы, действующей на частицу со стороны внешнего поля и вещества. Помимо силы Лоренца на частицу действует сила, обусловленная взаимодействием ее магнитного момента с неоднородным полем (сила Штерна–Герлаха (Stern–Gerlach) [22]). Эта сила действует со стороны как магнитного, так и электрического полей. В зависимости от ориентации магнитного момента (и, следовательно, спина) сила Штерна–Герлаха приводит либо к втягиванию частицы в область более сильного поля, либо к выталкиванию из нее. В результате происходит разделение пучка частиц по поляризациям.

Для электронов и позитронов в поляризованном веществе вид уравнений движения частиц существенно меняется. В соответствии с (9), (13), для этих частиц уравнение движения определяется формулой

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] - \frac{e}{2m}\nabla\Big\{g(\mathbf{S}\cdot\mathbf{G}) + (g-1)(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\Big\}. \qquad (15)$$

Анализ формулы (15) показывает, что для электронов в магнитных кристаллах, для которых величина $\mu_m - 1 \gtrsim 1$, сила Штерна–Герлаха существенно возрастает. Для позитронов этот эффект выражен значительно слабее.

Как отмечалось выше, для частиц с произвольным спином движение спина в однородном электромагнитном поле описывается уравнением БМТ [4]. При описании эффектов, обусловленных неоднородностью поля, необходимо учитывать квадратичные по спину слагаемые. Такие слагаемые содержатся в операторе Гамильтона только для частиц со спином $S \geq 1$. Уравнение движения спина с учетом этих слагаемых, приведенное в [10], имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{BMT} + \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{q}, \\
\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{BMT} = \frac{e}{2m}\left\{\left(g-2+\frac{2}{\gamma}\right)[\mathbf{S}\times\mathbf{B}] - \right. \\
- (g-2)\frac{\gamma}{\gamma+1}[\mathbf{S}\times\mathbf{v}](\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) + \\
\left. + \left(g-2+\frac{2}{\gamma+1}\right)[\mathbf{S}\times[\mathbf{E}\times\mathbf{v}]]\right\}, \\
\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{q} = \frac{Q}{4s(2s-1)}\times \\
\times\left(\left\{\left([\mathbf{S}\times\nabla] - \frac{\gamma}{\gamma+1}[\mathbf{S}\times\mathbf{v}](\mathbf{v}\cdot\nabla),\right.\right.\right. \\
\left((\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) + \right. \\
\left.\left.\left. + (\mathbf{S}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\right)\right\} + \right. \\
+ \left\{\left((\mathbf{S}\cdot\nabla) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\nabla),\right.\right. \\
\left([\mathbf{S}\times\mathbf{E}] - \frac{\gamma}{\gamma+1}[\mathbf{S}\times\mathbf{v}]\times\right. \\
\left.\left.\times(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) + [\mathbf{S}\times[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]]\right)\right\} + \\
+ \frac{e}{4m^2}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\left\{[\mathbf{S}\times[\mathbf{v}\times\nabla]],\right.\right. \\
\left[\left(g-1+\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}) - \right. \\
- (g-1)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) + \\
\left.\left. + \left(g - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{v}])\right)\right]\right\} + \\
+ \left\{(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\nabla]), \left[\left(g-1+\frac{1}{\gamma}\right)[\mathbf{S}\times\mathbf{B}]\right.\right. \\
- (g-1)\frac{\gamma}{\gamma+1}[\mathbf{S}\times\mathbf{v}](\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) + \\
\left.\left.\left.\left. + \left(g - \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)[\mathbf{S}\times[\mathbf{E}\times\mathbf{v}]]\right]\right\}\right)\right).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Величины $(d\mathbf{S}/dt)_{BMT}$ и $(d\mathbf{S}/dt)_q$ характеризуют движение спина, определяемое соответственно линейными и квадратичными по спину слагаемыми. Это уравнение можно получить с помощью формул (2), (3), (13). Отметим, что оператор $\epsilon' = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}$ не влияет на движение спина.

Принципиальной особенностью уравнений для частиц со спином $1/2$ является обращение в нуль квадратичных по спину слагаемых. Для частиц с $S \geq 1$ квадратичные по спину слагаемые в уравнении (16) приводят не только к повороту, но и к осцилляциям спина частиц в неоднородном поле [23–25].

В поляризованных средах для всех частиц, кроме электронов и позитронов, вид уравнения движения спина остается неизменным. Для нерелятивистских электронов и позитронов получаемое с помощью уравнений (9), (13) уравнение движения спина имеет вид

$$
\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{e}{2m}\left\{g[\mathbf{S}\times\mathbf{G}] + (g-1)[\mathbf{S}\times[\mathbf{E}\times\mathbf{v}]]\right\}. \tag{17}
$$

Из сравнения уравнений (15) и (17) следует, что движение спина в гораздо большей степени, чем движение частиц, зависит от обменного взаимодействия, определяющего величину квазимагнитного поля $\mathbf{G}$.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Проведенное исследование показывает, что движение частиц и спина в средах с поляризованными электронами обладает рядом особенностей. Хотя уравнения движения частиц и спина в поляризованных средах и в вакууме совпадают (исключение составляют электроны и позитроны), величины магнитного поля в этих случаях могут существенно различаться. Тангенциальные составляющие вектора индукции магнитного поля в веществе ($B_\tau$) и в вакууме ($B_{0\tau}$) связаны соотношением[6)]

$$
B_\tau = \mu_m B_{0\tau}.
$$

Для соответственно выбранной геометрии кристалла[7)] индукция магнитного поля внутри кристалла во много раз больше, чем в вакууме. Так, при $\mu_m = 10^3$ имеем $B_0 = B_{0\tau} = 10^{-3}$ Тл, $B = B_\tau = 1$ Тл. Такие значения магнитной индукции могут достигаться за счет остаточной намагниченности и при отсутствии внешнего поля. Поэтому магнитные кристаллы могут эффективно использоваться для поворота вектора поляризации пучка.

Даже для нейтронов, магнитный момент которых сравнительно мал, при $B \sim 1$ Тл угол поворота вектора поляризации на единицу длины пройденного расстояния имеет порядок величины

$$
\Delta\Phi/\Delta l \sim (c/v)\cdot 10^{-3}\ \text{рад/см}.
$$

6) Следует учитывать, что магнитная проницаемость ферромагнетиков $\mu_m$ зависит от напряженности магнитного поля.

7) Желательно, чтобы длина кристалла в направлении магнитного поля существенно превышала его размеры в других направлениях. Это обеспечивает малость коэффициента размагничения.

Для быстрых нейтронов при $v/c \sim 10^{-2}$ поворот вектора поляризации на угол порядка 1 рад достигается при длине кристалла $l \sim 10$ см. Для медленных нейтронов эффект еще больше.

Позитроны, например, образующиеся при $\beta^+$-распаде, обычно бывают релятивистскими. Поэтому для них мы проведем оценку угла поворота спина с помощью общей формулы (16). При $B = 1$ Тл, $\gamma = 5$ угол поворота вектора поляризации на единицу длины по порядку величины равен

$$\Delta\Phi/\Delta l \sim 1 \text{ рад/см}.$$

Если пучок позитронов проходит через кристалл в режиме плоскостного каналирования, то вектор магнитной индукции должен лежать в плоскости, содержащей направление распространения пучка (ось $z$) и нормаль к системе кристаллографических плоскостей (ось $x$). Если вектор $\mathbf{B}$ коллинеарен оси $y$, то вследствие смещения траектории пучка под действием магнитного поля появляющаяся электрическая составляющая силы Лоренца компенсирует магнитную. В результате среднее значение силы Лоренца оказывается равным нулю. В этом случае $\langle \mathbf{E} \rangle = -[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ и угол поворота спина уменьшается приблизительно в $\gamma$ раз.

Поворот вектора поляризации в магнитных кристаллах оказывается особенно большим для нерелятивистских электронов. Как следует из формул (8), (9), для них угловая скорость прецессии спина благодаря обменному взаимодействию увеличивается на дополнительный множитель $(c/v)^2$. При $B \sim 1$ Тл имеем по порядку величины

$$\Delta\Phi/\Delta l \sim (c/v)^3 \cdot 1 \text{ рад/см}.$$

В частности, если $v/c \sim 0.1$, то

$$\Delta\Phi/\Delta l \sim 10^3 \text{ рад/см}.$$

Достаточно эффективным может оказаться использование магнитных кристаллов и для поворота вектора поляризации релятивистских электронов.

Поляризация среды также оказывает существенное влияние на движение частиц. Сила Штерна–Герлаха, разделяющая пучок частиц по поляризации, при этом значительно увеличивается. Большая величина градиента магнитного поля может быть получена как путем помещения ферромагнитного образца в сильно неоднородное внешнее поле, так и путем придания образцу формы (например, формы треугольной призмы), обеспечивающей неоднородность магнитного поля. Однако использованию поляризованных сред для разделения пучков по поляризации очень серьезно препятствуют малая величина энергии взаимодействия спина электронов с квазимагнитным полем $\mathcal{H}^{(s)}$ (порядка 1 эВ или меньше) и многократное рассеяние, увеличивающее поперечную энергию электронов пучка. Если поперечная энергия электронов пучка превышает $|\mathcal{H}^{(s)}|$, разделение пучка по поляризациям заведомо невозможно.

Отметим другие явления, сопровождающие прохождение поляризованных пучков частиц через поляризованное вещество. Многократное рассеяние на электронах вещества приводит к деполяризации пучка [26, 27]. Зависимость сечения рассеяния на поляризованных электронах от поляризации пучка ведет к дихроизму. Следствием этого является преобладание одного из направлений поляризации (параллельно или антипараллельно полю) для пучка, выходящего из вещества. Для произвольно поляризованного пучка дихроизм приводит к дополнительному повороту вектора поляризации [11, 15]. Явления деполяризации и дихроизма необходимо учитывать при точных расчетах. Отметим также расщепление уровней поперечной энергии электронов при каналировании в магнитных кристаллах [28].

Таким образом, в настоящей работе найдены квантовомеханические уравнения движения частиц и спина в средах с поляризованными электронами. При нахождении уравнений учитывалось обменное взаимодействие для пучков электронов и аннигиляционное — для пучков позитронов. Для частиц с $S \geq 1$ учтены слагаемые второго порядка по спину. Анализ полученных уравнений показывает, что во многих случаях обменное взаимодействие многократно увеличивает угловую скорость вращения спина электронов в поляризованном веществе.

Все полученные в настоящей работе результаты справедливы и для пучков поляризованных ядер.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Барышевскому за замечания, сделанные в процессе написания работы и при обсуждении полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

**1**. И. М. Тернов, В. А. Бордовицын, УФН **132**, 345 (1980).

**2**. K. Yee and M. Bander, Phys. Rev. D **48**, 2797 (1993).

**3**. Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, ЖЭТФ **64**, 1918 (1973).

**4**. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

**5**. D. M. Fradkin and R. H. Good, Rev. Mod. Phys. **33**, 343 (1961).

**6**. D. Zwanziger, Phys. Rev. B **139**, 1318 (1965).

**7**. А. А. Померанский, И. Б. Хриплович, ЖЭТФ **113**, 1537 (1998).

**8**. D. P. Barber, Preprint DESY-98-096A (1998); E-print archives/physics/9901038.

**9**. A. A. Pomeransky and R. A. Sen'kov, Phys. Lett. B **468**, 251 (1999).

**10**. А. Я. Силенко, ЯФ **64**, 1054 (2001).

**11**. В. Г. Барышевский, *Ядерная оптика поляризованных сред*, Энергоатомиздат, Москва (1995).

**12**. А. Я. Силенко, ТМФ **105**, 46 (1995).

**13**. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).

**14**. В. Г. Барышевский, ДАН БССР **35**, 416 (1991).

**15**. V. G. Baryshevsky, Phys. Lett. A **171**, 431 (1992).

**16**. V. G. Baryshevsky, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **19**, 273 (1993).

**17**. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин, *Излучение релятивистских электронов*, Атомиздат, Москва (1973).

**18**. И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, Изд-во МГУ, Москва (1982).

**19**. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).

**20**. А. Я. Силенко, ЖЭТФ **114**, 1153 (1998).

**21**. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).

**22**. K. Heinemann, Preprint № 96-11001; E-print archives/physics/9611001.

**23**. В. Г. Барышевский, А. А. Сокольский, Письма в ЖТФ **6**, 1419 (1980).

**24**. В. Г. Барышевский, *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях*, Изд-во БГУ, Минск (1982).

**25**. V. G. Baryshevsky and A. J. Shechtman, Nucl. Instr. Meth. B **83**, 250 (1993).

**26**. В. Л. Любошиц, ЯФ **32**, 702 (1980).

**27**. V. G. Baryshevsky, Nucl. Instr. Meth. B **44**, 266 (1990).

**28**. В. И. Высоцкий, Р. Н. Кузьмин, Н. В. Максюта, Поверхность № 12, 137 (1998).