ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 2 (8), стр. 241–244

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИНВЕРТИРОВАННЫХ СРЕДАХ

В. А. Антонов [a], *Б. П. Кондратьев* [b*]

[a] *Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук 196140, Санкт-Петербург, Россия*

[b] *Удмуртский государственный университет 426034, Ижевск, Россия*

Поступила в редакцию 21 февраля 2002 г.

Выполнен строгий анализ дисперсионного уравнения в задаче об устойчивости электромагнитного поля в однородной бесконечной инвертированной среде. Уточнена зона неустойчивости со стороны малых волновых чисел k. Установлено, что, вопреки прежнему мнению, между поляритонными и электромагнитными волнами может быть и непрерывный переход при постепенном изменении k, когда оба типа волн разделить нельзя.

PACS: 41.20.Jb

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется неустойчивости волн в инвертированных средах. Конкретно мы имеем в виду ситуацию, обрисованную в работах В. В. Железнякова, В. В. Кочаровского и Вл. В. Кочаровского [1, 2]. Несмотря на тщательное рассмотрение уравнений электромагнитного поля в однородной бесконечной среде с инверсией, в изложении [1, 2] остались некоторые недостаточно ясные места, которые мы и хотим исследовать более тщательно.

Напомним, что в полуклассическом приближении высокочастотное электромагнитное поле в веществе описывается уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{p})}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)\mathbf{p} = \frac{\omega_c^2}{4\pi}\mathbf{E}. \quad (2)$$

Здесь приняты обозначения работ [1, 2]: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрического и магнитного полей, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации вещества, ω_0 — частота перехода между двумя уровнями, $1/T_2$ — уширение соответствующей спектральной линии, ω_c — плазменная (кооперативная) частота вещества в заданном состоянии.

Нас прежде всего интересует случай инвертированного состояния, когда $\omega_c^2 < 0$. Из (1), (2) независимо от направления вектора поляризации получаем дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} - \frac{\omega_c^2}{(\omega + i/T_2)^2 - \omega_0^2} - \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 0, \quad (3)$$

где ω — частота электромагнитного поля, k — волновое число. Уравнение (3) получено в работе [1], однако анализ его в [1, 2] имеет некоторые недостатки.

Во-первых, условие существования зоны неустойчивости на шкале волновых чисел

$$\omega_c^2 < -\frac{8\pi\sigma}{T_2} \quad (4)$$

выведено в [1] не совсем строгим методом и с определенным приближением. На самом деле оно допускает вполне точный вывод на основании (3). Во-вторых, в работах [1, 2] говорится об ограниченности зоны неустойчивости как со стороны больших, так и со стороны малых k, но второе из этих утверждений в нерезонансном случае может оказаться неверным. В-третьих, в [1, 2] говорится о двух типах волн — поляритонных и собственно электромагнит-

*E-mail: kond@uni.udm.ru

ных — как о двух раздельных сущностях на основании их физических различий. На самом деле между ними иногда может быть непрерывный переход при постепенном изменении k, так что отнесение волны к тому или иному типу оказывается неоднозначным. В данной статье мы устраняем эти пробелы.

2. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗОНЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

При $k \to \infty$ и неизменности остальных параметров различие обоих типов волн выступает максимально четко. Легко получить соответствующую асимптотику для всех четырех корней уравнения (3):

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm kc - 2\pi i\sigma + O\left(\frac{1}{k}\right), \\ \omega_{3,4} &= \pm\omega_0 - \frac{i}{T_2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Решения (5), очевидно, удовлетворяют признаку устойчивости $\operatorname{Im}\omega < 0$. Будем теперь постепенно уменьшать k. Момент перехода от устойчивости к неустойчивости или обратно характеризуется чисто вещественной величиной ω. Тогда разделение вещественной и мнимой частей в (3) дает два уравнения

$$1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_c^2(\omega^2 - 1/T_2^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - 1/T_2^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2/T_2^2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} + \frac{2\omega\omega_c^2/T_2}{(\omega^2 - 1/T_2^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2/T_2^2} = 0. \tag{7}$$

Удобно вначале исключить громоздкий знаменатель дробей в (6) и (7). Это дает значение самих корней:

$$\omega^2 = \frac{2\pi\sigma T_2(\omega_0^2 + 1/T_2^2) + k^2c^2}{1 + 2\pi\sigma T_2}, \tag{8}$$

причем вид уравнения (3) заранее исключает возможность $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Подстановка (8) в любое из уравнений (6) или (7) позволяет получить искомую связь между параметрами в критической точке в виде квадратного уравнения для вспомогательной величины $K = k^2c^2$:

$$\begin{aligned} K^2 + \left[-2\left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2}\right) + (1 + 2\pi\sigma T_2)\,\times\right. \\ \left.\times\left(\frac{\omega_c^2}{2\pi\sigma T_2} + \frac{4}{T_2^2}\right)\right] K\, + \\ + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)^2 + 2\pi\sigma T_2(1 + 2\pi\sigma T_2)\,\times \\ \times\left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)\left(\frac{\omega_c^2}{2\pi\sigma T_2} + \frac{4}{T_2^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В определенных случаях зоны неустойчивости вообще нет: это будет при отрицательном значении дискриминанта Δ уравнения (9) или при наличии двух вещественных, но отрицательных корней для K. Точнее, $\Delta < 0$ при

$$-\frac{4}{T_2^2} < \frac{\omega_c^2}{2\pi\sigma T_2} < 4\omega_0^2, \tag{10}$$

а для отрицательности обоих корней K необходим положительный знак коэффициента при первой степени K в (9), т. е.

$$\frac{\omega_c^2}{2\pi\sigma T_2} > -\frac{4}{T_2^2} + \frac{2(\omega_0^2 + 1/T_2^2)}{1 + 2\pi\sigma T_2}. \tag{11}$$

За вычетом (10) и (11) у нас остается область значений для ω_c^2, а именно, даваемая неравенством (4), в которой наблюдается переход от неустойчивости к устойчивости при каком-то вещественном K. Таким образом, критерий (4) подтверждается строгим расчетом.

3. ВОПРОС ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЗОНЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СО СТОРОНЫ МАЛЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

При условии (4) свободный член в (9) положителен, если

$$\frac{\omega_c^2}{2\pi\sigma T_2} + \frac{4}{T_2^2} > -\frac{\omega_0^2 + 1/T_2^2}{2\pi\sigma T_2(1 + 2\pi\sigma T_2)}. \tag{12}$$

При выполнении условия (12) у зоны неустойчивости есть конечная левая граница на шкале K, в противном же случае зона неустойчивости простирается до сколь угодно малых K, поскольку один из корней для k^2c^2 становится отрицательным.

Эти соотношения удобно проиллюстрировать на примере частного резонансного случая, подробно рассмотренного в [1, 2]. В этом случае вводится малая добавка

$$h = kc - \omega_0,$$

малыми считаются также величины σ, $|\omega_c|$ и T_2^{-1}. Тогда корни ω из одной из пар также близки к kc и мы можем положить

$$\omega = kc + \delta.$$

Связь малой добавки δ с перенормированным волновым числом h дается (после соответствующего пренебрежения величинами высшего порядка малости) упрощенным уравнением

$$2\delta + 4\pi i\sigma - \frac{\omega_c^2}{2(\delta + i/T_2 + h)} = 0, \tag{13}$$

которое в несколько иной форме содержится в [1, 2]. По существу — это квадратное уравнение (два же других корня (3) для ω симметричны получающимся и близки к $-kc$). Вопрос о критической точке перехода устойчивость–неустойчивость решается прежним образом: считая δ чисто вещественным, разделяем в (13) вещественную и мнимую части. При все том же условии (4) оба критических значения для h всегда вещественны:

$$h_{cr} = \pm(1 + 2\pi\sigma T_2)\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma T_2}\left|\omega_c^2 + \frac{8\pi\sigma}{T_2}\right|}. \qquad (14)$$

Несложный анализ выражения (14) как функции σ при неизменных остальных параметрах на максимум и минимум показывает, что эти максимум и минимум достигаются на уровнях

$$\sigma = \frac{2 + \mu \pm \sqrt{(2+\mu)(\mu - 14)}}{16\pi T_2}, \qquad (15)$$

где

$$\mu = -\omega_c^2 T_2^2.$$

На основании этого можно сделать уточнение к рис. 3 работы [1]: представленный там график зависимости между σ и h имеет форму перевернутой висячей капли только при $\mu > 14$, в противном же случае получается просто «шапочка» (в [1] явно используется только ограничение $\mu > 4$).

4. МАКСИМАЛЬНЫЙ ИНКРЕМЕНТ

Если выделить вещественную и мнимую части в малой добавке δ,

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2,$$

то δ_2 будет характеризовать инкремент (если брать решения с $\delta_2 > 0$). Максимум δ_2 по h находится из следующих соображений. Рассмотрим наряду с (13) комплексно-сопряженное соотношение

$$2\delta^* - 4\pi i\sigma - \frac{\omega_c^2}{2(\delta^* - i/T_2 + h)} = 0, \quad \delta^* = \delta_1 - i\delta_2. \qquad (16)$$

Обозначим левые части (13) и (16) через $Q(\delta_1, \delta_2, h)$ и $Q^*(\delta_1, \delta_2, h)$ и варьируем h и δ_1, δ_2. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta_1}d\delta_1 + \frac{\partial Q}{\partial \delta_2}d\sigma_2 + \frac{\partial Q}{\partial h}dh = \\ = \frac{\partial Q^*}{\partial \delta_1}d\delta_1 + \frac{\partial Q^*}{\partial \delta_2}d\delta_2 + \frac{\partial Q^*}{\partial h}dh = 0. \qquad (17)$$

При h, отвечающем максимуму инкремента, должно быть $d\delta_2 = 0$, так что условие разрешимости системы (17) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial \delta_1} & \dfrac{\partial Q}{\partial h} \\ \dfrac{\partial Q^*}{\partial \delta_1} & \dfrac{\partial Q^*}{\partial h} \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta_1} = \frac{\partial Q}{\partial \delta}, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial \delta_1} = \frac{\partial Q^*}{\partial \delta^*},$$

тогда, раскрыв (18), после элементарных сокращений получаем $h = 0$. При этом корни уравнения (13) — чисто мнимые, $\delta = iy$ и для растущей волны имеем

$$y = \frac{-(2\pi\delta + 1/T_2) + \sqrt{(2\pi\sigma - 1/T_2)^2 - \omega_c^2}}{2}. \qquad (19)$$

Итак, единственный максимум $\operatorname{Im}\delta$ по h достигается в середине интервала неустойчивости. Относительно же σ (19) является монотонной функцией. Она убывает от максимального значения

$$y_m = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{T_2} + \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \omega_c^2}\right) \qquad (20)$$

при $\sigma = 0$ до нуля при известном нам критическом значении $\omega_c^2 = -8\pi\sigma/T_2$.

5. РАЗДЕЛЕНИЕ ДВУХ ТИПОВ ВОЛН

Ограничимся опять областью вблизи резонанса. Решением уравнения (13) является

$$\sigma = -\pi i\sigma - \frac{i}{2T_2} - \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{R}}{2}, \qquad (21)$$

где

$$R = h^2 + \frac{2ih}{T_2}(1 - 2\pi\sigma T_2) + \omega_c^2 - \left(2\pi\sigma - \frac{1}{T_2}\right)^2. \qquad (22)$$

Характерно, что кроме особого случая $2\pi\sigma T_2 = 1$, упоминаемого в [1, 2], $\operatorname{Im} R$, вообще говоря, отлична от нуля и только при $h = 0$ переходит через нуль. Это значит, что $\sqrt{R}$ как комплексная величина остается при изменении h в пределах одного квадранта как при $h > 0$ (иначе R оказалась бы вещественной), так и при $h < 0$ (но квадрант уже будет другим). В самой же точке $h = 0$ имеем $R^2 < 0$ и, следовательно, $\sqrt{R}$ в этот момент переходит через мнимую ось.

Рассмотрим теперь большие значения $h > 0$, полагая пока $2\pi\sigma T_2 > 1$. Тогда асимптотически из (22) находим (см. [3])

$$\sqrt{R} = \pm \left[h + \frac{i}{T_2}(1 - 2\pi\sigma T_2) + O\left(\frac{1}{h}\right)\right]. \qquad (23)$$

Для «верхнего» (в смысле большей величины $\operatorname{Re}\delta$) решения выбирается знак «+». Таким образом, $\operatorname{Im}\sqrt{R} < 0$ и $\sqrt{R}$ находятся в четвертом квадранте. В точке $h = 0$ происходит переход в третий квадрант, а при $h < 0$ и большом $|h|$ по той же формуле (23) положение $\sqrt{R}$ в третьем квадранте означает, что мы также выбрали знак «+». Итак, слева и справа шкалы h выбор знака для $\sqrt{R}$ согласован. То же самое верно и при $2\pi\sigma T_2 < 1$ с той только разницей, что $\sqrt{R}$ в промежуточной области переходят через верхние (первый и второй) квадранты.

Далее, величина X из формулы (2.5) работы [1] в резонансном случае в наших обозначениях выглядит как

$$X = -\frac{\omega_c^2}{8\pi kc(\delta + i/T_2 + h)} = -\frac{\delta + 2\pi i\sigma}{2kc},. \qquad (24)$$

Она стремится к конечной величине, если в (23) брать верхний знак, и к бесконечности, если брать нижний. Последний случай, согласно терминам работ [1, 2], дает поляритонную волну, а первый — соответственно, электромагнитную. Однако, принимая во внимание сказанное выше, можно убедиться, что решение с бо́льшим $\operatorname{Im}\delta$ в промежуточной области соответствует поляритонной волне при $2\pi\delta T_2 > 1$ и электромагнитной — при $2\pi\sigma T_2 < 1$. В [1] этот вывод содержится, но он делается на основании энергетических соображений, у нас же выкладки являются чисто алгебраическими. Изменяется при нашем подходе и физическая трактовка. В промежуточной области ($|h| < h_{cr}$ из (14)) неустойчивые решения образуют сплошное множество, трактовка же волны как электромагнитной или поляритонной должна рассматриваться здесь как субъективная. Объективный характер это различие принимает только при $h \to \infty$, когда мы уже выходим далеко из зоны неустойчивости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряд результатов, которые были получены в [1, 2] на полуинтуитивном уровне, подтверждается строгим расчетом. Это касается, прежде всего, критерия появления зоны неустойчивости (4) на шкале k. Качественное разделение случаев $2\pi\sigma T_2 > 1$ и $2\pi\sigma T_2 < 1$ также подтверждается, но не прямо для соответствующих волн, а только для их непрерывного продолжения в нерезонансную область. В области же неустойчивости не обязателен тот перешеек, приведенный графически в [1], который разделяет оба типа волн.

На самом деле между поляритонными и электромагнитными волнами иногда может быть непрерывный переход при постепенном изменении k, так что отнесение волны к тому или иному типу оказывается неоднозначным. Неустойчивость может сказываться и вдали от резонанса, ее зона может то иметь, то не иметь границы при малых k.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, ЖЭТФ **87**, 1565 (1985).
2. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, УФН **159**, 193 (1989).
3. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1987), гл. I.4.