ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 5 (11), стр. 1107–1115

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ В АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Н. А. Силантьев [*]

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
C. P. 72000, Pue. México

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук
196140, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 2002 г.

Показано, что обычно используемое первое (борновское) приближение для вычисления коэффициента диффузии D_T скалярной примеси в акустической турбулентности является недостаточным. Учет следующего приближения, даже при малости основного параметра — числа Маха, $M \ll 1$, — дает вклад в D_T больший, чем первое приближение, но отрицательный по знаку. Представлена процедура правильного вычисления D_T, основанная на решении нелинейного DIA-уравнения (direct interaction approximation equation) для средней функции Грина задачи. Учтен дополнительный член в общей формуле для D_T, непосредственно описывающий сжимаемость акустической турбулентности, который был ранее неизвестен и не учитывался даже в борновском приближении. Получено положительное значение для $D_T = CM^3u_0/p_0$. Спектр $E(x)$ считался гладким на расстояниях $\Delta x \sim M^2 \ll 1$.

PACS: 05.60.-k, 47.11.+j, 47.40.-x, 47.27.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема диффузии примесных частиц и полей в турбулентной среде является одной из основных проблем в теории турбулентности, важной в практическом отношении. Для модели турбулентности в неограниченной среде имеются точные формулы для коэффициента турбулентной диффузии D_T как в лагранжевом [1, 2], так и в эйлеровом [3, 4] представлениях. С практической точки зрения особенно важны вычисления в эйлеровом представлении, которое и будет далее использоваться. В этом представлении точное вычисление D_T связано с нахождением стохастической функции Грина задачи $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ и ее дальнейшим статистическим усреднением с компонентами поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (см. подробнее [4]).

Под акустической турбулентностью понимается среда с хаотически распространяющимися в ней акустическими волнами. Характеристики такой среды — корреляторы скоростей газа

$$\begin{gathered}\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t')\rangle \equiv B_{ij}(\mathbf{R}, \tau), \\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \tau = t - t'\end{gathered} \tag{1}$$

— определяются стохастическими граничными условиями и источниками, поддерживающими непрерывное образование волн. В чистом виде такая турбулентность встречается редко (например, в солнечной короне). Однако она часто используется в теоретических работах по магнитному динамо (см. работы [5–7] и ссылки в них) как пример простой турбулентности, в котором аналитические вычисления удается провести до конца, учитывая малость основного параметра — числа Маха, $M = u_0/c$ (здесь $u_0^2 = B_{ii}(0,0)$ — средний квадрат амплитуды скорости колебаний, c — скорость распространения звука).

При вычислении коэффициента турбулентной диффузии D_T во всех этих работах используется первое (борновское) приближение, так как следующее приближение содержит дополнительный малый множитель, $M^2 \ll 1$. В качестве функции Грина

[*]E-mail: silant@inaoep.mx

$G(R,\tau)$ применяется обычная функция Грина

$$G_m(R,\tau) = (4\pi D_m \tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{R^2}{4D_m\tau}\right),$$

описывающая молекулярную диффузию с коэффициентом D_m в покоящемся газе. Ввиду малости D_m рассматривается предельная форма $G_m(R,\tau) \to \delta(\mathbf{R})$.

Кроме того, авторы использовали неполную формулу для вычисления D_T, которая не содержит вклада собственно сжимаемости (коррелятор $\langle u_i \mathrm{div}\,\mathbf{u}\rangle$). В работе [4] было показано, что учет этого дополнительного члена дает существенное увеличение D_T даже в рамках борновского приближения (если коэффициент затухания $k(p)$ акустической волны порядка коэффициентов D_m или D_T).

В этой работе было указано, что для оценки корректности использования борновского приближения при вычислении D_T необходимо более точно найти функцию Грина и оценить вклад в D_T следующего приближения, содержащего корреляторы скорости четвертого порядка. Данная работа посвящена выполнению этой программы.

Прежде всего мы покажем, что вклад корреляторов четвертого порядка в D_T, который обозначим $D_T^{(1)}$ (см. формулу (19) в [4]), оказывается несколько больше вклада $D_T^{(0)}$ парного коррелятора (1). Более того, $D_T^{(1)}$ оказывается отрицательным, а значит, и полный коэффициент турбулентной диффузии $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$ будет отрицательным. Подчеркнем, что это остается в силе, даже если использовать функцию $G_m(R,\tau)$ с коэффициентом диффузии D_T, важно лишь, чтобы коэффициент затухания k был значительно больше D_T, что, по-видимому, всегда выполняется. Таким образом, использование в качестве функций Грина чисто диффузионных функций приводит к отрицательному значению полного коэффициента турбулентной диффузии. Учет сжимаемости при этом несуществен, если $k \gg D_T$. Отметим, что оценка $D_T^{(1)} \approx M^2 D_T^{(0)} \ll D_T^{(0)}$, данная в работе [6], неверна, так как не учитывает резонансного характера вклада акустических гармоник в выражении для $D_T^{(1)}$.

В чем же причина полученного отрицательного значения коэффициента турбулентной диффузии? По-видимому, она заключается в неправильном выборе функции Грина. При рассмотрении акустической турбулентности функция Грина должна отражать главное свойство процесса переноса примеси — в основном колебательный характер движения примесных частиц. Уже сам вид коррелятора скоростей (1) в пространстве волновых чисел (см. [7]),

$$B_{nm}(\mathbf{R},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R})\tilde{B}_{nm}(\mathbf{p},\tau), \quad (2)$$

$$\tilde{B}_{nm}(\mathbf{p},\tau) = 2\pi^2 p_n p_m \frac{E(p)}{p^4}\cos(cp\tau) \times \times \exp\left[-k(p)\,p^2\tau\right], \quad (3)$$

содержащий осциллирующий множитель $\cos(cp\tau)$, показывает, что фурье-образ средней функции Грина $\tilde{G}(p,\tau)$ также должен содержать осциллирующие члены. Здесь $k(p)$ — коэффициент затухания p-волны, $E(p)$ — спектр акустической турбулентности, определяемый из выражения

$$u_0^2 \equiv \langle u^2(\mathbf{r},t)\rangle = \int_0^\infty dp\,E(p). \quad (4)$$

Напомним, что фурье-образ диффузионной функции Грина $\tilde{G}(p,\tau) = \exp(-Dp^2\tau)$ не содержит осциллирующих членов.

Для отдельной акустической волны затухание обусловлено наличием вязкости в среде и коэффициент $k(p)$ мал, порядка коэффициента молекулярной диффузии D_m (см. [8]). В ансамбле взаимодействующих волн ситуация иная. В работе [9] развита модель акустической турбулентности с нелинейным взаимодействием волн. Авторы получили для $k(p)$ выражение $k(p) = E(p)/c$, где $E(p) \approx \mathrm{const}\cdot u_0^2\sqrt{p_0}p^{-3/2}$ для $p > p_0$, $\lambda_0 = 1/p_0$ — характерная длина волны. При $p \to 0$ значение спектра $E(p)$ также стремится к нулю. Используя безразмерное волновое число $x = p/p_0$, введем безразмерный спектр турбулентности с помощью соотношения $E(p) \equiv u_0^2/p_0 E(x)$. В этих обозначениях результат работы [9] можно записать в виде

$$E(x) = \mathrm{const}\cdot x^{-3/2}, \quad k(p) = ME(x)u_0\lambda_0.$$

Затухание $k(p)$ с учетом малости числа Маха, $M = u_0/c \ll 1$, является слабым, меньшим величины $u_0\lambda_0$. Однако, как увидим далее, коэффициент турбулентной диффузии еще меньше — порядка $M^3 u_0\lambda_0$.

Выражение (3) представляет собой парный коррелятор скоростей газа для однородного изотропного стационарного ансамбля акустических гармонических волн. Подставляя (3) в (2), получим для скалярного произведения скоростей в одном месте, но в разные моменты времени, выражение

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r},t')\rangle = \\ = \int_0^\infty dp\, E(p)\cos(cp\tau)\exp\left[-k(p)p^2\tau\right]. \quad (5)$$

Здесь $\tau = t - t'$. Из (5) видно, что такой статистический ансамбль описывает непериодическое, хаотическое движение газа, даже если пренебречь затуханием волн ($k = 0$), т. е. турбулентная диффузия вещества происходит просто в силу наложения хаотических, некогерентных между собой акустических гармонических волн. Важно только, чтобы спектр волн был сплошным.

Совокупность волн с одной и той же длиной волны ($E(p) = u_0^2\delta(p-p_0)$) при пренебрежении затуханием приводит к периодическому суммарному движению, возможно, очень запутанному в пространстве. В этом случае диффузионное перемешивание частиц слабое и обусловлено вязким (динамическим) затуханием; кинематическая, типа макроскопического случайного блуждания, диффузия здесь отсутствует. Далее мы будем рассматривать диффузию примесных частиц только в турбулентной среде со сплошным спектром волн, очевидно, наиболее естественную в природе.

То, что величина $D_T \sim M^3 u_0\lambda_0 \ll u_0\lambda_0$, отражает важное свойство акустической турбулентности: в основном движение примесной частицы является колебательным, не приводящим к диффузии. Если бы при каждом периоде колебания частица «уходила» на другую траекторию, соответствующую другой волне, то, очевидно, коэффициент диффузии был бы гораздо больше, порядка $u_0\lambda_0$. Это означает, что реальная функция Грина $\tilde{G}(p,\tau)$ должна описывать эти колебания и диффузионные функции $\tilde{G}(p,\tau) = \exp(-D\,p^2\tau)$ непригодны для вычисления D_T. Для неакустической турбулентности сравнительно хорошим способом вычисления D_T является так называемый самосогласованный способ [10], при котором в точную формулу для D_T вместо неизвестной функции Грина подставляют диффузионную

$$\tilde{G}(p,\tau) = \exp(-D_s p^2\tau)$$

с неизвестным коэффициентом диффузии D_s. Решение получающегося алгебраического уравнения дает значение D_s, которое хорошо соответствует значениям D_T, вычисляемым более точными методами. Успех самосогласованного метода определяется именно тем, что диффузионная функция Грина близка к точной функции Грина. В случае акустической турбулентности самосогласованный метод приводит к отрицательным значениям D_T, очень большим по величине, что явно не соответствует действительности. Это также свидетельствует о том, что реальная функция Грина для времен, определяющих механизм переноса примесных частиц, весьма далека от чисто диффузионной.

Ниже для вычисления D_T мы используем решение нелинейного интегрального уравнения для функции Грина, которое действительно имеет осциллирующие члены.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Возьмем в качестве примесного скалярного поля концентрацию примесных частиц $n(\mathbf{r},t)$. Уравнение непрерывности для $n(\mathbf{r},t)$ в поле случайных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ основного газа является стохастическим уравнением для нахождения $n(\mathbf{r},t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m\nabla^2\right) n(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r},t)n(\mathbf{r},t)\right]. \quad (6)$$

Примем, что статистический ансамбль поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ является однородным, изотропным, стационарным и характеризуется коррелятором (3). Среднее значение $\langle\mathbf{u}\rangle = 0$.

Функция Грина $G(1;2) \equiv G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ уравнения (6) удовлетворяет следующему линейному уравнению:

$$G(1;2) = G_m(1-2) - \\ - \int d3\, G_m(1-3)\,\nabla_i^{(3)}[u_i(3)G(3;2)]. \quad (7)$$

Здесь и далее мы используем удобные обозначения: $f(1) = f(\mathbf{r}_1,t_1)$, $f(1-2) = f(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2) \equiv \equiv f(\mathbf{R},\tau)$, $dn = d\mathbf{r}_n\,dt_n$ и т. п.

Как известно (см. [3, 4]), для больших времен и масштабов усреднение (6) приводит к уравнению диффузии (левая часть (6)) для средней концентрации $\langle n(\mathbf{r},t)\rangle$ с коэффициентом диффузии $D_m + D_T$. Точная формула для стационарного коэффициента турбулентной диффузии имеет вид

$$D_T = \frac{1}{3}\int d\mathbf{R}\int_0^\infty d\tau\left[\langle u_i(1)G(1;2)u_i(2)\rangle - \right. \\ \left. - \mathbf{R}\cdot\langle\mathbf{u}(1)G(1;2)\mathrm{div}\,\mathbf{u}(2)\rangle\right]. \quad (8)$$

Для случая несжимаемой турбулентности ($\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$) второй член в (8) исчезает. Именно этот весьма существенный член не учитывался в [6, 7] для сжимаемой акустической турбулентности. Авторы этих работ ограничились подстановкой в первый член выражения (8) вместо $G(1;2)$ свободного члена $G_m(1-2)$ уравнения (7). Подстановка ряда итераций этого уравнения в (8), как мы далее покажем, приводит к соотношению $D_T^{(0)} + D_T^{(1)} < 0$, т. е. к заведомо абсурдному результату. Причина неэффективности подстановки итераций (7) при вычислении D_T подробно объяснена во Введении.

В работах [3, 11] вместо уравнения (7) получено новое, перенормированное уравнение для функции Грина $G(1;2)$, где в качестве свободного члена стоит среднее значение функции Грина $\langle G(1;2)\rangle \equiv G(1-2)$. Очевидно, $G(1-2)$ правильно описывает конвективно-колебательный характер переноса примесных частиц в акустической турбулентности, и можно надеяться, что подстановка в (8) итераций перенормированного уравнения приведет к правильному значению для D_T. Таким образом, проблема сводится к написанию и решению уравнения для средней функции Грина $G(1-2)$.

Из (7) следует, что $G(1-2)$ зависит от флуктуационной части $G'(1;2)$ функции Грина и наоборот. Поэтому попытка написать отдельное уравнение только для $G(1-2)$ приводит к иерархии нелинейных уравнений для $G(1-2)$ (ситуация аналогична проблеме замыкания в теории турбулентности). Простейшее уравнение этой иерархии, с квадратичной нелинейностью, носит название DIA-уравнения (direct interaction approximation equation). Оно было впервые записано и изучено в работе [12]:

$$G(1-2) = G_m(1-2) + \int d3 \int d4\, G_m(1-3) \times \\ \times \nabla_i^{(3)} G(3-4) \nabla_j^{(4)} B_{ij}(3-4) G(4-2). \quad (9)$$

В дальнейшем выяснилась эффективность этого уравнения при вычислении коэффициентов турбулентной диффузии D_T для различных моделей несжимаемой турбулентности (см. [10]). Результаты данной работы подтверждают его эффективность и для акустической турбулентности.

В расчетах удобно использовать функцию $\tilde{g}(p,s)$ — фурье-образ по $\mathbf{R}$ и лаплас-образ по τ от $G(R,\tau)$. Кроме того, мы воспользуемся безразмерными переменными $x = p/p_0$, $t = cp_0\tau$. В этих переменных DIA-уравнение для $\tilde{g}(x,s)$ принимает вид

$$\tilde{g}(x,s) = \left[s + \frac{x^2}{\gamma} + \frac{M^2}{2} \int_0^\infty dy\, E(y) \times \right. \\ \times \int_{-1}^{1} d\mu\, \mu x(\mu x - y) \times \\ \left. \times \int_0^\infty dt\, e^{-(s+\eta y^2)t} \cos(yt) \tilde{G}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, t) \right]^{-1}. \quad (10)$$

Здесь мы ввели безразмерные величины $\gamma = c/p_0 D_m$, $\eta(y) = k(y)p_0/c$; μ — косинус угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Напомним определение безразмерного спектра турбулентности: $E(p) = u_0^2 E(x)/p_0$. Ввиду малости молекулярной диффузии параметр $\gamma \approx \lambda_0/l \gg 1$ (l — длина свободного пробега молекул газа, $D_m \sim c\,l$). Это самый большой параметр задачи. Уже сами уравнения газодинамики предполагают, что $\lambda_0 \gg l$. Если для коэффициента затухания $k(p)$ использовать значения из работы [9], то $\eta(y) = M^2 E(y)$, т. е. это малая величина, но гораздо большая, чем $1/\gamma$, если, конечно, число Маха не слишком мало, что мы будем далее предполагать. Случай очень малого числа Маха, $\gamma M^2 \ll 1$, описывает практически покоящуюся жидкость. В этом пределе можно отбросить интегральный член в (10) и получить равенство

$$\tilde{g}(x,s) \approx \frac{1}{s + x^2/\gamma},$$

т. е. функция Грина G действительно совпадает с G_m.

Легко видеть, что при $x \ll 1$ и $s \ll 1$ интегральный член в (10) превращается в диффузионное выражение $(D_T^{(0)}/D_m)(x^2/\gamma)$ с коэффициентом турбулентной диффузии

$$D_T^{(0)} = \frac{u_0 M}{3p_0} \int_0^\infty dx\, E(x) \int_0^\infty dt\, \cos(yt) e^{-\eta(x)x^2 t} \times \\ \times \left[\tilde{G}(x,t) + x \frac{\partial \tilde{G}(x,t)}{\partial x} \right]. \quad (11)$$

Напомним, что $\tilde{G}(x,t)$ — фурье-образ функции Грина $G(\mathbf{R},\tau)$ по $\mathbf{R}$ в безразмерных переменных x и t. Выражение (11) можно получить также из общей формулы (8), если в качестве $G(1;2)$ взять DIA-выражение $G(\mathbf{R},\tau)$ и перейти к фурье-представлению.

Отметим, что условие $s \ll 1$ означает $\tau \gg \gg 1/cp_0 = T_0$, где T_0 — характерный период колебаний акустических волн. При этом диффузионный режим распространения примеси устанавливается после многих колебаний газа, а не после характерного времени затухания корреляций скорости $\tau_{damp} \sim 1/k(p_0)p_0^2$, которое гораздо больше периода T_0 ($\tau_{damp} \sim T_0/M^2$) и при $M^2 \to 0$ стремится к бесконечности. Как мы уже упоминали, диффузия в основном обеспечивается непериодическим движением газа, которое является следствием суперпозиции хаотических гармонических акустических волн при наличии достаточно широкого спектра турбулентности $E(p)$. Поэтому и время установления диффузии не связано с временем затухания корреляции скоростей.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Для вычисления $D_T^{(0)}$ и вклада корреляторов четвертого порядка $D_T^{(1)}$ (см. формулу (19) из [4]) удобно ввести вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \tilde{g}_c(x,p,q) &= \int\limits_0^\infty dt\,\exp(-pt)\cos(qt)\tilde{G}(x,t) \equiv \\ &\equiv \operatorname{Re}\tilde{g}(x,p-iq), \\ \tilde{g}_s(x,p,q) &= \int\limits_0^\infty dt\,\exp(-pt)\sin(qt)\tilde{G}(x,t) \equiv \\ &\equiv \operatorname{Im}\tilde{g}(x,p-iq). \end{aligned} \tag{12}$$

Выражение (11) для $D_T^{(0)}$ при этом можно записать в виде

$$D_T^{(0)} = \frac{u_0 M}{3p_0}\int\limits_0^\infty dx\,E(x)\times \times\left[\tilde{g}_c(x,p,q) + x\frac{\partial\tilde{g}_c(x,p,q)}{\partial x}\right]_{p=\eta(x)x^2,\ q=x}. \tag{13}$$

Полагая в (10) $s = p - iq$ и выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_c(x,p,q) &= \frac{\alpha(x,p,q)}{\alpha^2(x,p,q)+\beta^2(x,p,q)}, \\ \tilde{g}_s(x,p,q) &= \frac{\beta(x,p,q)}{\alpha^2(x,p,q)+\beta^2(x,p,q)}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(x,p,q) = p + \\ &+ \frac{x^2}{\gamma} + \frac{M^2}{4}\int\limits_0^\infty dy\,E(y)\int\limits_{-1}^1 d\mu\,\mu x(\mu x - y)\times \\ &\times\left[\tilde{g}_c(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, p+\eta(y)y^2, q+y) + \right. \\ &\left. + \tilde{g}_c(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, p+\eta(y)y^2, q-y)\right], \\ &\beta(x,p,q) = q - \\ &- \frac{M^2}{4}\int\limits_0^\infty dy\,E(y)\int\limits_{-1}^1 d\mu\,\mu x(\mu x - y)\times \\ &\times\left[\tilde{g}_s(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, p+\eta(y)y^2, q+y) + \right. \\ &\left. + \tilde{g}_s(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, p+\eta(y)y^2, q-y)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Система уравнений (14), (15) эквивалентна DIA-уравнению (10). Ее преимущество состоит в том, что она непосредственно, без вычисления самой функции Грина $\tilde{G}(x,t)$, позволяет вычислять коэффициенты диффузии $D_T^{(0)}$ и $D_T^{(1)}$. При этом не надо знать функции $\tilde{g}_c(x,p,q)$ и $\tilde{g}_s(x,p,q)$ для всех возможных значений переменной p — в выражение (13) входит только

$$p = \eta(x)x^2 = M^2 E(x)x^2 \ll 1.$$

Легко проверить, что для малых p величина $\alpha(x,p,q)$ мала, порядка $M^2 \ll 1$, а $\beta(x,p,q) \sim q$, напротив, не содержит в первом приближении малого параметра. Для малых значений p асимптотическое решение системы (14), (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha(x,p,q) &= p + \frac{\pi}{6}M^2\,x^2\,E(q) + O(M^4), \\ \beta(x,p,q) &= q - \frac{M^2}{6}x^2\int\limits_0^\infty dy\frac{E(y)}{q+y} + O(M^4). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь мы опустили чрезвычайно малый член x^2/γ. Учитывая малость α по сравнению с β, в промежуточных вычислениях при достаточно гладких спектрах $E(x)$ можно считать $\tilde{g}_c(x,p,q) \approx \pi\delta(q)$. Однако в основной формуле (13), где $\alpha \sim x^2$ и $\beta \sim x$, функция $\tilde{g}_c$ уже не является δ-образной. Пикообразный вид $\tilde{g}_c$ свидетельствует о резонансном характере диффузии в акустической турбулентности — наибольший вклад в диффузию дают близкие по частоте волны. Именно поэтому из (15) получается, что коэффициент α пропорционален спектру $E(q)$, а сам коэффициент диффузии (см. (18)) пропорционален квадрату спектра.

Первые члены в (16), т. е. $\alpha = p$ и $\beta = q$, соответствуют борновскому приближению, использованному в [6, 7]. Подставляя эти значения в (13), получаем

$$D_T^{(Born)} = \frac{u_0\, M}{3p_0} \int_0^\infty dx\, E(x)\eta(x) \to \\ \to \frac{u_0\, M^3}{3p_0} \int_0^\infty dx\, E^2(x). \quad (17)$$

Выражение за стрелкой соответствует модели [9], в которой $k(p) = E(p)/c$. Заметим, что учет отброшенного члена x^2/γ дает добавку $M^2\, D_m$, причем 2/3 этой добавки возникает из-за сжимаемости акустической турбулентности.

Используя DIA-выражения (16), получаем

$$D_T^{(0)} = \frac{u_0\, M}{3p_0} \int_0^\infty dx\, E(x) \left[\eta(x) + \frac{\pi}{2} M^2\, E(x)\right] \to \\ \to \frac{u_0\, M^3}{3p_0} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \int_0^\infty dx\, E^2(x). \quad (18)$$

Сравнение (17) и (18) показывает, что значение DIA-выражения $D_T^{(0)}$ примерно в два с половиной раза больше $D_T^{(Born)}$, причем снова 2/3 добавочного к $D_T^{(Born)}$ вклада (член с $\pi/2$) обусловлено сжимаемостью. Если считать, что $\eta \ll M^2$, то вся диффузия определяется оставшимся выражением, которое описывает блуждание примесной частицы в поле смеси некогерентных акустических гармонических волн в отсутствие любого затухания. Ранее мы уже отмечали резонансный характер этого механизма диффузии ($D_T \sim E^2(x)$). Теперь мы видим, что этот механизм диффузии более эффективен, чем диффузия из-за наличия затухания. В отсутствие затухания $p = 0$, и функция $\tilde{g}_c(x, 0, q)$ является просто косинус-преобразованием функции Грина $\tilde{G}(x, t)$ по времени t и именно она определяет коэффициент диффузии. Если взять, как в работах [6, 7], $\tilde{G}(x, t) \equiv 1$, получим $\tilde{g}_c(x, 0, q) = \delta(q)$, что приводит, согласно (13), к соотношению $D_T^{(Born)} \sim E(0) \equiv 0$, т. е. к отсутствию диффузии. Реальная функция Грина $\tilde{G}(x, t)$ близка к решению DIA-уравнения (10). Эта функция существенным образом зависит от времени, и не только в виде диффузионной экспоненты $\exp(-D_T p^2 \tau)$, она также содержит гармонически изменяющиеся члены типа $\cos(\omega(x)t)$ и $\sin(\omega(x)t)$. Именно эти осциллирующие члены описывают диффузию примесной частицы за счет перехода с одной волны на другую и постепенного удаления от начального положения в условиях существования непрерывного спектра волн. Покажем теперь, что эти осциллирующие члены в $\tilde{G}(x, t)$ действительно существуют.

Асимптотические решения (16) выполняются уже при первой итерации системы (15). Это означает, что для вычисления D_T вполне достаточно использовать линеаризованное DIA-уравнение, когда в ядро уравнения (10) вместо $\tilde{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, t)$ подставляем соответствующую молекулярную функцию Грина или единицу, пренебрегая малым, порядка $1/\gamma \ll 1$, затуханием. Таким образом, при изучении диффузии достаточно рассматривать следующее явное выражение для $\tilde{g}(x, s)$:

$$\tilde{g}(x, s) = \\ = \left[s + \frac{M^2\, x^2}{3} \int_0^\infty dy\, E(y) \frac{s + \eta(y) y^2}{[s + \eta(y) y^2]^2 + y^2} \right]^{-1}. \quad (19)$$

Отметим, что достаточность использования линеаризованного DIA-уравнения для малых значений числа Струхаля, $u_0\tau_0/R_0 \le 1$, для несжимаемой турбулентности была показана в работе [3] (здесь τ_0, R_0 — характерные время жизни и масштаб корреляций скорости). В нашем случае акустической турбулентности роль числа Струхаля играет число Маха, $M \ll 1$. Найти обратное преобразование Лапласа выражения (19) в аналитическом виде удается только для спектра $E(x) = \delta(x - 1)$, хотя именно этот спектр мы не рассматриваем:

$$\tilde{G}(x, t) = \frac{\exp\left(-\eta\delta t/(1+\delta)\right)}{1+\delta} \Bigg\{ 1 + \\ + \delta \left[\cos(\omega(x)t) + \frac{\eta(4+\delta)}{2\omega^3(x)} \sin(\omega(x)t) \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{\eta(2-\delta)}{2(1+\delta)} t \right) \Bigg\} + O(\eta^2). \quad (20)$$

Здесь

$$\eta \equiv \eta(x) = \frac{p_0\, k(p)}{c}, \quad \delta = \frac{M^2 x^2}{3}, \quad \omega^2(x) = 1 + \delta.$$

В пределе $\eta = 0$ функция Грина (20) принимает вид

$$\tilde{G}(x, t) = \frac{1}{1 + M^2\, x^2/3} \times \\ \times \left[1 + \frac{M^2\, x^2}{3} \cos\left(\sqrt{1 + \frac{M^2\, x^2}{3}}\, t \right) \right]. \quad (21)$$

Из формул (20) и (21) видно, что вклад осциллирующих членов весьма существен. Интересно отметить, что закон дисперсии $\omega^2(x) = 1 + M^2\, x^2/3$ отличен от закона дисперсии звуковых волн ($\omega(x) = x$), и что $\omega(x)$ не зависит от параметра затухания $\eta(x)$. Для больших x частота $\omega(x) \approx Mx/\sqrt{3}$. Это предельное соотношение выполняется для произвольного вида спектра, как это легко увидеть из уравнения (19), считая, что $s \gg y$ и $s \gg \eta$. Отметим также, что групповая скорость, соответствующая $\omega(x)$, много меньше скорости звука c:

$$V_{group} = c\frac{\partial\omega(x)}{\partial x} = \frac{2M^2x}{3\sqrt{1+M^2x^2/3}}\,c \ll c. \qquad (22)$$

Хотя при временах, больших времени установления диффузионного режима, пятно примесных частиц увеличивает свой размер $R(\tau)$ по закону $R^2(\tau) \approx 6D_T\,\tau$, групповая скорость, по-видимому, качественно характеризует размывание этого пятна в начальный период диффузии.

Нахождение частот $\omega(x)$ при пренебрежении затуханием корреляций, $\eta = 0$, сводится к нахождению чисто мнимых ($s = \pm i\omega(x)$) корней выражения

$$1 + \frac{M^2\,x^2}{3}\int\limits_0^\infty dy\,\frac{E(y)}{y^2-\omega^2} = 0. \qquad (23)$$

То, что такие корни существуют, показывает простой пример спектра $E(x) = 1/(b-1)$ для x внутри интервала $(1, b)$, и $E(x) = 0$ вне этого интервала. В этом случае существуют даже две частоты, одна лежит внутри интервала $(1, b)$, а другая — вне этого интервала, $\omega > b$.

DIA-уравнение описывает вклад в процесс переноса примеси от всех парных корреляторов скорости, включая и часть корреляторов четвертого порядка. Вне этого уравнения остается вклад так называемых неприводимых корреляторов четвертого порядка (см. подробнее в [13]), когда скорости в четырех пространственно-временных точках усредняются «перекрестно»: $\langle u_i(1)u_j(3)\rangle\langle u_n(2)u_m(4)\rangle$ при $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_4$. При рассмотрении корреляторов четвертого и более высоких порядков мы, как это обычно делается, предполагаем, что ансамбль поля скоростей является гауссовым, т. е. эти корреляторы выражаются в виде произведения всевозможных парных корреляторов. По-видимому, для оценок вклада корреляторов высокого порядка такое предположение обосновано. Явная формула для вклада неприводимых корреляторов четвертого порядка $D_T^{(1)}$ приведена в работе автора [4] (см. формулу (19)). После элементарных тригонометрических преобразований и отбрасывания членов порядка $M^2 \ll 1$ в подынтегральном выражении получаем

$$\begin{aligned} D_T^{(1)} = -\frac{u_0\,M^3}{12p_0}\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty dy\int\limits_{-1}^1 d\mu\,\mu\,E(x)E(y)\,\times \\ \times\left[2xy + (x^2+y^2)\mu + xy\mu^2\right]\times \\ \times\,\tilde{g}_s(y,\eta(y)y^2,y)\tilde{g}_s(x,\eta(x)x^2,x)\,\times \\ \times\,\tilde{g}_c(|\mathbf{x}+\mathbf{y}|,\eta(x)x^2+\eta(y)y^2,x-y)\,+ \\ +\,O\left(\frac{u_0M^5}{p_0}\right). \end{aligned} \qquad (24)$$

Здесь μ — косинус угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Функция $\tilde{g}_c$ является δ-образной функцией при $x \approx y$ с шириной пика порядка $M^2 \ll 1$. Считая спектр $E(x)$ гладким на интервале $\Delta x \sim M^2 \ll 1$ и отбрасывая члены порядка $M^2 \ll 1$ в подынтегральном выражении, получаем окончательно

$$D_T^{(1)} = -\frac{\pi u_0\,M^3}{9p_0}\int\limits_0^\infty dx\,E^2(x) + O\left(\frac{u_0\,M^5}{p_0}\right). \qquad (25)$$

Заметим, что вклад $D_T^{(1)}$ обусловлен именно наличием затухания $\eta(x)$. Если в (16) отбросить свободные члены, то подынтегральный член в (24) становится порядка M^2 и выражение для $D_T^{(1)}$ превращается в несущественную добавку порядка u_0M^5/p_0. Разумеется, это чисто мысленная операция; затухание, хотя бы из-за наличия вязкости, всегда существует, и вклад (25) реален. Этот вклад был упущен в [6], в результате чего была дана неправильная оценка $D_T^{(1)} \sim M^2D_T^{(0)} \ll D_T^{(0)}$. В работе [7] вклад $D_T^{(1)}$ вообще не оценивался.

Если в выражениях (16) оставить только свободные члены, что соответствует борновскому приближению, использованному в [6, 7], то получим отрицательный полный коэффициент турбулентной диффузии:

$$\begin{aligned} D_T^{(Born)} + D_T^{(1)} = -\frac{u_0M}{3p_0}\int\limits_0^\infty dx\,E(x)\,\times \\ \times\left[\frac{\pi}{3}M^2E(x) - \eta(x)\right] \to \\ \to -\frac{(\pi-3)u_0\,M^3}{9p_0}\int\limits_0^\infty dx\,E^2(x). \end{aligned} \qquad (26)$$

Учет сжимаемости не изменяет этот результат, так как коэффициент диффузии D_m (либо даже $D_T \sim u_0\,M^3/p_0$) гораздо меньше коэффициента затухания $k \sim u_0\,M/p_0$. Выражение за стрелкой соответствует модели [9], для которой $\eta(x) = M^2E(x)$.

Только применение осциллирующей функции Грина $\tilde{G}(x,t)$ вида (21), т. е. учет второго члена в выражении (16) для $\alpha(x,p,q)$, и учет сжимаемости приводят к правильному положительному коэффициенту турбулентной диффузии $D_T = D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$:

$$D_T = \frac{u_0 M}{3p_0} \int_0^\infty dx\, E(x) \left[\eta(x) + \frac{\pi}{6} M^2 E(x)\right] \to$$
$$\to \frac{(6+\pi) u_0\, M^3}{18 p_0} \int_0^\infty dx\, E^2(x) + O\left(\frac{u_0 M^5}{p_0}\right). \quad (27)$$

Корреляторы шестого порядка дают вклад в D_T порядка $u_0\, M^5/p_0$, т. е. гораздо меньший основного выражения (27). Учитывая, что выражение (26), обусловленное наличием затухания корреляций скорости, составляет примерно 3 % от (27), приходим к выводу, что основной механизм диффузии примесных частиц в акустической турбулентности представляет собой хаотические блуждания в поле некогерентного наложения гармонических звуковых волн, образующих сплошной спектр.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты работы. Прежде всего впервые продемонстрировано, что использование только первого (борновского) приближения для вычисления коэффициента турбулентной диффузии D_T в акустической турбулентности является неверным, так как вклад следующего приближения, даже для очень малых значений числа Маха, $M \ll 1$, отрицателен и несколько превышает по величине вклад первого приближения. В работе представлена процедура правильного вычисления D_T, основанная на асимптотическом решении нелинейного DIA-уравнения для средней функции Грина $\tilde{G}(p,\tau)$, которая имеет вид затухающих со временем осцилляций. Показано, что решающим обстоятельством является соответствие этой функции Грина физике процесса переноса примесных частиц.

Диффузия примесной частицы в акустической турбулентности происходит из-за двух причин. Во-первых, затухание коррелированных движений газа, обусловленное вязкостью и, что более важно, нелинейным взаимодействием волн, не позволяет примесной частице вернуться в исходное положение. Во-вторых, как впервые показано в данной работе, даже в пренебрежении этим затуханием некогерентное наложение волн приводит к хаотическому блужданию частицы в среде. Вычисления показали, что второй механизм гораздо сильнее первого и именно он приводит к окончательной формуле (27) для коэффициента диффузии D_T. В итоге выяснилось, что хорошим способом вычисления D_T является использование формулы первого приближения при пренебрежении затуханием коррелятора скоростей, а в качестве функции Грина — решения (19) линеаризованного DIA-уравнения. Пренебречь коэффициентом затухания при таком методе вычисления D_T необходимо, чтобы не вычислять большую отрицательную поправку от второго приближения, обусловленную вкладом затухания и корреляторами скоростей четвертого порядка, которая практически полностью компенсирует вклад затухания в D_T от первого приближения. Заметим, что, вообще говоря, положительный вклад в D_T от механизма затухания в первом приближении совпадает по порядку величины с вкладом второго механизма. Вклад сжимаемости (см. второй член в (8)), не учитываемый ранее, составляет примерно 2/3 от полного коэффициента диффузии. Этот дополнительный член в общей формуле (8) для D_T был впервые получен в работе [3].

Полученные результаты относятся к акустической турбулентности со сплошным спектром волн. Для одномодовой турбулентности (спектр $E(p) = \delta(p - p_0)$) диффузия определяется только первым механизмом, т. е. затуханием. Это непосредственно видно из выражения для функции Грина (20) для этого случая.

В работе дано чисто математическое решение проблемы правильного вычисления коэффициента диффузии примесных частиц в акустической турбулентности со сплошным спектром волн. Для более полного физического понимания процесса диффузии примесных частиц в акустической турбулентности, несомненно, было бы очень полезно вывести чисто качественно полученную нами формулу для D_T. Зависимость $D_T \propto u_0 \lambda_0 M^3$, по-видимому, можно обосновать из соображений размерности следующим образом. Пренебрегая малым вкладом первого механизма диффузии, можно считать, что D_T зависит от параметров c, u_0 и $\lambda_0 \approx 1/p_0$. Элементарный акт диффузии — перескок частицы с одной волны на другую — в статистически изотропной среде может зависеть от квадрата скорости первой волны и от квадрата скорости второй, т. е. $D_T \propto u_0^4 \propto M^4$. Размерным коэффициентом пропорциональности может быть только $c\lambda_0$. В итоге получаем

$$D_T = \text{const} \cdot c\lambda_0 M^4 = \text{const} \cdot u_0 \lambda_0 M^3,$$

что совпадает с формулой (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. A **20**, 196 (1921).

2. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **65**, 1 (1974).

3. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **63**, 139 (1992).

4. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **114**, 930 (1998).

5. С. И. Вайнштейн, ДАН СССР **195**, 793 (1970).

6. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН **106**, 431 (1972).

7. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. В. Соколов, ЖЭТФ **88**, 487 (1985).

8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

9. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР **192**, 297 (1970).

10. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **111**, 871 (1997).

11. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **101**, 1216 (1992).

12. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).

13. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, Наука, Москва (1967).