ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 4 (10), стр. 707–716

МИКРОМАЗЕРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ НА КОРРЕЛИРОВАННЫХ АТОМАХ

В. Н. Горбачев[*], *А. И. Трубилко*[**]

Северо-западный институт печати
Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна
191180, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 4 марта 2002 г.

Рассмотрено вынужденное излучение двухуровневых атомов в высокодобротном резонаторе в условиях, когда накачка приводит к возникновению коррелированных многоатомных состояний. На основе многочастичной задачи получено кинетическое уравнение для квазивероятности Глаубера–Сударшана, описывающее поле в приближении Фоккера–Планка. В этом приближении статистика света определяется атомными корреляционными функциями не выше второго порядка. Для двух типов накачки, которая создает исходные сепарабельные состояния с классической корреляцией и перепутанные состояния, найдены шумы света в режиме микромазерной генерации. Показано, что наличие исходной двухатомной корреляции приводит к увеличению шумов интенсивности. Указано перепутанное состояние атомов, приводящее к генерации неклассического света со стационарной фазой и шумами, которые могут быть почти полностью подавлены в низкочастотной области спектра.

PACS: 42.50.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Микромазерная генерация света, предложенная в [1, 2], в последнее время привлекает большое внимание. С одной стороны, это связано с интенсивным исследованием свойств микромазерных источников излучения, с другой — с возможностью экспериментальной проверки моделей, в которых необходимо квантовое описание взаимодействия атомов и поля. Особенностью микромазерных источников является экспериментальная реализация условий, при которых за время взаимодействия атомов с полем практически не проявляется атомная релаксация, поэтому вклад спонтанных процессов невелик и основными являются процессы стимулированного излучения. Статистические свойства стимулированного излучения определяются атомными корреляциями или атомными шумами, где важное место занимает механизм накачки. При регулярном характере накачки в лазере или микромазере может генерироваться свет, который характеризуется строгой регулярностью потока фотонов во времени или субпуассоновской статистикой фотонов [3]. Такие свойства света представляют непосредственный практический интерес, поскольку в этом случае почти полностью отсутствуют шумы.

Однако накачка может создавать коррелированные атомы. Для описания источника излучения с такой накачкой стандартный подход типа Лэмба–Скалли [4], на котором построено большинство теорий микромазерной генерации, оказывается неприменим. Дело в том, что он основан на одночастичной задаче, где априори атомы считаются независимыми, а их корреляция, например типа «регулярной накачки», вводится феноменологически [3]. Наш подход основан на исходной многочастичной задаче, описывающей взаимодействие N двухуровневых атомов с одной модой высокодобротного резонатора. В работе [5], где также использован многочастичный подход, найдена нетривиальная динамика генерации микромазерного поля на начальной (но в то же время квазистационарной) стадии эволюции для пуассоновской инжекции кластеров, состоящих из возбужденных независимых атомов. Поэтому вопрос о том, как начальное состояние атомов влияет на свойства излучения, имеет, на наш взгляд, само-

[*] E-mail: vn@vg3025.spb.edu
[**] E-mail: tai@at3024.spb.edu

стоятельный интерес.

Процесс получения состояний с многочастичной корреляцией представляет собой отдельную задачу, которую мы не будем здесь рассматривать. Мы ограничимся лишь некоторыми типами состояний, которые могут быть созданы, например, с помощью протоколов квантовой теории информации. При этом все N атомов сразу переводятся в коррелированное состояние, поэтому нет необходимости отдельно обсуждать вопрос создания регуляризации внутри такого кластера. На основе многочастичного подхода мы строим для поля кинетическое уравнение Фоккера–Планка, используя формализм, развитый в работе [6]. Однако, поскольку мы считаем атомы невзаимодействующими, несмотря на то что они находятся в скоррелированном состоянии, дополнительных усложнений в цепочках Бардина–Боголюбова–Грина–Кирквуда–Ивона не возникает. Особенностью в описании поля с помощью кинетического уравнения в приближении Фоккера–Планка является то, что статистика излучения определяется атомными корреляционными функциями не выше второго порядка. Отсюда, в частности, следует, что два разных состояния с одинаковой двухатомной матрицей плотности приводят к одной и той же статистике излучения.

Мы рассматриваем пример накачки, которая создает два типа исходных состояний. К первому из них относится сепарабельное состояние с классической корреляцией, которая описывается N частичной матрицей плотности

$$f(1\ldots N) = \lambda_0(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes N} + \lambda_1(|1\rangle\langle 1|)^{\otimes N}, \qquad (1)$$

где $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, $A^{\otimes N}$ — тензорное произведение $A\otimes A\ldots\otimes A$. В этом состоянии любая пара атомов имеет двухчастичную матрицу плотности вида

$$f(1,2) = \lambda_0|00\rangle\langle 00| + \lambda_1|11\rangle\langle 11|,$$

где $\lambda_{0,1}$ — заселенности уровней. В рамках простой модели накачки, где атомы облучаются классической монохроматической волной, приготовить N-частичное состояние (1) скорее всего не удастся. Действительно, пусть набор из N независимых атомов взаимодействует с классической волной. Исходная энтропия в этом случае равна $S = NE_1$, где E_1 — энтропия отдельного атома. Пусть

$$E_1 = -\lambda_1 \lg\lambda_1 - (1-\lambda_1)\lg(1-\lambda_1).$$

Процесс накачки можно рассматривать как унитарную эволюцию, при этом энтропия будет сохраняться, а для состояния, описываемого (1), она равна $S' = E_1$. Поэтому никаких корреляций между атомами возникать не будет. Иными словами, классическое монохроматическое поле никаких корреляций не создает.

Состояния второго типа являются несепарабельными, или перепутанными, при этом частицы обладают особой квантовой корреляцией. Состояния такого типа реализованы экспериментально [7]. В работе [8] рассмотрен нетривиальный пример распада двух атомов при взаимодействии с общим термостатом, при котором перепутанные атомные состояния возникают даже в отсутствие прямого межатомного взаимодействия.

Одно из рассматриваемых нами состояний принадлежит к классу GHZ (Greenberger–Horne–Zeilinger):

$$|\mathrm{GHZ}_N\rangle = \alpha|0\rangle^{\otimes N} + \beta|1\rangle^{\otimes N}, \qquad (2)$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. При $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ степень перепутанности максимальна, а в случае $N = 2$ возникает пара Эйнштейна–Подольского–Розена (EPR). Состояние (2) является чистым, с двухчастичной матрицей (1). Полагая $\alpha = 0$, получаем случай N независимых атомов, каждый из которых находится в состоянии $|1\rangle$, которое для определенности будем считать верхним. Если накачка создает такие атомы, то в режиме микромазерной генерации свет будет обладать субпуассоновской статистикой фотонов, так же как для модели с регулярной накачкой, причем для этих двух случаев полностью совпадают уравнения Фоккера–Планка. Это означает, что одноатомная модель мазера с регулярной накачкой эквивалентна рассматриваемому нами случаю, при котором все созданные независимые атомы находятся на верхнем уровне.

Второе перепутанное состояние, которое мы рассматриваем, имеет вид

$$|\zeta\rangle = \alpha|bb\rangle + \beta|\Psi^+\rangle, \qquad (3)$$

где

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}},$$

$b = 0, 1$. Находясь в таком состоянии, каждый атом обладает когерентностью или поляризацией. Поэтому в этом случае будет генерироваться свет, у которого фаза имеет стационарное распределение. Мы нашли условия, при которых генерируемое поле, выходящее из резонатора, обладает субпуассоновской статистикой фотонов.

Основной целью нашей работы является вывод кинетического уравнения для поля генерации при условии, что накачка создает коррелированные атомы. На основе полученного уравнения рассматриваются характеристики стационарной микромазерной генерации.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приведен вывод кинетического уравнения в приближении Фоккера–Планка с помощью метода адиабатического исключения атомных переменных. Поведение атомных средних, определяющих статистику поля, рассмотрено в разд. 3. В разд. 4 записаны диффузионные коэффициенты кинетического уравнения для разных исходных атомных состояний. В разд. 5, 6 рассчитаны шумы света для двух типов накачки, создающей классическую и квантовую корреляцию.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в высокодобротном резонаторе находятся N одинаковых двухуровневых атомов, которые взаимодействуют с одной резонаторной модой поля излучения в течение некоторого времени T. Пусть частота моды электромагнитного поля равна частоте рабочего перехода. Для микромазерной генерации характерны следующие приближения: $1/T \gg \gamma \gg C$, где γ — скорость распада атомных уровней, C — скорость затухания полевой моды. Матрица плотности F, описывающая атомы и поле при временах меньших T, когда атомной релаксацией можно пренебречь, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}F = [\vartheta, F],\\ &\vartheta = -i\hbar^{-1}V,\\ &V = -i\hbar g(S_{10}b - S_{01}b^{\dagger}). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$g = d\hbar^{-1}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2L^3\epsilon_0}},$$

d — дипольный момент перехода, $b^{\dagger}$, b — фотонные операторы рождения и уничтожения, а атомные операторы S_{xy} определены соотношениями

$$\begin{aligned} &S_{xy} = \sum_{a=1}^{N} s_{xy}(a),\\ &s_{xy}(a) = |x\rangle_a\langle y|,\\ &x, y = 0, 1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $|0\rangle_a$ и $|1\rangle_a$ — соответственно, нижнее и верхнее состояния атома a. Такие коллективные атомные операторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[S_{ij}, S_{kl}] = \delta_{jk}S_{il} - \delta_{il}S_{kj}.$$

Чтобы получить кинетическое уравнение для электромагнитного поля, будем использовать схему из работы [6], согласно которой для матрицы плотности F вводится представление по когерентным состояниям электромагнитного поля:

$$F = \int d^2\alpha\ \Phi(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{6}$$

Новая матрица плотности Φ является операторной по атомным переменным и числовой функцией поля. Ее усреднение по атомам приводит к известной квазивероятности Глаубера–Сударшана или P-функции. Из (4) можно получить уравнение для Φ, учитывая, что

$$[\vartheta, F] \leftrightarrow [\vartheta_0, \Phi] + \partial_\alpha(D\Phi),$$

где операторы поля заменяются на комплексные амплитуды α, α^* и производные по ним, ∂_α. Возникающий гамильтониан ϑ_0 описывает взаимодействие атомов в «классическом» поле с комплексной амплитудой α и имеет вид $\vartheta_0 = g(S_{01}\alpha^* - \text{c.c.})$. При этом слагаемое с производными по комплексным амплитудам определено соотношением

$$\partial_\alpha(D\Phi) = -\frac{g\partial(S_{01}\Phi)}{\partial\alpha} + \text{H.c.}$$

Представим Φ в виде

$$\Phi = P \otimes f + \Pi, \tag{7}$$

где f — атомная матрица плотности, для которой $\mathrm{Sp}_A f = 1$, Π — корреляционная матрица плотности, $\mathrm{Sp}_A \Pi = 0$, усреднение проводится по атомным переменным. Для квазивероятности $P = \mathrm{Sp}_A \Phi$ можно записать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -g\frac{\partial}{\partial\alpha}(\langle S_{01}\rangle P + \mathrm{Sp}_A(S_{01}\Pi)) + \text{H.c.} \tag{8}$$

Угловыми скобками здесь и далее обозначено среднее атомных операторов по состоянию, которое описывается матрицей плотности f: $\langle S_{xy}\rangle = \mathrm{Sp}_A(S_{xy}f)$ $x, y = 0, 1$. Для f задача, где взаимодействие атомов с полем описывается гамильтонианом ϑ_0, в котором поле представлено только комплексным числом α, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}f = [\vartheta_0, f]. \tag{9}$$

Исходя из (4), с учетом (8) и (9) можно записать точное уравнение для Π. Однако больший интерес представляет приближенное уравнение, которое для корреляционной матрицы Π дает решение, содержащее производные по α не выше первого порядка. Тогда в уравнении для поля (8) возникают производные только второго порядка, и, следовательно, P удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка. Это приводит к следующей задаче для Π:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi = [\vartheta_0, \Pi] - g\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(S_{01} - \langle S_{01}\rangle)f + \text{H.c.}\right]P. \quad (10)$$

Считая, что характерная скорость развития поля меньше, чем атомов (а это приближение по условиям задачи выполнено), для P можно получить замкнутое кинетическое уравнение. Поскольку T является характерным временем взаимодействия атомов с полем, необходимо проинтегрировать уравнения для P на промежутке от t до $T+t$. Введем крупномасштабную производную

$$\frac{P(T+t) - P(t)}{T} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Учитывая, что на интервале времени T поле не развивается, получим кинетическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t) = -g\frac{1}{T}\int\limits_{t}^{T+t} dt' \times$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\langle S_{01}(t')\rangle P(t) + \mathrm{Sp}_A(S_{01}\Pi(t')) + \text{H.c.}\right]\right\}. \quad (11)$$

Для простых моделей релаксации затухание полевой моды может быть учтено в этом уравнении с помощью дополнительного слагаемого, вклад от которого будет приведен ниже. Коэффициенты в (11) определяются из решения уравнений для матриц плотности f и Π при начальных значениях $f(0)$ и $\Pi(0)$, например, при $t = 0$. Тогда можно получить состояние поля в резонаторе к следующему моменту времени T, при этом T следует считать много меньшим характерного времени атомной релаксации, которая здесь не учитывается. Также можно задавать состояние в момент времени t, вводя таким образом механизм накачки. Тогда приготовленные накачкой атомы взаимодействуют с резонаторной модой в течение времени T, что можно осуществить, например, двумя способами. Один из них заключается в том, что атомы пролетают сквозь резонатор за время T, взаимодействуя с модой. Одинаковое время взаимодействия разных кластеров с модой достигается в современных экспериментах с высокой степенью точности. Другой способ основан на модуляции добротности. При этом атомы в резонаторе могут быть расположены, например, в ловушках, а на промежутках времени T включается добротность резонатора. Для обоих случаев при интегрировании в (11) можно взять $t = 0$ и считать заданным состояние атомов $f(0)$, полагая корреляцию атомов и поля $\Pi(0) = 0$.

Способы создания активных атомов играют большую роль, поскольку во многом определяют свойства генерируемого света. При теоретическом описании механизмов накачки оказывается важным подход, который используется для решения задачи. Для вывода управляющего уравнения мы априори используем многоатомную задачу, где накачка вводится как начальное условие для атомной матрицы плотности и в явном виде учитывается с помощью таких параметров, как заселенности атомных уровней и число атомов N. Чтобы записать кинетическое уравнение для поля, нужно использовать обычные приближения, считая, что время T взаимодействия атомов с резонаторной модой много меньше времени жизни атомов на рабочих уровнях, а также времени жизни фотонов в резонаторе. Однако на временах порядка T число атомов как параметр, задаваемый накачкой, может меняться, например, случайным образом $N = N(t)$. Учет этого обстоятельства при условии, что накачка описывалась пуассоновской статистикой, проведен в [3], однако в рамках исходного одноатомного подхода, в котором $N = rT$, где $r = r(t)$ — скорость инжекции в резонатор активных атомов. С помощью этого подхода было рассмотрено регулярное возбуждение атомов, для чего потребовалась феноменологическая модификация процедуры вывода уравнения, приведенного в работе [3]. С физической точки зрения регулярная накачка означает, что каждый атом, влетающий в резонатор, находится на верхнем уровне, поэтому за время взаимодействия T с модой в резонаторе всегда оказывается $N = rT$ одинаковых атомов. В рассматриваемом случае мы считаем, что число атомов N после накачки не зависит от времени. С физической точки зрения это равносильно регулярному возбуждению, которое приводит к субпуассоновской статистике фотонов. Однако мы можем рассмотреть иную оптическую схему, в которой N атомов находятся в резонаторе, а не инжектируются. Тогда с помощью, например, модуляции добротности взаимодействие с полем можно включать на промежутки времени T, разделенные интервалом, который много больше всех характерных времен, а исходное состояние атомов можно готовить с помощью процессов клонирования. Особенности протоколов типа клонирования или телеклонирования позволяют сразу получить N копий или перевести все атомы в одно состояние. Это свойство выглядит привлекательным с точки зрения регулярной накачки, которая и решает задачу, как приготовить много атомов в одинаковом состоянии.

3. АТОМНЫЕ СРЕДНИЕ

Согласно (8) поведение электромагнитного поля определяется атомными средними двух типов: $\langle S_p(t)\rangle = \mathrm{Sp}_A(S_p f(t))$ и $\mathrm{Sp}_A(S_p\Pi(t))$, где $p = 0,1,2,3$ или $p = 00,01,10,11$, если для p использовать бинарное представление. Атомные средние описывают полуклассическое поведение света и его шумы, и для их вычисления требуются одно- и двухчастичные матрицы плотности.

Для одинаковых атомов средние типа $\langle S_p(t)\rangle = N\langle s_p(t;1)\rangle$ определяются через одноатомные средние $\langle s_p(t;1)\rangle = \mathrm{Sp}(s_p f(t;1)))$, для вычисления которых требуется одночастичная матрица $f(t;1) = \mathrm{Sp}_{2\ldots N}\, f(t;1\ldots N)$. Здесь полная матрица плотности $f = f(t;1\ldots N)$, описывающая N атомов, не факторизуется из-за особенности накачки, которая может создавать коррелированные атомные состояния.

Иная ситуация возникает при вычислении средних по корреляционной матрице Π. Интегрируя (10), найдем, что они определяются дисперсиями многоатомных операторов

$$\mathrm{Sp}_A(S_p\Pi(t)) = -g\int_0^t dt' \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}D_{p01}(t,t') + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}D_{10p}(t',t)\right]P(t), \quad (12)$$

где двухвременные корреляционные функции $D_{pq}(t,t')$, $p,q = 0,1,2,3$ имеют вид

$$D_{pq}(t,t') = \langle S_p(t)S_q(t')\rangle - \langle S_p(t)\rangle\langle S_q(t')\rangle, \quad (13)$$

а усреднение гейзенберговских операторов $S_p(t)$ проводится по начальному состоянию атомов $f(t=0;1\ldots N)$. При записи (12) все атомные операторы считаются коммутирующими с операторами дифференцирования по комплексной амплитуде, что является типичным условием для приближения Фоккера–Планка [6], которое используется при записи кинетического уравнения. Выражения для дисперсий можно представить через одно- и двухатомные корреляторы

$$D_{pq}(t,t') = N[\langle s_p(t;1)s_q(t';1)\rangle - \langle s_p(t;1)\rangle\langle s_q(t';1)\rangle] + \\ + N(N-1)[\langle s_p(t;1)s_q(t';2)\rangle - \\ - \langle s_p(t;1)\rangle\langle s_q(t';1)\rangle]. \quad (14)$$

Здесь для вычисления средних, формирующих диффузионные коэффициенты в кинетическом уравнении, помимо одночастичной матрицы требуется двухчастичная $f(t=0;12)$. Это означает, что в приближении Фоккера–Планка шумы света, взаимодействующего с атомами, определяются только двухатомными корреляционными функциями.

В данном случае легко записать оператор эволюции для задачи (9). Гамильтониан ϑ_0 представляет сумму одноатомных гамильтонианов взаимодействия $\sum_a \vartheta_0(a)$, $\vartheta_0(a) = g(s_{01}(a)\alpha^* - \text{H.c.})$, поэтому оператор эволюции $U(1\ldots N)$ имеет вид произведения одночастичных операторов, для которых можно записать замкнутые выражения

$$U(1\ldots N) = U(1)^{\otimes N}, \quad (15)$$

$$U(1) \equiv U = \exp(t\vartheta_0(1)) = \mu + \nu s_{10}(1) - \nu^* s_{01}(1).$$

Здесь

$$\mu = \cos(g|\alpha|t), \quad \nu = -\frac{\alpha}{|\alpha|}\sin(|\alpha|t).$$

С помощью (15) атомные корреляционные функции можно вычислять в гейзенберговском представлении, в котором одночастичный оператор имеет вид

$$s_p(t;1) = \sum_q R_{pq}(t)s_q(1), \quad (16)$$

где $p,q = 0,1,2,3$, а унитарная матрица R_{pq} определена выражением

$$R_{pq} = \begin{pmatrix} \mu^2 & -\mu\nu & -\mu\nu^* & |\nu|^2 \\ \mu\nu & \mu^2 & -\nu^2 & -\mu\nu \\ \mu\nu^* & -\nu^{*2} & \mu^2 & -\mu\nu^* \\ |\nu|^2 & \mu\nu & \mu\nu^* & \mu^2. \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Используя (16), можно найти дисперсии атомных операторов $D_{pq}(t,t')$, которые выражаются через начальные одноатомные средние:

$$D_{pq}(t,t') = \sum_{PQ} R_{pP}(t)R_{qQ}(t')D_{PQ}(0,0), \quad (18)$$

где $p,q,P,Q = 0,1,2,3$. Начальная корреляционная функция $D_{PQ}(0,0)$ определена согласно (14), где $t = t' = 0$. Ее вид определяется характером накачки, которая создает исходное состояние атомов, $f(t=0;1\ldots N)$.

4. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА И ДИФФУЗИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

В полярных координатах $I = |\alpha|^2$, $\varphi = \arg\alpha$ кинетическое уравнение для поля в приближении Фоккера–Планка принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \left(\sum_{u,v=I,\varphi}\frac{\partial}{\partial u}A_u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_{uv}\right)P. \tag{19}$$

Здесь коэффициенты при первых производных зависят только от одночастичных средних

$$\begin{aligned} A_I &= -\frac{g\sqrt{I}}{T}\int_0^T dt\exp(-i\varphi)\langle s_{01}(t;1)\rangle + \text{Н.с.},\\ A_\varphi &= \frac{g}{2\sqrt{I}T}\int_0^T dt\ i\exp(-i\varphi)\langle s_{01}(t;1)\rangle + \text{Н.с.}, \end{aligned} \tag{20}$$

в отличие от диффузионных коэффициентов, которые выражаются через двухатомные дисперсии

$$Q_{uv} = \theta_{uv}\frac{g^2}{T}\int_0^T dt\int_0^t dt' q_{uv}(t,t'), \tag{21}$$

где $\theta_{uv} = \theta_{vu}$, $\theta_{I\varphi} = 1$, $\theta_{\varphi\varphi} = 1/(4I)$, $\theta_{II} = I$,

$$\begin{aligned} q_{I\varphi} &= q_{\varphi I} = -i\exp(-2i\varphi)D_{11}(t,t') + \text{c.c.},\\ q_{\varphi\varphi} &= D_{21}(t,t') - \exp(-2i\varphi)D_{11}(t,t') + \text{c.c.},\\ q_{II} &= D_{21}(t,t') + \exp(-2i\varphi)D_{11}(t,t') + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{22}$$

Чтобы найти явный вид коэффициентов в уравнении Фоккера–Планка, требуется задать начальное состояние атомов $f(t=0;1\ldots N)$, которое приготовлено накачкой. Используя закон эволюции (18), можно получить общие выражения для диффузионных коэффициентов. Так,

$$\begin{aligned} q_{II} = \sum_{Q=0\ldots3}\{&2R_{20}(t)R_{1Q}(t')(D_{0Q} - D_{3Q}) +\\ &+ [2R_{11}(t) - 1]\,R_{1Q}(t')\times\\ &\times[D_{2Q} + \exp(-2i\varphi)D_{1Q}]\} + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{23}$$

Выражение для $q_{\varphi\varphi}$ получается из q_{II} заменой знака $\exp(-2i\varphi) \to -\exp(-2i\varphi)$,

$$\begin{aligned} q_{I\varphi} = -i\sum_{Q=0\ldots3}&(2R_{11}(t) - 1)R_{1Q}(t')\times\\ &\times\exp(-2i\varphi)D_{1Q} + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{24}$$

Если излучающие атомы помещены в резонатор, то в уравнение Фоккера–Планка (19) следует включить релаксационное слагаемое, которое описывает выход излучения наружу. Для простых моделей учет затухания электромагнитного поля можно провести, добавив в (4) оператор релаксации в форме Линдблада:

$$\mathcal{L}(F) = -C\frac{b^\dagger bF - bFb^\dagger + \text{Н.с.}}{2},$$

где константа $C/2$ определяется коэффициентами пропускания зеркал резонатора и равна скорости затухания амплитуды поля. Учет затухания поля приводит к замене $A_I \to A_I + CI$, в результате могут возникать стационарные режимы генерации, для которых диффузионные коэффициенты непосредственно определяют шумы света.

Одной из главных характеристик статистики излучения является параметр Манделя ξ, который определяет отклонение дисперсии числа фотонов от пуассоновской:

$$\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle(1+\xi),$$

где $n = b^\dagger b$ — оператор числа фотонов. В принятом представлении $\xi = \langle\epsilon^2\rangle/\langle I\rangle$, где $\epsilon = I - \langle I\rangle$ описывает отклонение интенсивности от своего среднего значения

$$\langle I\rangle = \int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha|^2.$$

Если флуктуации интенсивности малы и не зависят от фазовых флуктуаций, то непосредственно из (19) следует, что диффузионный коэффициент Q_{II} определяет параметр Манделя

$$\xi = Q_{II}(\langle I\rangle\Gamma)^{-1}, \tag{25}$$

где величина

$$\Gamma = C + \left(\frac{\partial A_I}{\partial I}\right)_{I=\langle I\rangle}$$

имеет смысл скорости затухания флуктуаций интенсивности. Если состояние поля является классическим, то его параметр Манделя неотрицателен. Для неклассических состояний $\xi < 0$, поэтому основным критерием наличия субпуассоновской статистики служит неравенство $Q_{II} < 0$.

5. ГЕНЕРАЦИЯ НА АТОМАХ С КЛАССИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ

Пусть накачка создает коррелированные атомы в состояниях типа (1) или (2) при $N \geq 3$. Тогда

$$f(t=0,1) = \lambda_0|0\rangle\langle 0| + \lambda_1|1\rangle\langle 1|, \tag{26}$$

$$f(t=0,12)=\lambda_0|00\rangle\langle 00|+\lambda_1|11\rangle\langle 11|, \qquad (27)$$

где $\lambda_0 = |\alpha|^2$ и $\lambda_1 = |\beta|^2$ — заселенности нижнего и верхнего уровней. В этом случае диффузионные коэффициенты в (19) принимают вид

$$Q_{II}=\frac{N}{T}[-\frac{1}{2}\sin^4 b+(2\lambda_1-1)b\sin b\cos b+ \\ +(1-\lambda_1)\sin^2 b+2\lambda_1(1-\lambda_1)\sin^4 b]+\mathcal{W}, \qquad (28)$$

$$Q_{\varphi\varphi}=\frac{N}{8I^2T}[b^2+2\lambda_1\sin^2 b-\sin^2 b],$$

$$Q_{I\varphi}=0,$$

где $b = g\sqrt{I}T$, а вклад двухатомной корреляции, которая создается накачкой, для обоих состояний представлен слагаемым

$$\mathcal{W}=\frac{N}{T}2(N-1)\lambda_1(1-\lambda_1)\sin^4 b.$$

Если все атомы независимы или присутствует только один атом, то $\mathcal{W} = 0$. Заметим, что в рассматриваемом примере атомная корреляция, которую создает накачка, влияет только на шумы интенсивности, а фаза испытывает обычную диффузию и оказывается нечувствительной к этим особенностям исходного состояния атомов.

Рассмотрим вопрос о возникновении неклассических состояний поля генерации. Найденное управляющее уравнение (19), где диффузионные коэффициенты определены согласно (28), описывает стационарный режим мазерной генерации, для анализа которого можно воспользоваться приближением малых флуктуаций. Тогда, полагая $\epsilon = I - \langle I\rangle \ll \langle I\rangle$, где средняя интенсивность определяется из полуклассического уравнения генерации

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle I\rangle=-C\langle I\rangle+\frac{N}{T}(\lambda_1-\lambda_0)\sin^2 B, \qquad (29)$$

для параметра Манделя имеем выражение

$$\xi=\frac{Q_{II}}{(2\lambda_1-1)\sin^2 B(1-B\operatorname{ctg}B)}\,\frac{T}{N}, \qquad (30)$$

где $B = g\sqrt{\langle I\rangle}T$. Используя (30), найдем спектр фототока или шумы света, которые регистрируются фотоприемником в обычной схеме гомодинного детектирования

$$i^{(2)}=1+2\xi\frac{1}{1-B\operatorname{ctg}B}. \qquad (31)$$

Здесь уровень дробового шума принят равным единице и выбран низкочастотный участок спектра вблизи нулевой частоты. Чтобы режим генерации был устойчивым, требуется выполнение условий $\lambda_1 > \lambda_0$ и $1 - B\operatorname{ctg}B > 0$.

Положительный вклад двухатомных корреляций $\mathcal{W}$, созданных накачкой, приводит к тому, что параметр Манделя всегда неотрицателен, поэтому неклассических состояний не возникает.

Пусть $\mathcal{W} = 0$, это означает, например, что накачка создает N независимых атомов в чистом состоянии, находящихся на верхнем уровне $f(t = 0, 1\ldots N) = (|1\rangle\langle 1|)^{\otimes N}$. Тогда за счет отрицательного слагаемого $-\sin^4 b/2$ в выражении для диффузионного коэффициента Q_{II} величина $\xi \to -1/2$ и дробовый шум может быть подавлен почти полностью. Для режима мазерной генерации этот результат получен в предположении регулярной накачки, которая введена феноменологически [3]. Из приведенного рассмотрения следует, что неклассические состояния поля с подавленными шумами возникают, если накачка создает независимые атомы в чистом состоянии на верхнем уровне, т. е. когда $\lambda_1 = 1$, или в зоне взаимодействия есть только один возбужденный атом $N = 1$ и $\lambda_1 = 1$. Если исходное состояние атомов имеет классическую корреляцию типа (27), то она приводит к увеличению шумов поля генерации, разрушая неклассическое состояние света.

6. ГЕНЕРАЦИЯ НА ПЕРЕПУТАННЫХ АТОМАХ

Напомним, что микромазерная генерация может осуществляться даже при малом количестве атомов в активной зоне [2]. Небезынтересным, на наш взгляд, было бы изучение характеристик излучения от двух перепутанных атомов с квантовой корреляцией типа EPR-пары, состояние которой описывается функцией $|\mathrm{ENT}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$, получаемой из (2) при $N = 2$. Неклассический характер пары наиболее полно будет проявляться, если частицы максимально перепутаны, $|\alpha| = |\beta| = 1/\sqrt{2}$. Последнее равенство означает одинаковую населенность верхнего и нижнего уровней отдельного атома, находящегося в смешанном состоянии с матрицей плотности вида (26), где $\lambda_0 = \lambda_1 = 1/2$. Такой атом не обладает поляризацией или когерентностью, и поэтому стационарный режим генерации на максимально перепутанных EPR-атомах в рассматриваемых приближениях не возникает.

Рассмотрим теперь перепутанное атомное состояние ζ, определенное согласно (3), для которого

$$\begin{aligned} f(t=0;1) &= |\alpha|^2|b\rangle\langle b| + \frac{|\beta|^2}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \\ &+ \frac{\alpha^*\beta}{\sqrt{2}}(b|0\rangle\langle 1| + (1-b)|1\rangle\langle 0|) + \\ &+ \frac{\alpha\beta^*}{\sqrt{2}}((1-b)|0\rangle\langle 1| + b|1\rangle\langle 0|), \\ f(t=0,12) &= |\zeta\rangle\langle\zeta|, \end{aligned} \tag{32}$$

где $b = 0, 1$. В этом состоянии у атома наряду с когерентностью,

$$\begin{aligned} \langle s_{01}(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(1-b)\alpha^*\beta + b\alpha\beta^*] = \\ &= \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{2}}[(1-b)\exp(i\Psi_0) + b\exp(-i\Psi_0)], \end{aligned}$$

где $\mathcal{U} = |\alpha\beta|$, существует инверсия заселенностей на рабочем переходе

$$\langle s_{11}(1) - s_{00}(1)\rangle = (-1)^{1-b}|\alpha|^2.$$

При $b = 1$ рабочий переход будет усиливающим. Особенность обсуждаемых состояний видна уже при вычислении одноатомных средних. Для двухуровневого атома значение заселенностей и поляризации не может быть произвольным. Так, максимальное значение когерентности, которая возникает при облучении атома классической монохроматической волной, составляет $|\langle s_{10}(1)\rangle| \le 1/2$. В рассматриваемом случае величина поляризации меньше в $\sqrt{2}$ раз, что является отличительной чертой перепутанного состояния.

Наличие атомной когерентности приводит к двум особенностям. Во-первых, может возникать стационарный режим генерации, если заселенность верхнего уровня меньше нижнего. Во-вторых, из-за захвата фазы вместо диффузии распределение фазы φ генерируемого поля становится стационарным. При этом из фазового распределения следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\sqrt{2}\frac{g}{\sqrt{I}}\mathcal{U}\sin(\varphi - \Psi_0), \tag{33}$$

которое имеет стационарное решение, приводящее к определенной фазе в стационарном режиме генерации:

$$\varphi_0 = \Psi_0. \tag{34}$$

Это равенство следует из условия устойчивости стационарной фазы. В приближении малых фазовых флуктуаций, $\mu = \varphi - \varphi_0$, $\mu \ll 1$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu = -\Gamma_\mu\mu, \tag{35}$$

где коэффициент

$$\Gamma_\mu = \sqrt{2}\frac{g}{\sqrt{I}}\mathcal{U}\cos(\varphi_0 - \Psi_0)$$

определяет скорость затухания фазовых флуктуаций и всегда должен быть положительным, $\Gamma_\mu > 0$.

Начальная атомная когерентность приводит к дополнительному слагаемому в уравнении для средней интенсивности излучения (сравн. с (29)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\langle I\rangle = -C\langle I\rangle + \frac{1}{T}2(-1)^{1-b}|\alpha|^2\sin^2 B + \\ + \frac{1}{T}2\sqrt{2}\mathcal{U}\sin B\cos B. \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь первое слагаемое отвечает затуханию моды за счет выхода из резонатора, второе описывает излучение или поглощение фотона за счет инверсии на рабочем переходе, а влияние атомной когерентности представлено последним слагаемым. Отметим, что при записи (36) мы уже воспользовались стационарным условием (34) для фазы. Коэффициент усиления, определяемый суммой двух последних слагаемых (36), отличается от рассчитанного для случая одноатомной модели [9]. Во-первых, в рассматриваемом случае параметр α не может принимать значение равное нулю и, значит, невозможна генерация света, основанная непосредственно на атомной когерентности. Во-вторых, слагаемое, описывающее влияние когерентности, отличается от величины, полученной в других известных случаях в $\sqrt{2}$ раз, что обусловлено особенностью состояния (3). При $b = 0$ второе слагаемое уравнения (36) становится отрицательным, что вовсе не означает невозможности существования генерации. Как и в обычной ситуации для микромазера, при генерации на любом из рассматриваемых типов переходов возникает целая серия почти периодических стационарных состояний. Их устойчивость может быть проанализирована на основе уравнения для флуктуаций интенсивности

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon = -\Gamma_\epsilon\epsilon, \tag{37}$$

где с учетом стационарного условия, $\partial\langle I\rangle/\partial t = 0$, скорость затухания флуктуаций интенсивности

$$\begin{aligned} \Gamma_\epsilon = C\Bigg\{1 - B(-1)^{1-b} \times \\ \times \frac{2|\alpha|^2\operatorname{ctg} B + (-1)^{1-b}\sqrt{2}\mathcal{U}(\operatorname{ctg}^2 B - 1)}{2(-1)^{1-b}|\alpha|^2 + \sqrt{2}\mathcal{U}\operatorname{ctg} B}\Bigg\} \end{aligned} \tag{38}$$

подчиняется условию $\Gamma_\epsilon > 0$.

Диффузионные коэффициенты уравнения Фоккера–Планка (19), определяющие статистические характеристики генерируемого излучения с учетом стационарных решений, принимают вид

$$\begin{aligned} Q_{II} &= \frac{1}{T}\left\{2|\beta|^2\sin^2 B\cos^2 B + |\alpha|^2 \times\right. \\ &\times \left[\sin^2 B(\sin^2 B+2(1-b)) +\right. \\ &+ \left.(-1)^{1-b}B\sin(2B)\right] + \\ &+ \sqrt{2}\mathcal{U}[\cos(2B)(B-(-1)^{1-b}\sin B\cos B) - \\ &- \left.(1-b)\sin 2B] - \mathcal{Q}\right\}, \\ Q_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{4I^2T}\left\{2|\beta|^2B^2 + |\alpha|^2 \times\right. \\ &\times [B^2 + (-1)^{1-b}\sin^2 B] + \\ &\left.+\sqrt{2}\mathcal{U}(\sin B\cos B - B)\right\}, \\ Q_{I\varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь

$$\mathcal{Q} = 2\left\{(\sqrt{2}\mathcal{U})^2\sin^2 B\cos^2 B - \sqrt{2}\mathcal{U}|\alpha|^2 \times\right. \\ \left.\times\ \sin B\cos B[1-\cos(2B)] + |\alpha|^4\sin^4 B\right\}.$$

Независимость флуктуаций интенсивности и фазы является следствием стационарного условия (34). Расчет показывает, что для обоих рассматриваемых начальных состояний атомов, для всех разрешенных стационарных состояний светового поля диффузионный коэффициент $Q_{\varphi\varphi}$ всегда принимает только положительные значения. Это означает, что генерация фазово-сжатого света не происходит, что является прямым следствием линейного захвата фазы атомной когерентности и поля.

Используя определение (25), где $\Gamma \to \Gamma_\epsilon$, проанализируем статистику излучения. Непосредственный интерес для наблюдения представляет не параметр Манделя ξ, а связанное с ним значение в низкочастотной области спектра шума фототока от регистрируемого, выходящего из резонатора излучения:

$$i^{(2)} = 1 + 2\xi\frac{C}{\Gamma_\epsilon}. \tag{40}$$

Здесь единица по-прежнему отвечает дробовому шуму фоторегистрации, квантовая эффективность фотоприемника положена равной единице. Отрицательное значение параметра Манделя приводит к подавлению дробового шума, что свидетельствует о возникновении неклассического состояния света с субпуассоновской статистикой фотонов. Численный анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы. В случае начального состояния атомов с отрицательной инверсией на переходе, $b = 0$, наибольший интерес представляют стационарные условия с максимальным значением контура усиления, которые наблюдаются при значении атомной когерентности $\mathcal{U} \approx 0.49$. При этом реализуется целая серия почти периодических режимов генерации, для которых значение $i^{(2)} = 0.27$, что отвечает субпуассоновскому свету с подавлением шумов на 63 %. Это значение является оптимальным для такого начального атомного состояния. Напомним, что в одноатомной модели [9] оптимальное предельное значение подавления шумов соответствует $i^{(2)} = 0.5$. Возникающее улучшение связано именно с рассматриваемым состоянием и проявлением его характеристик как в стационарных полуклассических уравнениях (33), (36), так и в диффузионных коэффициентах. Для усиливающего перехода, $b = 1$, выражение (39) при $\beta = 0$ переходит в (28) для $N = 2$ независимых атомов. Напомним, что для независимых атомов могут быть созданы условия, при которых шум подавляется почти полностью. В рассматриваемом случае тоже возникает почти полное подавление шума при различных почти периодических стационарных режимах. Для этого начальное состояние должно быть приготовлено так, чтобы в основном был заселен только верхний рабочий уровень обоих атомов, $|\alpha|^2 \gg |\beta|^2$. Наличие даже слабой когерентности на переходе приводит к строго определенной стационарной фазе поля генерации, а за счет отрицательного двухатомного вклада возникает субпуассоновская статистика фотонов и почти предельное подавление уровня дробового шума, $i^{(2)} \to 0$.

7. ВЫВОДЫ

Получено кинетическое уравнение для одномодового электромагнитного поля, с которым взаимодействуют N двухуровневых атомов, помещенных в высокодобротный резонатор. Хотя атомы считаются невзаимодействующими, их исходное состояние, приготовленное накачкой, в общем случае может быть коррелированным. Это приводит к необходимости рассматривать многоатомную задачу. Кинетическое уравнение записано для глауберовской P-функции в приближении Фоккера–Планка, где коэффициенты определяются только одноатомными и двухатомными корреляционными функциями. Это означает, что в используемом приближении все многоатомные состояния с одинаковыми одночастичными и двухчастичными матрицами плотности приводят к одинаковой статистике излучения. Мы рассмотрели микромазерный режим генерации, когда релаксацию на рабочих уровнях можно не учитывать. Наличие классической двухатомной корреляции приводит к увеличению шумов генерируемого света по сравнению со случаем независимых атомов, излучение которых обладает субпуассоновской статистикой фотонов. Особый случай перепутанного двухатомного состояния вида (3) может приводить к генерации поля с определенной стационарной фазой и предельным подавлением шумов гомодинной регистрации.

Работа выполнена при частичной поддержке Delzell Foundation, РФФИ (проект 01-02-17059) и программы INTAS (грант 00-479).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. A **34**, 4547 (1986); J. Krause, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **34**, 2032 (1986); L. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **36**, 740 (1987).

2. Г. Вальтер, УФН **166**, 777 (1996).

3. Ю. М. Голубев, И. В. Соколов, ЖЭТФ **87**, 408 (1984); F. Haake, S. M. Tan, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **34**, 4025 (1986); Ю. М. Голубев, ЖЭТФ **106**, 1031 (1994).

4. M. O. Scully and W. E. Lamb, Phys. Rev. **159**, 208 (1967).

5. Г. П. Мирошниченко, И. П. Вадейко, А. В. Рубин, Й. Тимоннен, Письма в ЖЭТФ **72**, 647 (2000).

6. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, Quant. Opt. **5**, 193 (1993).

7. B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, Nature **413**, 400 (2001); E-print archives, LANL, quant-ph/0106057.

8. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002).

9. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **115**, 1605 (1999); Опт. и спектр. **89**, 460 (2000).