ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 4, стр. 665–671

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ С РАЗНЫМИ МАССАМИ

*А. В. Захаров**, *Р. К. Мухарлямов*

Казанский государственный энергетический университет
420008, Казань, Россия

Поступила в редакцию 10 ноября 2002 г.

Работа посвящена выводу с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию макроскопических уравнений Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами и обобщает результаты работ [1, 2], применимые лишь для системы гравитационно взаимодействующих частиц с одинаковыми массами.

PACS: 95.30.Jf, 95.10.Fh

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является обобщением работ [1, 2], посвященных выводу макроскопических уравнений Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию для системы гравитационно взаимодействующих частиц. Результаты предыдущих работ обобщаются на системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

Макроскопические уравнения Эйнштейна приведены к виду

$$G_{ij} + \varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij} = \chi T_{ij},$$

где G_{ij} — тензор Эйнштейна, T_{ij} — тензор энергии-импульса, χ — гравитационная постоянная Эйнштейна. Точка с запятой обозначает ковариантную производную. Новые члены в левой части полученных уравнений обусловлены взаимодействием частиц. Они представляют собой бесследовые тензоры с равной нулю дивергенцией. Дано явное ковариантное выражение для этих членов через интегралы по импульсному пространству от выражений, зависящих от одночастичных функций распределения взаимодействующих частиц среды. Данные выражения пропорциональны кубу постоянной Эйнштейна и квадрату от плотности частиц. Последний факт означает, что эффекты взаимодействия могут проявиться лишь в системах с достаточно большой плотностью (Вселенная на ранних стадиях эволюции, плотные объекты, близкие к состоянию гравитационного коллапса и др.), либо в макросистемах, состоящих из объектов большой массы (скопления галактик).

2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Метод получения макроскопических уравнений Эйнштейна изложен в [1]. Обозначения в данной статье также совпадают с обозначениями [1].

Получение макроскопических уравнений Эйнштейна заключается в следующем.

Выписываем систему микроскопических уравнений Эйнштейна

$$\tilde{G}^{ij} = \chi \tilde{T}^{ij}. \tag{1}$$

Здесь $\tilde{G}^{ij}$ — тензор Эйнштейна риманова пространства с метрикой $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{T}^{ij}$ — микроскопический тензор энергии-импульса:

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_a c \int \frac{d^4 \tilde{p}_a}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{p}^i_a \tilde{u}^j_a \tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j), \tag{2}$$

$\tilde{g}$ — определитель метрики $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{p}^i_a$ — импульс частиц сорта a, $\tilde{u}^i_a = \tilde{p}^i_a / \sqrt{\tilde{g}_{kj}\tilde{p}^k_a \tilde{p}^j_a}$, $\chi = 8\pi k/c^4$ — посто-

*E-mail: Alexei.Zakharov@ksu.ru

янная Эйнштейна, k — гравитационная постоянная, $\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j)$ — случайная функция Климонтовича [3]:

$$\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j) = \sum_{i=1}^{n_a} \int d\tilde{s}\delta^4(q^i - q^i_{(l)})\delta^4(\tilde{p}_j - \tilde{p}^{(l)}_j(\tilde{s})). \quad (3)$$

Здесь n_a — число частиц сорта a, $\tilde{s}$ — канонический параметр вдоль траектории частиц: $d\tilde{s} = \sqrt{\tilde{g}_{ij}dq^i dq^j}$, $q^i_{(l)}$, $\tilde{p}^{(l)}_j$ — координаты и импульс l-й частицы сорта a, которые определяются из уравнений движения (уравнений геодезических). Функция $\tilde{N}_a$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik}\tilde{p}^j\tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \quad (4)$$

Далее метрика $\tilde{g}_{ij}$ представляется в виде

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \quad (5)$$

где $g_{ij} = \langle \tilde{g}_{ij} \rangle$ — усредненная по ансамблю метрика [1, 2]. В системе (1), (2), (4) переходим от величин, измеренных в метрике $\tilde{g}_{ij}$, к величинам, измеренным в метрике g_{ij}. Все такие величины обозначаются без знака тильда сверху. В результате система (1), (2), (4) приобретает вид

$$R_{ij} + \nabla_m \Omega^m_{ij} - \nabla_j \Omega^m_{im} + \Omega^m_{mn}\Omega^n_{ij} - \Omega^m_{jn}\Omega^n_{im} = \\ = \chi \sum_a \int \frac{d^4p}{\sqrt{-g}} \alpha \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \left[\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jm} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{km}\right] \times \\ \times p^k p^m N_a, \quad (6)$$

$$p^i \frac{\partial N_a}{\partial q^i} + \Gamma_{j,ik}p^k p^j \frac{\partial N_a}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}(\Omega^m_{jk}\Delta_{mi}p^j p^k N_a). \quad (7)$$

Здесь p^i — импульс, измеряемый в метрике g_{ij}, N_a — случайная функция в пространстве с метрикой g_{ij}. Выражение для нее получается из (3) опусканием во всех величинах знака $\sim$; $\Omega^m_{kj} = \tilde{\Gamma}^m_{kj} - \Gamma^m_{kj}$ — разность символов Кристоффеля второго рода для метрик $\tilde{g}_{ij}$ и g_{ij}, $\Delta_{ij} = g_{ij} - u_i u_j$, $u_i = p_i/\sqrt{p_l p^l}$.

Следующим этапом было разложение уравнений (6) с точностью до членов второго порядка по величинам h_{ij} и усреднение полученных уравнений по ансамблю. В случае, когда мы ограничиваемся получением усредненных уравнений с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию, можно получить замкнутую систему уравнений для одночастичной функции распределения $f_a(q, p) = \langle N_a \rangle / n_a$ и для усредненной метрики g_{ij}. Уравнение для f_a получено ранее в [1, 4] и имеет вид

$$u^i \frac{\partial f_a}{\partial q^i} + u^j p^k \Gamma_{j,ik} \frac{\partial f_a}{\partial p_i} = \\ = \sum_b \int \frac{d^4p}{\sqrt{-g}} E_{ij}(p, p') \left(\frac{\partial f_a}{\partial p_j} f'_b - \frac{\partial f'_b}{\partial p'_j} f_a\right), \quad (8)$$

где

$$E_{ij}(p, p') = \frac{2\pi k^2 L n_b}{c^6[(u, u')^2 - 1]^{3/2}} \times \\ \times [2(u, u')(p, p') - (u, p)(u', p')]^2 \{-g_{ij}[(u, u')^2 - 1] - \\ - u_i u_j - u'_i u'_j + (u, u')(u_i u'_j + u'_i u_j)\}. \quad (9)$$

Здесь $(u, u') = u'_i u^i$, $(u, u) = u_i u^i$ и т. д. Величины, помеченные штрихом, относятся к частицам сорта b, величины без штриха — к частицам сорта a. Величина L — аналог кулоновского логарифма [4, 5]

$$L = \int_{k_{min}}^{k_\infty} \frac{dk}{k}. \quad (10)$$

Для усредненной метрики g_{ij} уравнения доведены в [2] до следующего вида:

$$G_{ij} + \varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij} = \chi T_{ij}, \quad (11)$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную в пространстве с метрикой g_{ij}, G_{ij} — тензор Эйнштейна этого пространства, T_{ij} — макроскопический тензор энергии-импульса.

Тензоры φ^k_{ij} и μ_{ij} выражаются через одночастичные функции распределения f_b ,заданные в восьмимерном фазовом пространстве, в котором все четыре компоненты четырехмерного импульса считаются независимыми:

$$\varphi^k_{ij} = -(1/2)(\delta^k_n \delta^s_j - \delta^k_j \delta^s_n) P^n_{is},$$

где

$$P^n_{is} = \sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b m_c n_b n_c c^6}{8(2\pi)^3} \int d^4p' \times \\ \times \int d^4p'' f_b(x') f_c(x'') \left[1 - 10(u'u'')^2\right] \times \\ \times \left(u'^n u'_l - \frac{1}{2}\delta^n_l\right) \left[\left(u''_i u''_s - \frac{1}{2}g_{is}\right) g^{lf} - \right. \\ \left. - \left(u''^l u''_i - \frac{1}{2}\delta^l_i\right)\delta^f_s - \left(u''^l u''_s - \frac{1}{2}\delta^l_s\right)\delta^f_i\right] \times \\ \times \left(m_c u'^m K^{(1)}_{fm}(u', u'') + m_b u''^m K^{(2)}_{fm}(u', u'')\right) -$$

$$
-\sum_{bc}\frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{4(2\pi)^3}\int d^4p'\int d^4p''\left(u'^n u'_l-\frac{1}{2}\delta_l^n\right)\times
\times\left[\left(u''_i u''_s-\frac{1}{2}g_{is}\right)g^{lf}-\left(u''^l u''_i-\frac{1}{2}\delta_i^l\right)\delta_s^f-
-\left(u''^l u''_s-\frac{1}{2}\delta_s^l\right)\delta_i^f\right]\left\{\left[(u'u'')^2(\delta_j^m+u'_j u'^m)-
-\frac{1}{2}(\delta_j^m-u'_j u'^m)-2(u'u'')u'^m u''_j\right]\times
\times f_c(x'')\frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_j}K_{fm}^{(1)}(u',u'')+
+\left[(u'u'')^2(\delta_j^m+u''_j u''^m)-\frac{1}{2}(\delta_j^m-u''_j u''^m)-
-2(u'u'')u''^m u'_j\right]f_b(x')\frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_j}K_{fm}^{(2)}(u',u'')\right\}, \quad (12)
$$

$$
\mu_{ij}=\sum_{bc}\frac{\chi^3 m_b m_c n_b n_c c^6}{16(2\pi)^3}\int\frac{d^4p'}{\sqrt{-g}}\times
\times\int\frac{d^4p''}{\sqrt{-g}}f_b(x')f_c(x'')\left(1-10(u'u'')^2\right)\times
\times\left\{u'^q u'_j\delta_i^r-u''^r u''_j\delta_i^q+g^{qr}\left[\left((u'u'')^2+\frac{1}{2}\right)u''_i u''_j+\right.\right.
+\frac{1}{2}\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)g_{ij}-2(u'u'')u'_i u''_j\Big]-
-\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)\delta_i^q\delta_j^r\Big\}\left(m_c u'^m J_{rqm}^{(1)}(u,'u'')+\right.
+m_b u''^m J_{rqm}^{(2)}(u,'u'')\Big)-\sum_{bc}\frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3}\times
\times\int\frac{d^4p'}{\sqrt{-g}}\int\frac{d^4p''}{\sqrt{-g}}\Big\{u'^q u'_j\delta_i^r-u''^r u''_j\delta_i^q+g^{qr}\times
\times\left[\left((u'u'')^2+\frac{1}{2}\right)u''_i u''_j+\frac{1}{2}\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)g_{ij}-\right.
-2(u'u'')u'_i u''_j\Big]-\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)\delta_i^q\delta_j^r\Big\}\times
\times\left\{\left[\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)\delta_f^m+\left((u'u'')^2+\frac{1}{2}\right)u'_f u'^m-\right.\right.
-2(u'u'')u''_f u'^m\Big]J_{rqm}^{(1)}(u',u'')f_c(x'')\frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_f}+
+\left[\left((u'u'')^2-\frac{1}{2}\right)\delta_f^m+\left((u'u'')^2+\frac{1}{2}\right)u''_f u''^m-\right.
-2(u'u'')u'_f u''^m\Big]J_{rqm}^{(2)}(u',u'')f_b(x')\frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_f}\Big\}. \quad (13)
$$

В (12) введены обозначения $K_{fm}^{(1)}(u',u'')$ и $K_{fm}^{(2)}(u',u'')$ для тензоров, имеющих в локально лоренцевой системе координат, где $g_{ij}=\eta_{ij}$ — тензор Минковского, следующий вид:

$$
K_{fm}^{(1)}(u',u'')=\frac{1}{u'^0u''^0}\int\frac{d^3k}{k^3}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int_{-\infty}^{\eta}d\eta''\times
\times\int_{-\infty}^{\eta'}d\tau'\int_{-\infty}^{\tau'}d\tau''\left(e^{ik(\eta'-\eta)}-e^{-ik(\eta'-\eta)}\right)\times
\times\left(k_f^+e^{ik(\eta''-\eta)}-k_f^-e^{-ik(\eta''-\eta)}\right)\times
\times\left(k_m^+e^{-ik(\tau''-\tau')}-k_m^-e^{ik(\tau''-\tau')}\right)\times
\times\exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right],
$$

$$
K_{fm}^{(2)}(u',u'')=\frac{1}{u'^0u''^0}\int\frac{d^3k}{k^3}\int_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int_{-\infty}^{\eta}d\eta''\times
\times\int_{-\infty}^{\eta''}d\tau''\int_{-\infty}^{\tau''}d\tau'\left(e^{ik(\eta'-\eta)}-e^{-ik(\eta'-\eta)}\right)\times
\times\left(k_f^+e^{ik(\eta''-\eta)}-k_f^-e^{-ik(\eta''-\eta)}\right)\times
\times\left(k_m^+e^{-ik(\tau''-\tau')}-k_m^-e^{ik(\tau''-\tau')}\right)\times
\times\exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right].
$$

После вычисления интегралов по τ', τ'', η', η'' эти выражения принимают вид

$$
K_{fm}^{(1)}(u',u'')=\frac{2\pi c^5}{u'^0u''^0}\int\frac{d^3k}{k^2}\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}''-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')\times
\times\left\{\frac{k_f^+k_m^+}{(kc-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')(kc+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^3}+\right.
+\frac{k_f^+k_m^-+k_f^-k_m^+}{(kc-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^2(kc+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^2}+
\left.+\frac{k_f^-k_m^-}{(kc-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^3(kc+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')}\right\}=K_{fm}(u',u''), \quad (14)
$$

$$
K_{fm}^{(2)}(u',u'')=-K_{fm}^{(1)}(u',u'')=-K_{fm}(u',u''). \quad (15)
$$

Данные равенства справедливы только в локально лоренцевой системе отсчета. Для того чтобы получить ковариантные выражения для тензоров $K_{fm}^{(1)}(u',u'')$ и $K_{fm}^{(2)}(u',u'')$ учтем, что оба этих тензора должны вычисляться в одной системе отсчета. Удобно в качестве такой системы выбрать систему центра импульса, в которой $\mathbf{p}''=-\mathbf{p}'$. В этой системе отсчета

$$K_{00} = K_{0\alpha} = 0, \quad K_{\alpha\beta} = \\ = \frac{4\pi^2 c}{v' u'_0 u''_0 k^2_{min}(1+m_b u'_0/m_c u''_0)} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2}\right). \quad (16)$$

Здесь $v' = \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}$, $v'_\alpha = v'^\alpha = u'^\alpha/u'^0$ — пространственные компоненты вектора $\mathbf{v}'$.

Ковариантное обобщение (16) имеет вид

$$K_{ij}(u', u'') = \frac{4\pi^2}{k^2_{min}[(u'u'')^2 - 1]^{3/2}} \{-[(u'u'')^2 - 1] g_{ij} - \\ - u'_i u'_j - u''_i u''_j + (u'u'')(u'_i u''_j + u''_i u'_j)\}. \quad (17)$$

Выражения для $K^{(1)}_{fm}(u', u'')$ и $K^{(2)}_{fm}(u', u'')$ оказались расходящимися при $k \to 0$, т. е. при больших прицельных расстояниях. Это связано с тем, что мы интегрируем по бесконечной области, в то время как на самом деле нужно ограничиваться интегрированием только по области корреляции, где мы считали метрику слабо меняющейся. Данную трудность, также как и при выводе кинетического уравнения, следует обходить введением обрезания в расходящемся интеграле

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}.$$

Нижний предел интегрирования положим равным не нулю, а величине $k_{min} = 1/r_{max}$, где r_{max} — размер области корреляции (радиус корреляции). Тогда предыдущий интеграл принимает значение $1/2k^2_{min} = (1/2) r^2_{max}$. Опыт вывода релятивистского кинетического уравнения (см. [5, 6]) показывает, что при более тщательном исследовании интегралы становятся сходящимися при $r \to \infty$, причем вклад в интегралы от области $r > r_{max}$ пренебрежимо мал. В [5, 6] даны оценки для величины r_{max} в случае, когда усредненная метрика g_{ij} есть метрика изотропной космологической модели.

Тензор (17) обладает свойствами:

$$K_{ij}(u', u'') = K_{ij}(u'', u'); \\ K_{ij} u'^i = K_{ij} u''^i = 0; \quad K_{ij} = K_{ji}. \quad (18)$$

Вследствие этого выражение для P^n_{is} существенно упрощается. В макроскопические уравнения Эйнштейна входит не тензор P^n_{is}, а тензор $\varphi^k_{ij} = -(1/2)(\delta^k_n \delta^s_j - \delta^k_j \delta^s_n) P^n_{is}$. Выражение для этого тензора приводится к виду

$$\varphi^k_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{-g}} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} g^{fk} u''_i u''_j + u'^k (u'u'')(\delta^f_j u''_i + \delta^f_i u''_j)\right] \times \\ \times \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right) K_{fr}(u', u'') \times \\ \times \left(f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_r} - f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_r}\right). \quad (19)$$

Отметим, что

$$g^{ij} \varphi^k_{ij} = 0, \quad \varphi^i_{ij} = 0, \quad \varphi^k_{ij} = \varphi^k_{ji}. \quad (20)$$

В (13) введены обозначения $J^1_{rqm}(u', u'')$ и $J^2_{rqm}(u', u'')$ для тензоров, которые в локально лоренцевой системе отсчета имеют вид:

$$J^{(1)}_{lmn}(u', u'') = \frac{1}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\eta'} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \left(k_l^+ e^{-ik(\eta'-\eta)} - k_l^- e^{ik(\eta'-\eta)}\right) \times \\ \times \left(k_m^+ e^{ik(\eta''-\eta)} - k_m^- e^{-ik(\eta''-\eta)}\right) \times \\ \times \left(k_n^- e^{ik(\tau''-\tau')} - k_n^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')(\tau' - \eta')\right],$$

$$J^{(2)}_{lmn}(u', u'') = \frac{1}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\eta''} d\tau'' \int_{-\infty}^{\tau''} d\tau' \left(k_l^+ e^{-ik(\eta'-\eta)} - k_l^- e^{ik(\eta'-\eta)}\right) \times \\ \times \left(k_m^+ e^{ik(\eta''-\eta)} - k_m^- e^{-ik(\eta''-\eta)}\right) \times \\ \times \left(k_n^- e^{ik(\tau''-\tau')} - k_n^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta')\right].$$

После вычисления интегралов по $\eta', \eta'', \tau', \tau''$ имеем

$$J^{(1)}_{lmn}(u', u'') = \frac{c^4}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \frac{\text{V.p.}}{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'' - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}')} \times \\ \times \left\{\frac{k_l^+ k_m^+ k_n^+}{(kc + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^3} + \right. \\ + \frac{k_l^+ k_m^+ k_n^- + k_l^+ k_m^- k_n^+ + k_l^- k_m^+ k_n^+}{(kc + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^2 (kc - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')} +$$

$$+\frac{k_l^+k_m^-k_n^- + k_l^-k_m^+k_n^- + k_l^-k_m^-k_n^+}{(kc+\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')(kc-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^2} + \\ + \frac{k_l^-k_m^-k_n^-}{(kc-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'')^3}\Bigg\}. \quad (21)$$

Выражение для $J_{lmn}^{(2)}(u',u'')$ получается из выражения для $J_{lmn}^{(1)}(u',u'')$ заменой $\mathbf{v}'\to\mathbf{v}''$ и наоборот. Символ V.p. означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Так же как и в предыдущем случае, конкретизируем (21) в системе центра импульсов, в которой $\mathbf{p}''=-\mathbf{p}'$. В этой системе отсчета компоненты $J_{lmn}^{(1)}(u',u'')$ имеют вид (пространственные индексы у трехмерного вектора скорости v'^α опускаются с помощью трехмерного символа Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$):

$$J_{000} = -\frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}\right)^3\times \\ \times\alpha\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\frac{v'^2}{c^2}, \quad (22)$$

$$J_{00\alpha} = -\frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}\right)^2\times \\ \times\alpha\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\frac{v'_\alpha}{c}, \quad (23)$$

$$J_{0\alpha\beta} = -\frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}\right)\times \\ \times\alpha\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\times \\ \times\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}\right)\beta\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2}\right), \quad (24)$$

$$J_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\alpha\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\times \\ \times\frac{c^2}{v'^2}\left[\delta_{\alpha\beta}\frac{v'_\gamma}{c}+\delta_{\alpha\gamma}\frac{v'_\beta}{c}+\delta_{\beta\gamma}\frac{v'_\alpha}{c}-2\frac{v'_\alpha v'_\beta v'_\gamma}{cv'^2}\right] + \\ + \frac{2}{(1+m_bu_0'/m_cu_0'')}\frac{1}{u_0'u_0''}\beta\left(\frac{m_bu_0'}{m_cu_0''}v'\right)\times \\ \times\frac{c^2}{v'^2}\left[\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{v'_\alpha v'_\beta}{v'^2}\right)\frac{v'_\gamma}{c} + \right. \\ \left. +\left(\delta_{\alpha\gamma}-\frac{v'_\alpha v'_\gamma}{v'^2}\right)\frac{v'_\beta}{c}+\left(\delta_{\beta\gamma}-\frac{v'_\beta v'_\gamma}{v'^2}\right)\frac{v'_\alpha}{c}\right]. \quad (25)$$

Функции α и β в (22) — (25) зависят только от аргумента $w=(m_bu_0'/m_cu_0'')v'$. Их явный вид следующий:

$$\alpha = \frac{\pi c^3}{w^3k_{min}}\left[\frac{2\dfrac{w}{c}\left(1+\dfrac{w^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{w^2}{c^2}\right)^2}+\ln\left(\frac{1-\dfrac{w}{c}}{1+\dfrac{w}{c}}\right)\right], \quad (26)$$

$$\beta = \frac{\pi c^3}{2w^3k_{min}}\left[\frac{2\dfrac{w}{c}\left(3-2\dfrac{w^2}{c^2}+3\dfrac{w^4}{c^4}\right)}{\left(1-\dfrac{w^2}{c^2}\right)^2} + \right. \\ \left. +3\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\ln\left(\frac{1-\dfrac{w}{c}}{1+\dfrac{w}{c}}\right)\right]. \quad (27)$$

Здесь введено обозначение для интеграла

$$\frac{1}{k_{min}} = \int\limits_{k_{min}}^{\infty}\frac{dk}{k^2}.$$

По соображениям, указанным выше, здесь мы вновь нижний предел положили равным $k_{min} = 1/r_{max}$.

Ковариантное обобщение данных результатов, полученных в локально лоренцевой системе отсчета центра масс, на произвольные системы отсчета имеет вид

$$J_{ijk}^{(1)}(u',u'') = J_{ijk}^{(2)}(u'',u') = J_{ijk}(u',u''), \quad (28)$$

$$J_{ijk}(u',u'') = A\Big[(g_{ij}u'_k+g_{ik}u'_j+g_{jk}u'_i) - \\ - z(g_{ij}u''_k+g_{ik}u''_j+g_{jk}u''_i) - \\ - (u'_iu''_ju''_k+u''_iu'_ju''_k+u''_iu''_ju'_k)+3zu''_iu''_ju''_k\Big] + \\ + C\Big[u'_iu'_ju'_k - z(u'_iu'_ju''_k+u'_iu''_ju'_k+u''_iu'_ju'_k) + \\ + z^2(u'_iu''_ju''_k+u''_iu'_ju''_k+u''_iu''_ju'_k)-z^3u''_iu''_ju''_k\Big], \quad (29)$$

где $z=(u'u'')=(u'^iu''_i)$,

$$A = \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(\mu^2+2\mu z+1)^{1/2}(1+\mu z)^2}{\mu^3(z^2-1)^{5/2}}\times \\ \times\left[\frac{2\mu\sqrt{z^2-1}(1+3\mu^2+2\mu z-2\mu^2z^2)}{(1+\mu z)(\mu^2+2\mu z+1)} + \right. \\ \left. +\frac{1-3\mu^2+2\mu z+4\mu^2z^2}{(1+\mu z)^2}\ln\left(\frac{1+\mu z-\mu\sqrt{z^2-1}}{1+\mu z+\mu\sqrt{z^2-1}}\right)\right], \quad (30)$$

$$C = \frac{\pi}{k_{min}} \frac{(\mu z + 1)}{(1+2\mu z+\mu^2)^{1/2}\mu^3(z^2-1)^{7/2}} \times \times \left[2\mu\sqrt{z^2-1}(5+7\mu^2+10\mu z - 2\mu^2 z^2) + + \frac{(1+2\mu z+\mu^2)}{(1+\mu z)}(5-7\mu^2+10\mu z+12\mu^2 z^2) \times \times \ln\left(\frac{1+\mu z-\mu\sqrt{z^2-1}}{1+\mu z+\mu\sqrt{z^2-1}}\right)\right]. \quad (31)$$

Здесь $\mu = m_b/m_c$.

При $\mu = 1$ данные результаты совпадают с ранее полученными результатами в [2].

Таким образом, мы обобщили результаты работы [2] на случай многокомпонентной системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

Тензор $J_{ijk}(u', u'')$ удовлетворяет тождеству

$$J_{ijk}(u', u'')u''^k = 0. \quad (32)$$

Вследствие свойств (28), (32) мы можем выражение (13) для μ_{ij} записать в следующем ковариантном виде:

$$\mu_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{-g}} \times \times \left\{ \left[\left(z^2+\frac{1}{2}\right)(u''_i u''_j + u'_i u'_j) + + \left(z^2-\frac{1}{2}\right) g_{ij} - 2z(u'_i u''_j + u''_i u'_j)\right] g^{qr} - - 2\left(z^2-\frac{1}{2}\right)\delta_i^q \delta_j^r \right\},$$

$$f_c(x'') \frac{\partial}{\partial p'_f} \left\{ f_b(x') \left[\left(z^2-\frac{1}{2}\right)\delta_f^m + + \left(z^2+\frac{1}{2}\right) u'_f u'^m - 2z u''_f u'^m \right]\right\} J_{rqm}(u', u''). \quad (33)$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\frac{\partial}{\partial p'_f}\left[\left(z^2-\frac{1}{2}\right)\delta_f^m + \left(z^2+\frac{1}{2}\right)u'_f u'^m - 2zu''_f u'^m\right] = = \left(5z^2-\frac{1}{2}\right)\frac{u'^m}{m_b c}.$$

Отметим, что тензор μ_{ij} является бесследовым:

$$g^{ij}\mu_{ij} = 0. \quad (34)$$

Тензоры φ_{ij}^k и μ_{ij} выражаются по формулам (19), (33) через одночастичные функции распределения f_b, заданные в восьмимерном фазовом пространстве, в котором все четыре компоненты четырехмерного импульса считаются независимыми. Переход к семимерной функции распределения F_b осуществляется по правилу

$$n_b f_b(q^i, p_j) = F_b(q^i, p_\alpha)\delta\left(\sqrt{g^{lm}p_l p_m} - m_b c\right).$$

Здесь функция F_b зависит только от пространственных компонент импульса (пространственные компоненты мы обозначаем греческими индексами).

Интегрируя (19), (33) по p'_0 и p''_0, приводим тензоры φ_{ij}^k и μ_{ij} к виду

$$\varphi_{ij}^k = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^3 m_c^3 c^9}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \times \times \left[\frac{1}{2}g^{fk}u''_i u''_j + u'^k(u'u'')(\delta_j^f u''_i + \delta_i^f u''_j)\right] \times \times \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right) K_{f\alpha}(u', u'') \times \times \left(F_c(x'')\frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha} - F_b(x')\frac{\partial F_c(x'')}{\partial p''_\alpha}\right), \quad (35)$$

$$\mu_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^3 m_c^3 c^9}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}} \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}} \times \times \left\{ \left[\left(z^2+\frac{1}{2}\right)(u''_i u''_j + u'_i u'_j) + + \left(z^2-\frac{1}{2}\right) g_{ij} - 2z(u'_i u''_j + u''_i u'_j)\right] g^{qr} - - 2\left(z^2-\frac{1}{2}\right)\delta_i^q\delta_j^r\right\} F_c(x'') \times \times \frac{\partial}{\partial p'_f}\left\{F_b(x')\left[\left(z^2-\frac{1}{2}\right)\delta_f^m + + \left(z^2+\frac{1}{2}\right)u'_f u'^m - 2zu''_f u'^m\right]\right\} J_{rqm}(u', u''). \quad (36)$$

Здесь

$$\frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{-g}}, \quad \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{-g}}$$

— инвариантные элементы объема в трехмерном импульсном пространстве частиц соответственно сорта b и c. Греческий индекс α в (35) пробегает только значения $1, 2, 3$ (пространственный индекс). Производную по p'_f в (36) следует вычислять так, как будто все четыре компоненты импульса независимы. Зависимость p'_0 от p'_α учитывается после дифференцирования по p'_f.

Тензоры φ_{ij}^k и μ_{ij} обязаны подчиняться дополнительному условию

$$g_{lj}\left(\varphi_{ij;k}^k + \mu_{ij}\right)_{;l} = 0, \quad (37)$$

так как дивергенции тензоров G_{ij} и T_{ij} обращаются в нуль.

Уравнение (37) накладывает некоторые ограничения на зависимость от координат и относительной скорости частиц (последняя может быть выражена через z) параметра k_{min}.

В правой части макроскопических уравнений Эйнштейна стоит макроскопический тензор энергии-импульса. Последний выражается через одночастичные функции распределения F_b:

$$T_{ij} = \sum_b \int \frac{d^3p}{p^0\sqrt{-g}} p_i p_j F_b(p). \qquad (38)$$

К системе уравнений (11)–(38) нужно добавить кинетическое уравнение для F_b, которое получается из (8) интегрированием по p_0 и имеет вид (53) из [1].

3. ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

Полученные уравнения гравитационного поля для сплошных сред отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием дополнительных слагаемых

$$\varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij}$$

в левой части.

Эти слагаемые пропорциональны постоянной Эйнштейна в третьей степени, однако они пропорциональны плотности частиц во второй степени. Следовательно, эти дополнительные слагаемые могут сыграть роль только в сплошных средах достаточно высокой плотности. Такие плотности возможны на ранних стадиях эволюции Вселенной, а также внутри объектов, близких к состоянию гравитационного коллапса. Поэтому, естественно, первые приложения полученных уравнений следует искать в теории ранних стадий эволюции Вселенной и в теории гравитационного коллапса.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Захаров, ЖЭТФ **110**, 3 (1996).

2. А. В. Захаров, ЖЭТФ **112**, 1153 (1997).

3. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **37**, 735 (1959).

4. А. В. Захаров, ЖЭТФ **99**, 769 (1989).

5. Г. С. Бисноватый-Коган, И. Г. Шухман, ЖЭТФ **82**, 3 (1982).

6. А. В. Захаров, Астрон. ж. **66**, 1208 (1989).