ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 1, стр. 32–41

СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ СВЕТА КАК АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

В. А. Миронов *

Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 15 августа 2002 г.

В работе предложен новый подход к исследованию широкого класса динамических состояний квантового осциллятора. Он основан на инвариантном преобразовании уравнения к новому времени, определяемому квантовой дисперсией соответствующего состояния. Построены сжатые состояния квантовой системы, порождаемые волновой функцией основного состояния. В координатном представлении такие состояния описываются волновой функцией автомодельного вида, локализованной вблизи классической траектории. Исследованы особенности статистики сжатого состояния света в одномодовом приближении. Рассмотрено параметрическое возбуждение сжатых состояний квантового гармонического осциллятора.

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Ar

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование света с пониженным уровнем квантовых флуктуаций (неклассического света) остается одной из актуальных проблем квантовой оптики. Наряду с другими приложениями [1, 2] неослабевающий интерес к соответствующим состояниям света связан с перспективой их использования в современных информационных системах, в которых сжатые состояния света являются базовыми [3].

Сжатым состоянием называют состояние системы, в котором дисперсия распределения одной из канонических переменных меньше, чем в основном (вакуумном) состоянии. Несмотря на простоту исходных представлений, анализ статистических свойств сжатого состояния света представляет собой довольно сложную задачу (см., например, [1]). В одномодовом подходе речь идет по существу о некотором классе динамических решений для квантового гармонического осциллятора, минимизирующих соотношение неопределенности. Сжатые одномодовые состояния «создают» из несжатого (обычно вакуумного) с помощью преобразования канонических переменных, либо под действием унитарного оператора Столера. Будучи создано из вакуумного состояния, сжатое состояние, очевидно, является принципиально квантовым.

Формальная процедура построения сжатого состояния света делает этот объект довольно экзотической структурой. С другой стороны, в динамических квантовых параметрических процессах, как правило, возбуждается неклассический свет. Это заставляет нас несколько по-иному взглянуть на проблему сжатого состояния света и рассмотреть динамическую процедуру построения таких состояний.

В работе предложен новый подход к исследованию сжатых состояний света на основе инвариантных канонических преобразований уравнений квантового гармонического осциллятора к новому времени. Рассмотрение эволюции системы в новом времени, определяемом дисперсией сжатого состояния, дает возможность построить (и возбудить) соответствующие состояния с помощью динамического инвариантного преобразования. Эти состояния описываются динамическими автомодельными распределениями, которые в собственном (неравномерном) времени представляют собой волновые функции основного состояния. В разд. 2 мы предложим два инвариантных динамических преобразования (сжатие и переход в осциллирующую систему координат) уравнений квантового осциллятора и построим автомодельные решения, порождаемые волновой функцией основного состояния. В следующем

*E-mail: fraiman@appl.sci-nnov.ru

разделе (разд. 3), используя эти преобразования последовательно, найдем автомодельные структуры, описывающие сжатые когерентные состояния системы, и исследуем спектр этих состояний. В разд. 4 рассмотрим параметрическое возбуждение сжатых состояний.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Гамильтониан квантового гармонического осциллятора

$$\hat{H} = \left(\hat{p}^2 + \omega^2(t)\hat{q}^2\right)/2$$

с частотой $\omega(t)$, зависящей от времени, определяет следующие уравнения движения для гейзенберговских операторов:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{p}, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\omega^2(t)\hat{q}. \tag{1}$$

2.1. Преобразование сжатия

Пусть в новом времени τ эволюция операторов координаты $\hat{Q}$ и импульса $\hat{P}$ описывается уравнениями того же вида

$$\frac{d\hat{Q}}{d\tau} = \hat{P}, \quad \frac{d\hat{P}}{d\tau} = -\Omega^2\hat{Q} \tag{2}$$

с тем же самым коммутационными соотношением

$$\left(\left[\hat{P}, \hat{Q}\right] = -i\right).$$

Нетрудно видеть, что унитарное преобразование канонических переменных

$$\begin{aligned} \hat{q} &= b(t)\hat{Q}(\tau), \\ \hat{p} &= \hat{P}(\tau)/b(t) + b_t(t)\hat{Q}(\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

переводит уравнения (1) в (2), если масштаб $b(t)$ меняется по закону

$$b_{tt} + \omega^2(t)b = \frac{\Omega^2}{b^3}. \tag{4}$$

Здесь мы воспользовались следующими обозначениями для производных:

$$b_t = \frac{db}{dt}, \quad b_{tt} = \frac{d^2b}{dt^2}.$$

Новая эволюционная переменная τ связана со старой t соотношением

$$d\tau = \frac{dt}{b^2(t)}. \tag{5}$$

Прежде всего, отметим следующее. Предложенное выше преобразование (3)–(5) заметно отличается от обычно используемых в квантовой теории инвариантных преобразований тем, что содержит преобразование эволюционной переменной (5). В результате этого преобразования уравнения для осциллятора с переменной частотой (1) удается свести, например, к соответствующему уравнению (2) с постоянной частотой $\Omega = \text{const}$. Масштабный параметр $b(t)$ связывает дисперсии процессов в новом и старом времени. Так, для процессов со средним, равным нулю ($\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{Q}\rangle = 0$), для дисперсии канонических переменных находим следующие соотношения:

$$\langle\hat{q}^2\rangle = b^2(t)\langle\hat{Q}^2\rangle, \tag{6}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = \frac{\langle\hat{P}^2\rangle.}{b^2} + b_t^2\langle\hat{Q}^2\rangle. \tag{7}$$

Другими словами, если дисперсия координаты системы в некотором состоянии (6) равна $\langle\hat{q}^2\rangle$ ($\langle\hat{q}^2\rangle = b^2(t)\langle\hat{Q}^2\rangle$), то в новом («собственном») времени (5), определяемом фактически дисперсией этого состояния, дисперсия составляет $\langle\hat{Q}^2\rangle$. Особый интерес представляют динамические состояния системы, которые в собственном времени (5) находятся в основном (вакуумном) состоянии. Такие состояния относятся к сжатым состояниям системы.

Нелинейное уравнение (4) для масштабного параметра является скрытно линейным. Его решение удобно представить в виде

$$b = \left(u^2 + \Omega^2 v^2/w^2\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где u и v — два линейно независимых решения уравнения осциллятора

$$x_{tt} + \omega^2(t)x = 0 \tag{9}$$

с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u_t(0) = B, \quad v(0) = 0, \quad v_t(0) \neq 0,$$

w — вронскиан:

$$w = uv_t - u_tv = \text{const}.$$

В случае гармонического осциллятора $\omega = \Omega = \omega_0 = \text{const}$ изменение масштабного параметра описывается выражением

$$b(t) = \sqrt[4]{K}\left(\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{K}\sin^2\omega_0 t\right)^{1/2}, \tag{10}$$

где коэффициент сжатия $K = (b_{max}/b_{min})^2$ характеризует модуляцию дисперсии на удвоенной частоте. Такое периодическое изменение дисперсии от максимального значения

$$b_{max}^2(t=0) = \sqrt{K}$$

до минимального

$$b_{min}^2(t=\pi/2\omega_0) = 1/\sqrt{K}$$

служит признаком сжатого состояния света.

Для получения более детальной картины продолжим исследование квантового гармонического осциллятора с частотой равной единице ($\omega = \Omega = \omega_0 = 1$). Рассмотрим оператор псевдоуничтожения

$$\hat{A} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Используя (3), представим его через обычные операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}^+ = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2}, \quad \hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}.$$

В результате находим

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a} + \frac{1}{2}\left(-b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}^+. \tag{12}$$

Предположим, что система, описываемая операторами $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ в новом времени τ, находится в основном состоянии $|0\rangle$. Действуя на него оператором псевдоуничтожения (12), найдем для соответствующего динамического состояния $|\psi\rangle$ в реальном времени соотношение:

$$\left(b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}|\psi\rangle + \\ + \left(-b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}^+|\psi\rangle = 0. \tag{13}$$

Отсюда, например, используя координатное представление для операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$, найдем волновую функцию сжатого вакуумного состояния:

$$\psi = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi b^2}}\exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{ib_t}{2b}q^2\right), \tag{14}$$

где $b(t)$ определяется выражением (10) при $\omega_0 = 1$. Она имеет автомодельную структуру и может быть получена из уравнения Шредингера с параболическим потенциалом при соответствующем преобразовании к автомодельным переменным ($\eta = q/b(t)$).

Используя разложение $|\psi\rangle$ по стационарным состояниям осциллятора, для амплитуд вероятностей c_n нахождения на соседних уровнях можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\left(b + \frac{1}{b} - ib_t\right)(n+1)^{1/2}c_{n+1} + \\ + \left(-b + \frac{1}{b} - ib_t\right)(n-1)^{1/2}c_{n-1} = 0. \tag{15}$$

Отсюда для вероятностей нахождения осциллятора в $2n$-м состоянии получим

$$w_{2n} = |c_2|^{2n} = \frac{2\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}+1}\right)^{2n}\frac{\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K}+1}. \tag{16}$$

Это же выражение можно получить, естественно, в результате разложения (14) по собственным функциям стационарного состояния квантового осциллятора.

Среднее число «мод»

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n w_n, \tag{17}$$

формирующих сжатое вакуумное состояние (16), равно

$$\bar{n} = \frac{\left(1 - \sqrt{K}\right)^2}{4\sqrt{K}}. \tag{18}$$

Таким образом, обогащение спектрального состава с ростом коэффициента сжатия происходит по закону $\bar{n} \sim \sqrt{K}$. Следует отметить, что соотношение (13) соответствует традиционному определению сжатого состояния света [1]. Однако в силу своей структуры оно содержит и довольно простое описание динамики системы (14).

2.2. Преобразование в осциллирующую систему координат

Рассмотрим другое инвариантное преобразование. Пусть имеется решение $\bar{x}(t)$ классического уравнения гармонического осциллятора с частотой $\omega_0 = 1$. Сделаем преобразование канонических переменных:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= \hat{Q}(t) + \bar{x}(t)\hat{I}, \\ \hat{p}(t) &= \hat{P}(t) + \bar{x}_t(t)\hat{I} \end{aligned} \tag{19}$$

в уравнении (1) с $\omega(t) = 1$. В (19) $\hat{I}$ — единичный оператор. В силу линейности исходного уравнения, очевидно, что эволюция новых канонических переменных $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ описывается теми же уравнениями (1) с $\omega(t) = 1$, если $\bar{x}(t)$ и $\bar{x}_t(t)$ — соответственно, координата и скорость классического движения.

По существу, преобразование (19) представляет собой преобразование квантовых уравнений движения (1) в неинерциальную (осциллирующую) систему отсчета, связанную с классической траекторией. Для оператора псевдоуничтожения состояния в осциллирующей системе координат $\hat{A} = \left(\hat{Q} + i\hat{P}\right)/\sqrt{2}$ находим

$$\hat{A} = \hat{a} - (\bar{x}(t) + i\bar{x}_t(t))\,\hat{I}/\sqrt{2}. \qquad (20)$$

Если в осциллирующей системе координат квантовая система находится в основном состоянии $|0\rangle$, «реальное» состояние $|\psi\rangle$ описывается операторным уравнением

$$\hat{a}\,|\psi\rangle = (\bar{x}(t) + i\bar{x}_t(t))\,\hat{I}\,|\psi\rangle\,/\sqrt{2}, \qquad (21)$$

т. е. волновая функция является собственной функцией оператора уничтожения и в соответствии с определением описывает когерентные состояния системы [1]. В энергетическом представлении это уравнение легко решается. В результате приходим к хорошо известному в квантовой оптике распределению Пуассона для вероятности нахождения осциллятора в n-м состоянии [1, 2, 4]

$$w_n = \frac{N^n}{n!}\exp(-N), \qquad (22)$$

где N — число квантов в классическом движении.

В заключение этого раздела отметим следующее. Унитарное преобразование канонических переменных (3) в рамках уравнения Шредингера (т. е. в координатном представлении)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} - \frac{\omega^2(t)}{4}q^2\psi = 0 \qquad (23)$$

соответствует автомодельной подстановке вида

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{b(t)}}S(q/b)\exp\left(-i\frac{b_t}{4b}q^2\right). \qquad (24)$$

Нетрудно убедиться, что автомодельная функция $S(q/b)$ описывается в новом времени τ (5) уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{\partial^2 S}{\partial\eta^2} - \frac{\Omega^2}{4}\eta^2 S = 0, \qquad (25)$$

где $\eta = q/b(t)$. Зависимость дисперсии волновой функции (24) $b(t)$ определяется уравнением (4). Используя стационарное решение уравнения (25), соответствующее основному состоянию квантового осциллятора, найдем с помощью (24) динамическую волновую функцию (14).

Обратим внимание, что переход к автомодельной функции (24), (25) при $\Omega = \mathrm{const}$ сопровождается повышением симметрии рассматриваемой системы. Уравнение (25) инвариантно относительно сдвига неравномерного «времени» ($\tau \to \tau + \tau_0$), а при $\Omega = 0$ еще и относительно трансляции в «пространстве» автомодельной переменной η ($\eta \to \eta + \eta_0$).

Преобразование волновой функции в осциллирующую систему координат содержится в [4].

3. СЖАТЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Последовательное применение рассмотренных выше преобразований (сжатия (3) и перехода в осциллирующую систему координат (19)) расширяет класс динамических решений уравнения квантового осциллятора.

3.1. Идеально сжатые состояния

Рассмотрим сначала следующую возможность. На первом этапе перейдем в осциллирующую систему координат (19), затем сделаем преобразование сжатия ($q(t)$, $p(t) \to Q(\tau)$, $P(\tau)$) в соответствии с (3)–(5). В результате получаем обобщенное преобразование уравнений (1) к виду (2)

$$\begin{aligned}\hat{q} &= b(t)\hat{Q}(\tau) + \bar{x}(t)\hat{I},\\ \hat{p} &= \frac{\hat{P}(t)}{b(t)} + b_t(t)\hat{Q}\,(\tau) + \bar{x}_t(t)\hat{I}.\end{aligned} \qquad (26)$$

Для простоты, как и выше, будем считать $\omega(t) = \Omega = 1$. Для оператора псевдоуничтожения $\hat{A} = (\hat{Q}(\tau) + i\hat{P}(t))/\sqrt{2}$ в собственном времени (5), определяемом дисперсией состояния, находим

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a} + \frac{1}{2}\left(-b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}^+ - \\ - \left[\left(\frac{1}{b} - ib_t\right)x + ibx_t\right]\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}. \qquad (27)$$

Полагая далее, что преобразованное (в осциллирующей системе координат и в новом времени τ) состояние — вакуумное $|0\rangle$, приходим к операторному уравнению для соответствующего динамического состояния системы $|\psi(t)\rangle$

$$\left(b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}\,|\psi\rangle + \left(-b + \frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{a}^+\,|\psi\rangle = \\ = \left(\left(\frac{1}{b} - ib_t\right)\bar{x} + ib\bar{x}_t\right)\sqrt{2}\hat{I}\,|\psi\rangle. \qquad (28)$$

Оно является обобщением (13), (21) на случай сжатого когерентного состояния. Здесь важно отметить, что преобразование сжатия по-разному действует на координату и скорость классического движения (см. правую часть уравнения (28)).

В координатном представлении для волновой функции когерентного сжатого состояния нетрудно получить следующее выражение:

$$\psi = \left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left[-\left(\frac{1}{b^2} - i\frac{b_t}{b}\right)\cdot\frac{(q-\bar{x}(t))^2}{2} + i\bar{x}_t q\right]. \quad (29)$$

Оно описывает волновое поле автомодельного типа, локализованное вблизи осциллирующей классической траектории $\bar{x}(t)$ центра масс

$$\bar{x} = \bar{q} = \int q\,|\Psi|^2\,dq,$$

с частотой $\omega_0 = 1$. Дисперсия распределения (29) b^2 меняется с удвоенной частотой (см. (10)). Спектральные особенности сжатого когерентного состояния определяются, очевидно, разностью фаз колебаний центра масс $x(t)$ и дисперсионного параметра $b(t)$. Для определенности будем считать, что $b_t = 0$, $b(t) = \sqrt[4]{K}$ при $t = 0$.

Вероятность нахождения осциллятора в n-ом состоянии можно получить в энергетическом представлении, соответствующим образом обобщив соотношение (15) на случай сжатого когерентного состояния. Проще поступить, разложив (29) по волновым функциям стационарных состояний осциллятора (функциям Эрмита ψ_n). Вычисляя коэффициенты этого разложения

$$c_n = \int \Psi\Psi_n^* dq,$$

найдем

$$|c_n|^2 = \frac{2\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K}+1}\left(\frac{1-\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}\right)^n \times \\ \times \left|H_n\left(\frac{ix_0 - x_t(0)\sqrt{K}}{\sqrt{K-1}}\right)\right|^2 \times \\ \times (2^n n!)^{-1}\exp\left(\frac{x_0^2 + x_t^2(0)\sqrt{K}}{\sqrt{K}+1}\right), \quad (30)$$

где $x_0 = \bar{x}(t = 0)$, $x_t(0) = \bar{x}_t\,(t=0)$ — соответственно, координата и скорость классического движения (центра масс) в момент «включения» преобразования сжатия, H_n — n-ый полином Эрмита.

Заметим, что подобные выражения содержатся, например, в [1,4]. Однако, в отличие от соответствующего соотношения в [1,4], полученные нами выражения (30) определяются параметрами классической системы и коэффициентом сжатия. Это обстоятельство позволяет более детально проанализировать особенности спектра сжатого когерентного состояния (30).

Показательными являются усредненные характеристики распределения $w_n = |c_n|^2$ для вероятности нахождения осциллятора в n-м состоянии вида

$$\bar{n} = \sum_0^\infty n w_n, \quad \overline{n^2} = \sum_0^\infty n^2 w_n. \quad (31)$$

Подробности вычисления моментов спектра (31) для распределения (30) приведены в Приложении. Результаты здесь следующие. Среднее от распределения (30) имеет вид

$$\bar{n} = \frac{x_0^2 + x_t^2(0)}{2} + \frac{\left(1-\sqrt{K}\right)^2}{4\sqrt{K}}. \quad (32)$$

Оно представляет собою сумму соответствующих значений среднего числа квантов в классическом движении (среднего для пуассоновского распределения), N, и в сжатом вакуумном состоянии (18).

На основе выражения для второго момента и (32) можно получить соотношение

$$\Delta = \overline{n^2} - \left(\bar{n}^2 + \bar{n}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{K}\right)^2(1+K)}{8K} + \\ + \frac{\sqrt{K}-1}{2}\left[x_0^2 - \frac{x_t^2(0)}{\sqrt{K}}\right]. \quad (33)$$

Это соотношение используется в квантовой оптике [1] для характеристики отклонения статистики фотонов от пуассоновской.

Заметим, что преобразование сжатия по-разному «действует» на координату x_0 и скорость $x_t(0)$ «одетого» квантовой дисперсией классического движения. Это обстоятельство приводит к ряду особенностей статистики фотонов. Нетрудно найти соотношение между параметрами K, x_0 и $x_t(0)$, при выполнении которого правая часть выражения (33) обращается в нуль, и в этом смысле статистика является пуассоновской ($\Delta = 0$). В зависимости от знака Δ фотонная статистика сжатого когерентного состояния может быть как суперпуассоновской ($\Delta > 0$), так и субпуассоновской ($\Delta < 0$). Предельный случай реализуется, например, если сжатие ($K > 0$) «включается» при скорости движения центра масс классического движения, равной нулю ($x_t(0) = 0$). Соответствующие состояния волновой системы определяют как квадратурно сжатые [1].

Если сжатие «проводить», когда координата равна нулю ($x_0 = 0$), а скорость $x_t(0)$ максимальна, то величина Δ может быть меньше нуля ($\Delta < 0$) для числа квантов $N = x_t^2(0)/2$ в классическом движении:

$$N > \frac{\left(\sqrt{K} - 1\right)(K+1)}{8\sqrt{K}}. \tag{34}$$

Дисперсия $D = \overline{n^2} - \bar{n}^2$ такого состояния при $N \gg \gg K \gg 1$ равна

$$D \approx N/\sqrt{K},$$

т. е. заметно меньше среднего числа фотонов (32). По этой причине его называют сжатым по числу квантов [1].

Рассмотрим особенности спектра (30) этих двух типов сжатых состояний системы для $K > 1$. В первом случае ($x_t(0) = 0$) использование асимптотического выражения [6]

$$|H_n(ix)| \approx \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \sqrt{2n}x \tag{35}$$

при $1 \ll |x|^2 \ll n$ приводит к следующему выражению:

$$|c_n|^2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{K}\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{2\left(\sqrt{n} - \sqrt{N}\right)^2}{\sqrt{K}}\right). \tag{36}$$

При упрощении мы воспользовались формулой Стирлинга для $n!$ и условием «сильно» сжатого когерентного многофотонного состояния: $N \gg K \gg 1$.

Таким образом, спектр квадратурно сжатого состояния (36) имеет вид смещенной гауссовой функции, зависящей от $\sqrt{n}$. Вблизи максимума ($n^* = N$) и при $n \gg N$ функция (36) ведет себя более плавно, чем «обычная» гауссовская функция от n. Это приводит к заметному увеличению дисперсии распределения (36) по сравнению с $\sqrt{K}$ до значения $N\sqrt{K}$, что соответствует (6).

В другом случае, когда сжатие воздействует на систему, классическое движение которой имеет максимальную скорость ($x_0 = 0$), соответствующая функция распределения (30) определяется полиномами Эрмита от действительного аргумента. При $K \gg 1$ упрощение (30) приводит к следующему выражению:

$$|c_n|^2 = \frac{2}{\sqrt[4]{K} 2^n n!} \exp\left(-\frac{2n}{\sqrt{K}}\right) H_n^2\left(\sqrt{\frac{2NK}{K-1}}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{2N\sqrt{K}}{\sqrt{K}+1}\right). \tag{37}$$

Полином Эрмита $H_n(x)$ достигает максимального значения при $x^2 \approx 2n$, т. е. в рассматриваемом нами случае для n^*, равного числу квантов в классическом движении ($n^* = N$). В этой области асимптотическое поведение $H_n(x)$ для $n \gg 1, x \gg 1$ определяется функцией Эйри [6]. В результате из (37) находим

$$|c_n|^2 = \frac{2}{\sqrt[4]{K}} \frac{3^{2/3}\sqrt{2}}{\pi^{3/2} n^{1/6}} \mathrm{Ai}^2(t) \exp\left(\frac{2(N-n)}{\sqrt{K}}\right), \tag{38}$$

где

$$t = 2\sqrt[3]{3} n^{1/6} \left(\sqrt{n} - \sqrt{N}\right).$$

Таким образом, поведение функции распределения (37) для состояния, сжатого по числу фотонов, представляется следующим. В области $n < N$ рост функции (38) определяется, фактически, функцией Эйри $\mathrm{Ai}(t)$. Уменьшение (38) при $n > N$ описывается экспоненциальным сомножителем в (38). В результате локализованное вблизи $n = N$ двухмасштабное распределение (38) имеет «комбинированную» дисперсию, которую мы нашли с использованием метода моментов (33), (32).

3.2. Обобщенное когерентное сжатое состояние

Имеется и другая возможность. Сначала выполним преобразование сжатия (3)–(5), затем перейдем в осциллирующую систему координат (19), связанную с некоторой классической траекторией. В результате приходим к следующему преобразованию канонических переменных:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= b(t)\left(\hat{Q}(\tau) + \eta(\tau)\hat{I}\right), \\ \hat{p} &= \frac{\left(\hat{P}(t) + \eta_\tau(\tau)\hat{I}\right)}{b(t)} + b_t(t)\left(\hat{Q}(\tau) + \eta(\tau)\hat{I}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\eta(\tau)$ и $\eta_\tau(\tau)$ — координата и скорость классического осцилляторного движения в новом времени. Как и выше, $\omega = \omega_0 = \Omega = 1$. Повторяя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, найдем следующее выражение для оператора псевдоуничтожения:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{q} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}(ib)\,\hat{p} - [\eta(\tau) + i\eta_\tau(\tau)]\,\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}. \quad (40)$$

Таким образом, основное состояние системы в новом времени τ описывается следующим операторным уравнением

$$\left(\left(\frac{1}{b} - ib_t\right)\hat{q} + (ib)\,\hat{p}\right)\Psi = [\eta(\tau) + i\eta_\tau(\tau)]\,\Psi. \quad (41)$$

Отсюда в координатном представлении находим выражение для волновой функции:

$$\psi = \left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(q - \eta(\tau)b(t))^2}{b^2(t)} + i\frac{b_t}{2b^2}q^2 + i\frac{\eta_\tau}{b}q\right). \quad (42)$$

Оно имеет, по крайней мере внешне, более сложный автомодельный вид, чем (14) и (29). Выражение (42) описывает волновой пакет, локализованный вблизи классической траектории:

$$\bar{q} = b(t)\eta(\tau) \equiv \bar{x}(t). \quad (43)$$

Очевидно, что это та же осциллирующая траектория, что и для распределения (29), $\bar{q} = \bar{x}(t)$. В этом нетрудно убедится, поскольку $\eta_{\tau\tau} = -\eta$, $d\tau = dt/b^2$, а b является решением уравнения (4) при $\omega = \Omega = 1$. Так что, по существу, распределение (42) отличается от (29) тем, что параметры классической траектории, которую оно «одевает», определяются дисперсией состояния (42).

Рассмотрим спектр (по функциям Эрмита) волновой функции (42). Его можно получить и непосредственно из (41), выразив $\hat{p}, \hat{q}$ через операторы рождения и уничтожения в фоковском представлении. Однако проще воспользоваться соответствием между (42) и (29). Как и выше, фазу колебаний $\eta(\tau)$ будем отсчитывать от момента времени, когда $b_t(t=0) = 0$, $b(t=0) = \sqrt[4]{K}$. В результате для вероятности нахождения осциллятора в n-м состоянии найдем

$$|c_n|^2 = \frac{2\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K}+1}\left(\frac{1-\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}\right)^n \times \\ \times \left|H_n\left(\frac{(i\eta_0 - \eta_t(0))\,\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K-1}}\right)\right|^2 \times \\ \times (2^n n!)^{-1}\exp\left\{-\frac{\eta_0^2\sqrt{K} + \eta_t^2(0)}{\sqrt{K}+1}\right\}, \quad (44)$$

где $\eta_0 = \eta(t=0)$, $\eta_\tau(\tau=0) = \eta_\tau(0)$. Она получается из (30) при замене

$$x_0 \to \sqrt[4]{K}\eta_0, \quad x_t(0) \to \eta_\tau(0)/\sqrt[4]{K}, \quad (45)$$

которая определяется модификацией (43) классического уравнения движения. Другими словами, различие между (44) и (30) состоит в том, что начальные условия задают для классической траектории (43)

$$x(t) = b(t)\cos\int_0^t \frac{dt}{b^2(t)}, \quad (46)$$

определяемой квантовой дисперсией $b(t)$. В этом смысле можно сказать, что используемые нами преобразования (сжатия и перехода в осциллирующую систему координат $x(t)$) коммутируют.

В заключение этого раздела отметим следующее. Рассмотренное состояние системы (42), (45) относится к обобщенному когерентному сжатому состоянию [1]. Соответствующее выражение (14) приведено, например, в книге [1] (см. формулу (21.5.25)). Оно имеет настолько громоздкий вид, что авторы отказались от его анализа. Не очень определенные выводы сделаны и при обсуждении первых двух моментов распределения фотонов (см. в [1] формулы (21.5.26), (21.5.28)). В нашем подходе замена (45) в (32), (33) не приводит к заметному усложнению:

$$\overline{n} = \frac{\eta_0^2\sqrt{K} + \eta_\tau^2(0)/\sqrt{K}}{2} + \frac{\left(1-\sqrt{K}\right)^2}{4\sqrt{K}}, \quad (47)$$

$$\Delta = \frac{\left(1-\sqrt{K}\right)^2(1+K)}{8K} + \\ + \frac{\sqrt{K}-1}{2}\left(\sqrt{K}\,\eta_0^2 - \eta_\tau^2(0)/K\right). \quad (48)$$

Очевидно, что анализ их и особенностей спектров сжатых когерентных состояний (квадратурно сжатых (36) и сжатых по числу фотонов (38)) мало отличается от описанного в первой части этого раздела.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ СЖАТЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотренные преобразования сжатия (3) и перехода в осциллирующую систему координат (19), по существу, сводят решение широкого класса нестационарных квантовых задач к решению уравнения классического осциллятора (9) с переменной частотой. С целью возбуждения сжатых состояний света особый интерес представляет исследование резонансных процессов. Поскольку дисперсия волновой функции в сжатом состоянии меняется на удвоенной частоте «опорного» гармонического осциллятора, естественно использовать явление параметрического резонанса для возбуждения таких состояний. Рассмотрим случай вырожденной параметрической вниз-конверсии, динамика которой определяется гамильтонианом

$$\hat{H} = \left(\hat{p}^2 + (1+\varepsilon\sin 2t)\hat{q}^2\right)/2,$$

где $\varepsilon \ll 1$.

В результате мы приходим к уравнениям квантового осциллятора (1) с частотой, меняющейся по закону

$$\omega^2(t) = 1 + \varepsilon \sin 2t. \tag{49}$$

Выбор такой периодической функции ($\sin 2t$) соответствует использованным выше фазовым соотношениям. Рассмотрим сначала возбуждение сжатого вакуумного состояния (14), затем проведем обобщение полученных выражений на случай сжатых когерентных состояний.

4.1. Возбуждение сжатого вакуумного состояния

Задача возбуждения сжатого состояния сводится в нашем подходе к исследованию уравнения для дисперсии квантовой системы

$$b_{tt} + (1+\varepsilon\sin 2t)b = 1/b^3. \tag{50}$$

Как и выше (8), решение этого уравнения следует представить ($b^2 = u^2 + v^2$) через линейно независимые решения $u(t)$, $\nu(t)$ уравнения осциллятора

$$y_{tt} + (1+\varepsilon\sin 2t)y = 0 \tag{51}$$

с теми же начальными условиями ($u(0) = 1$, $u_t(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v_t(0) \neq 0$).

Отсюда в рассматриваемых условиях параметрического резонанса находим для дисперсии квантового состояния $b(t)$ выражение

$$b(t) = \left(\cos^2 t + \exp(-4\gamma t)\sin^2 t\right)^{1/2} \exp\gamma t, \tag{52}$$

где инкремент параметрической неустойчивости равен $\gamma = \varepsilon/4$. Таким образом, дисперсия (52) меняется дважды на периоде осциллятора от максимального значения $b_{max} = \exp(\gamma t)$ до минимального $b_{min} = \exp(-\gamma t)$. Коэффициент сжатия

$$K = b_{max}^2/b_{min}^2 = \exp(\varepsilon t) \tag{53}$$

растет со временем экспоненциально. Таким образом, выражение для квантовой дисперсии

$$b(t) = \sqrt[4]{K(t)}\left(\cos^2 t + \frac{1}{K(t)}\sin^2 t\right) \tag{54}$$

сохраняет прежний вид (10) с коэффициентом сжатия $K(t)$ медленно (в масштабе периода осцилляций дисперсии) растущим со временем. В этом приближении и волновая функция состояния (14), и спектр (16) представляют собой плавно «эволюционирующие» функции при возрастании коэффициента сжатия (53).

4.2. Возбуждение сжатого когерентного состояния

В случае сжатого когерентного состояния волновая функция определяется двумя параметрами: дисперсией и траекторией движения центра масс. Дисперсия квантового состояния описывается выражением (54) с коэффициентом сжатия (53). Волновая функция (29) локализована вблизи классической траектории

$$\overline{x}_{tt} + (1+\varepsilon\sin 2t)\overline{x} = 0. \tag{55}$$

Два линейно независимых решения этого уравнения в том же приближении, что и выше ($\varepsilon \ll 1$), имеют вид

$$\overline{x}_1(t) = A\exp(\varepsilon t/4)\cos t, \tag{56}$$

$$\overline{x}_2(t) = B\exp(-\varepsilon t/4)\sin t. \tag{57}$$

Таким образом, возможны два режима. В первом случае увеличение глубины модуляции дисперсии (54) сопровождается возрастанием амплитуды когерентной составляющей, описываемой выражением (56). В результате развития параметрической неустойчивости движения центра масс волнового поля (56) возбуждается сжатое когерентное состояние, относящееся к типу квадратурно сжатого.

В другом случае начальное фазовое соотношение между колебаниями центра волнового поля (57) и дисперсии (54) таковы, что формируется состояние, сжатое по числу фотонов. Особенность этого процесса связана с «подавлением» осцилляторного движения центра масс (57) при экспоненциальном возрастании амплитуды квантовой дисперсии (54). В результате происходит уменьшение энергии когерентной составляющей и, следовательно, возбуждение состояния, более похожего на состояние сжатого вакуума.

4.3. Процессы при обратном порядке преобразований

Рассмотрим далее применение преобразований в обратном порядке, т. е. (39), но для квантового осциллятора с переменной частотой (49). В этом случае волновая функция, описывающая нестационарное сжатое когерентное состояние, будет локализована, как и (42), вблизи классической траектории

$$\overline{x}(t) = b(t)\eta(\tau). \qquad (58)$$

Из способа построения этого сжатого когерентного состояния следует, что дисперсия описывается уравнением (50), а $\eta(\tau)$ — уравнением гармонического осциллятора

$$\eta_{\tau\tau} + \eta = 0$$

в новом времени

$$d\tau = dt/b^2(t).$$

Нетрудно видеть, что $\overline{x}(t)$, определенное соотношением (58), является решением уравнения (55). Другими словами, (58) — это другое представление решения стационарного уравнения (55) через решение уравнения гармонического осциллятора в новом времени. Таким образом, как и при динамическом преобразовании (39), задача сводится к постановке начальных условий при решении уравнения (55), которые в представлении (58) выражаются через начальное значение квантовой дисперсии состояния в момент $t = 0$. Особенности возбуждения квадратурно сжатого состояния и состояния, сжатого по числу фотонов, здесь такие же, как в разд. 4.2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная выше процедура получения динамических решений уравнения квантового осциллятора обладает рядом преимуществ по сравнению с обычно используемой [7–9]. Применение инвариантных преобразований канонических переменных и времени сводит в конечном счете решение задачи к решению уравнения классического осциллятора с переменной частотой. В результате решение квантовой задачи представляется через параметры классической системы. В частности, сжатым состояниям системы соответствуют решения, порождаемые волновой функцией основного (вакуумного) состояния. Они имеют автомодельную структуру. В новом (неравномерно текущем) времени, определяемом дисперсией состояния, автомодельное решение совпадает с волновой функцией основного состояния. Сжатым когерентным состояниям в нашем подходе соответствуют распределения, локализованные вблизи классического осцилляторного движения (когерентного состояния). Ситуация здесь во многом аналогична фейнмановскому представлению квантовой механики по классическим траекториям [10], дополненному преобразованием эволюционной переменной. Наглядная картина структуры волновой функции позволяет сравнительно легко проанализировать условия (фазовые соотношения между инвариантными преобразованиями), при которых реализуются квадратурно сжатые и сжатые по числу фотонов состояния, и рассмотреть особенности параметрического возбуждения сжатых состояний системы.

В заключение отметим следующее. Предложенные динамические преобразования канонических переменных представляют собой удобный аппарат при исследовании приложений неклассического света. Так например, при рассмотрении взаимодействия сжатого когерентного света с атомами переход к новому времени, определяемому квантовой дисперсией, сводит задачу в новых канонических переменных к более изученной — взаимодействию когерентного излучения с веществом.

Аналогичные динамические преобразования канонических переменных имеют место и в более сложном случае квантового осциллятора с диссипацией [9], гамильтониан которого равен

$$\hat{H} = \exp\left(-2F(t)\right)\hat{p}^2/2 + \omega^2(t)\exp\left(2F(t)\right)\hat{q}^2/2.$$

Соответствующее обобщение преобразований (3), (4) имеет вид

$$\hat{q} = b\exp(-F)\hat{Q}(\tau),$$

$$\hat{p} = \frac{\exp(F)}{b}\,\hat{P}(\tau) + (b_t - F_t b)\exp(F)\hat{Q}(\tau),$$

$$b_{tt} + \left(\omega^2(t) - F_{tt} - F_t^2\right)b = \frac{1}{b^3}\,.$$

Операторы $\hat{Q}(\tau)$, $\hat{P}(\tau)$ в новом времени $d\tau = dt/b^2(t)$, как и выше, описывают квантовый гармонический осциллятор (2) с $\Omega = 1$. Это обстоятельство, очевидно, приводит к заметному упрощению исследования диссипативной системы такого типа.

Автор признателен Г. А. Вугальтеру, А. Г. Литваку, В. Е. Семенову, Г. М. Фрайману за полезное обсуждение затронутых вопросов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 01-02-17388).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для определения моментов распределения по числу квантов

$$w_n = \frac{2\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K}+1}\left(\frac{1-\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}\right)^n \times \\ \times \left| H_n\left(\frac{ix_0 - x_t(0)\sqrt[4]{K}}{\sqrt{K-1}}\right)\right|^2 \times \\ \times (2^n n!)^{-1} \exp\left(-\frac{\left(x_0^2 + x_t^2(0)\sqrt{K}\right)}{\sqrt{K}+1}\right) \quad (59)$$

воспользуемся следующим соотношением [11]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(\frac{2xyz - z^2(x^2+y^2)}{1-z^2}\right) = \\ = \sum_0^\infty \frac{(z/2)^n}{n!} H_n(x) H_n(y). \quad (60)$$

Если положить в (60)

$$\begin{aligned} z &= \left(1-\sqrt{K}\right) / \left(1+\sqrt{K}\right), \\ x &= \left(ix_0 - x_t(0)\sqrt[4]{K}\right) / \left(\sqrt{K}-1\right), \\ y &= x^* = -\left(ix_0 + x_t(0)\sqrt[4]{K}\right) / \left(\sqrt{K}-1\right), \end{aligned} \quad (61)$$

то мы придем к выражению, которое определяет нормировку распределения (59). В этих обозначениях функция распределения (59) запишется в виде

$$w_n = \frac{z^n |H_n(x)|^2}{g(z,x,y=x^*)}, \quad (62)$$

где

$$gt(z,x,y=x^*) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \times \\ \times \exp\left(\frac{2xyz - z^2(x^2+y^2)}{1-z^2}\right). \quad (63)$$

Нормировка распределения (59) определяется соотношением

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{2^n n!} |H_n(x)|^2 = g(z,x,y=x^*). \quad (64)$$

Для нахождения первого момента распределения (62)

$$\overline{n} = \sum_0^\infty n w_n \quad (65)$$

продифференцируем (60) по параметру z. Умножив полученное выражение на z/g, найдем следующее выражение для первого момента:

$$\overline{n} = \frac{z}{g(z,x,y=x^*)}\left(\frac{\partial g(z,x,y)}{\partial z}\right)_{x=x,y=x^*}. \quad (66)$$

Здесь после дифференцирования следует положить $y = x^*$. В результате преобразования (66) с помощью (61) определим $\overline{n} = \overline{n}(K, x_0, x_t(0))$ в виде (32).

Проделывая те же операции (дифференцируя (66) по параметру z и затем умножая на z/g), приходим к выражению для второго момента (62):

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^\infty n^2 w_n = \left(\frac{z}{g}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{z}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial z}\right). \quad (67)$$

Здесь, как и выше, в конечных выражениях следует положить $y = x^*$.

Совершенно аналогично можно найти моменты более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Наука, Москва (2000).
2. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
3. *The Physics of Quantum Information*, ed. by D. Boumeesfer, A. Ekert, and A. Zelingev, Springer (2000).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3, Наука, Москва (1989), с. 97.
5. Я. Перина, *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений*, Мир, Москва (1987), с. 156.
6. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, ГИФМЛ, Москва (1962).
7. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, Москва (1987).
8. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).
9. В. В. Додонов, В. И. Манько, в кн.: *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН, т. 183, Наука (1987).
10. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).
11. А. П. Прудников, Ю. А. Бычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).