ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 5 (11), стр. 1019–1021 

# МЕХАНИЗМ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БИНАРНОЙ СМЕСИ, НАГРЕВАЕМОЙ СВЕРХУ

***Л. Х. Ингель*** *

*Научно-производственное объединение «Тайфун»*
*249038, Обнинск, Калужская обл., Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 2002 г.

Показано, что усиление стабилизирующего потока плавучести, направленного от поверхности в глубь бинарной смеси (например, соленой воды), может приводить к возникновению конвективной неустойчивости.

PACS: 44.25.+f, 47.27.Te

Известны отдельные физические механизмы, приводящие к парадоксальному, на первый взгляд, результату: конвективная неустойчивость жидкости возникает, вопреки интуитивным представлениям, при нагреве не снизу, а сверху, т. е. в ситуациях, когда плотность жидкости с ростом глубины возрастает [1, 2]. В настоящей работе указана еще одна такая возможность.

Рассматриваем полуограниченный слой жидкой среды, стратифицированный как по температуре, так и по концентрации примеси (см. рисунок ниже). Для определенности можно говорить, например, о соленой воде, вклад в плотностную стратификацию которой вносят вертикальные распределения температуры $T(z)$ и концентрации соли $s(z)$ (ось $z$ направлена от горизонтальной поверхности среды вертикально вниз). Предполагаем, что среда нагревается сверху, так что в ней сформирован постоянный вертикальный градиент температуры

$$\gamma_T^{(1)} = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} < 0.$$

Вместе с тем в среде имеется и стратификация примеси:

$$\gamma_s^{(1)} = \frac{\partial s^{(1)}}{\partial z} < 0.$$

В рамках используемого обычно приближения [1, 3, 4] предполагаем линейную зависимость плотности $\rho$ от температуры и концентрации примеси:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)\right]. \qquad (1)$$

Здесь $\alpha$ — термический коэффициент расширения среды, $\beta > 0$ — соответствующий коэффициент для концентрации примеси (в океанологии его называют коэффициентом соленостного сжатия). Индексом «нуль» обозначены постоянные («отсчетные») значения соответствующих величин. При постоянных значениях градиентов $\gamma_T^{(1)}$ и $\gamma_s^{(1)}$ плотность среды линейно зависит от глубины $z$:

$$\rho^{(1)}(z) = \rho_0 \left[1 + \left(-\alpha\gamma_T^{(1)} + \beta\gamma_s^{(1)}\right) z\right] \qquad (2)$$

(верхний индекс (1) относится к начальному «фоновому» состоянию).

Упомянутым градиентам $\gamma_T^{(1)}$ и $\gamma_s^{(1)}$ соответствуют определенные потоки тепла и примеси на горизонтальной поверхности среды:

$$Q_T^{(1)} = -c_p\rho_0\kappa\gamma_T^{(1)} > 0, \quad Q_s^{(1)} = -\rho_0\chi\gamma_s^{(1)} > 0, \quad (3)$$

где $c_p$ — удельная теплоемкость среды, $\kappa$ и $\chi$ — коэффициенты обмена.

Хотя поток примеси, направленный в глубь среды, вносит дестабилизирующий вклад в стратификацию плотности (при $\gamma_s^{(1)} < 0$ соответствующее слагаемое в (2) убывает с ростом глубины), нагрев сверху предполагается достаточно сильным, так что в целом стратификация плотности достаточно устойчива. Напомним, что для гидродинамической устойчивости такой системы недостаточно выполнения условия

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} > 0,$$

*E-mail: lingel@obninsk.com

что эквивалентно условию

$$-\beta\gamma_s < -\alpha\gamma_T$$

или

$$\gamma_s > \frac{\alpha}{\beta}\gamma_T.$$

Если значения коэффициентов обмена $\kappa$ и $\chi$ различаются (для соленой воды $\chi \ll \kappa$), то условие устойчивости может быть гораздо более жестким ввиду возможности специфического механизма неустойчивости, обусловленной «двойной диффузией» [1, 5]:

$$-\gamma_s < -\frac{\chi}{\kappa}\frac{\alpha}{\beta}\gamma_T \quad \text{или} \quad \gamma_s > \frac{\chi}{\kappa}\frac{\alpha}{\beta}\gamma_T. \tag{4}$$

Предполагаем, что в рассмотренном выше «фоновом» состоянии это условие выполняется. Применительно к потокам это означает выполнение неравенства

$$Q_T^{(1)} > c_p\left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^2\frac{\beta}{\alpha}Q_s^{(1)}. \tag{5}$$

Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ потоки на границе $z = 0$ изменились. Для простоты предполагаем, что они мгновенно приняли новые постоянные значения $Q_T^{(2)}$ и $Q_s^{(2)}$, причем новые значения соответствуют увеличению потока плавучести сверху за счет уменьшения потока примеси:

$$Q_s^{(2)} < Q_s^{(1)}.$$

Допускается даже изменение знака потока примеси: $Q_s^{(2)} < 0$ («распреснение» сверху вместо «осолонения»). При этом предполагается, что нагрев среды сверху продолжается, хотя и уменьшается по величине:

$$0 < Q_T^{(2)} < Q_T^{(1)}.$$

Скачкообразное изменение потоков на границе, очевидно, влечет за собой эволюцию полей температуры и концентрации примеси. Расчет этой эволюции сводится к решению одномерных уравнений теплопроводности и диффузии

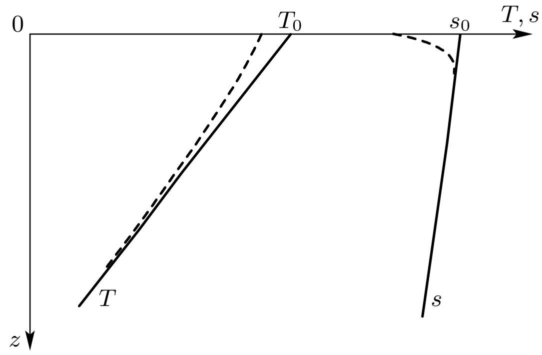
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{6}$$

с начальными условиями

$$T = T^{(1)} = T_0 + \gamma_T^{(1)}z,$$
$$s = s^{(1)} = s_0 + \gamma_s^{(1)}z \quad \text{при} \quad t = 0$$

и граничными условиями

$$T \to T^{(1)}, \quad s \to s^{(1)} \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$




Схематическое изображение вертикальных профилей температуры $T$ и концентрации $s$ примеси. Сплошные линии соответствуют первоначальному состоянию, штриховые — эволюции после изменения потоков на поверхности среды

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_T^{(2)} = -\frac{Q_T^{(2)}}{c_p\rho_0\kappa},$$
$$\frac{\partial s}{\partial z} = \gamma_s^{(2)} = -\frac{Q_s^{(2)}}{\rho_0\chi} \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение, которое легко находится методом суперпозиции, имеет вид

$$T = T_0 + \gamma_T^{(1)}z - \frac{2\left(Q_T^{(1)} - Q_T^{(2)}\right)}{c_p\rho_0\kappa}\sqrt{\kappa t}\, i\,\mathrm{erfc}\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}},$$

$$s = s_0 + \gamma_s^{(1)}z - \frac{2\left(Q_s^{(1)} - Q_s^{(2)}\right)}{\rho_0\chi}\sqrt{\chi t}\, i\,\mathrm{erfc}\frac{z}{\sqrt{4\chi t}},$$

где $i\,\mathrm{erfc}$ — символ кратного интеграла вероятностей [6]. Эволюция полей схематически изображена на рисунке. Возмущения проникают от поверхности в среду по диффузионным законам — глубина проникновения пропорциональна $\sqrt{t}$. Но коэффициенты пропорциональности для температуры и концентрации примеси могут существенно различаться. Например, для соленой воды $\kappa \gg \chi$, так что температурное возмущение проникает в среду на порядок быстрее. Амплитуда возмущений также растет пропорционально $\sqrt{t}$. Для вертикальных градиентов получаем

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_T^{(1)} - \left(\gamma_T^{(1)} - \gamma_T^{(2)}\right)\mathrm{erfc}\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \gamma_s^{(1)} - \left(\gamma_s^{(1)} - \gamma_s^{(2)}\right)\mathrm{erfc}\frac{z}{\sqrt{4\chi t}}.$$

Особенно просты асимптотики решения для малых,

$$z \ll \min\left\{\sqrt{4\kappa t}, \sqrt{4\chi t}\right\}$$

и больших,

$$z \gg \max\left\{\sqrt{4\kappa t}\,, \sqrt{4\chi t}\right\}$$

глубин. На больших глубинах

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \gamma_T^{(1)}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} \approx \gamma_s^{(1)}.$$

Иными словами, на таких глубинах сохраняется «фоновое» состояние — возмущение, связанное с изменением потоков на поверхности, не успевает распространиться на такие расстояния. В этой области среда устойчива, как это было и при $t < 0$. На малых глубинах имеем

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \gamma_T^{(2)}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} \approx \gamma_s^{(2)},$$

иначе говоря, в этой области стратификация успела приспособиться к новым значениям потоков на поверхности. Поскольку поток плавучести сверху лишь усилился при $t \geq 0$, естественно ожидать, что в области, куда успели распространиться возмущения от поверхности, среда стала еще более устойчивой по отношению к конвекции. Это действительно так, если для изменившихся потоков выполняется условие, аналогичное (5):

$$Q_T^{(2)} > c_p \left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^2 \frac{\beta}{\alpha}\, Q_s^{(2)}. \tag{7}$$

Выполнение условия (7) особенно очевидно, если среда по-прежнему нагревается сверху ($Q_T^{(2)} > 0$), а поток примеси на поверхности стал нулевым или отрицательным.

Но, помимо рассмотренных асимптотик, существует промежуточная область. В частности, если $\kappa$ на два порядка больше $\chi$, то, очевидно, существует (и постоянно расширяется) область

$$\sqrt{4\chi t} \lesssim z \ll \sqrt{4\kappa t}\,, \tag{8}$$

в которой

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \gamma_T^{(2)}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} \approx \gamma_s^{(1)}.$$

Речь идет об области, в которую термические возмущения от поверхности успели проникнуть, а соленостные — нет. В этой области может нарушаться условие (4), поскольку значение $\gamma_s$ осталось неизменным («фоновым»), а $\gamma_T$ — возросло (успело приспособиться к новым условиям на границе).

Таким образом, если

$$\gamma_T^{(2)} > \frac{\kappa}{\chi}\frac{\beta}{\alpha}\gamma_s^{(1)} \quad \text{или} \quad Q_T^{(2)} < c_p \left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^2 \frac{\beta}{\alpha}\, Q_s^{(1)},$$

то в промежуточной области (8) нарушаются условия устойчивости и должна возникать конвекция, обусловленная «двойной (дифференциальной) диффузией».

Подчеркнем нетривиальность результата. Задаваемые на границе потоки плавучести носят «стабилизирующий» характер: в любой момент времени соответствующая им стационарная стратификация столь устойчива, что исключает возникновение конвективной неустойчивости. Но благодаря нестационарности этих потоков и различию в скоростях распространения возмущений, температуры и концентрации, в глубине среды может возникать область, в которой условия устойчивости не выполняются.

Легко видеть, что предполагавшаяся выше полуограниченность среды не играет принципиальной роли. Аналогичный эффект возможен и при задании нестационарных стабилизирующих потоков на нижней границе среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-05-64203) и МНТЦ (проект G-553).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Тернер, *Эффекты плавучести в жидкостях*, Мир, Москва (1977).
2. Л. Х. Ингель, УФН **167**, 779 (1997).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
4. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
5. G. Walin, Tellus **16**, 389 (1964).
6. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).