ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 6, стр. 1390–1398

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОРРЕЛЯЦИИ В ТЕРМАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ БЮРГЕРСА

И. В. Колоколов*, К. С. Турицын

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет
630000, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 4 октября 2001 г.

Для поля $u(x,t)$, эволюционирующего согласно уравнению Бюргерса с тепловым шумом, найдены коротковременные асимптотики разноточечных корреляторов. Их экспоненциальные части не зависят от номера коррелятора. Это означает, что они определяются одной редкой флуктуацией, и демонстрирует наличие эффекта перемежаемости в системе.

PACS: 47.27.Gs, 47.27.Sd

1. ВВЕДЕНИЕ

Значения различных наблюдаемых в полевой системе, находящейся в хаотизованном каким-либо образом состоянии, испытывают флуктуации в пространстве и во времени. Для их описания обычно используются корреляционные функции различных порядков, причем разновременные корреляторы содержат более детальную информацию о системе по сравнению с одновременными. Основной вклад в измеряемые средние могут давать события типа суперпозиции слабокоррелированных сигналов, пришедших из разных точек пространства. Такого рода статистические свойства демонстрируют свободные поля. Для них статистика флуктуаций в термодинамическом равновесии оказывается гауссовой, т. е. как одновременные, так и разновременные корреляционные функции распадаются на сумму произведений парных корреляторов. Однако возможна ситуация, когда интересующий нас набор средних определяется редкой, но большой в естественных единицах и когерентной в пространстве флуктуацией. В этом случае говорят о перемежаемости в системе. Формально она проявляется в том, что неприводимые корреляционные функции, отличные от нуля в любой нелинейной системе, становятся много больше приводимых частей полных корреляторов. Классическим примером является гидродинамическая турбулентность [1, 2]. Параметром, характеризующим величину полных корреляторов по сравнению с их приводимыми частями, является здесь число Рейнольдса $\mathrm{Re} = l/r_d$, где l — масштаб либо начальных возмущений, либо внешних источников энергии, r_d — масштаб, на котором энергия диссипирует.

Поля другого типа, демонстрирующие перемежаемость, — это волновые функции Ψ электронов в случайном потенциале в одном и двух измерениях. Действительно, эффекты локализации приводят к тому, что все моменты плотности $|\Psi|^2$ обратно пропорциональны первой степени объема V и, следовательно,

$$\langle|\Psi|^{2n}\rangle \gg \langle|\Psi|^2\rangle^n \quad \text{при} \quad V\to\infty$$

(см. [3, 4]). Здесь мы имеем дело со случаем, когда бесконечный набор корреляционных функций определяется одним редким событием.

Сама по себе большая величина флуктуаций не обязательно приводит к перемежаемости. Так, даже в точке фазового перехода второго рода неприводимые и полные корреляторы имеют одинаковую масштабную размерность и, следовательно, представляют собой величины одного порядка [5]. Поэтому эффекты перемежаемости в тепловом равновесии не обсуждались в литературе вплоть до работ [6, 7]. В этих работах изучалась статистика поля завих-

*E-mail: kolokolov@inp.nsk.su

ренности в двумерных пленках и было обнаружено, что разновременные корреляторы разных порядков определяются одной эволюционирующей во времени флуктуацией. Таким образом, они пропорциональны малой вероятности этой флуктуации. Однако приводимые части корреляторов высших порядков содержат величину этой вероятности в степенях выше первой, в связи с чем значения таких приводимых частей много меньше значений полных корреляционных функций.

В работе [8] было показано, что такими же свойствами обладают разновременные корреляционные функции в системах, эволюция которых подчиняется одномерному уравнению Бюргерса с тепловым шумом

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = \xi. \quad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ — функция пространственной координаты x и времени t, параметр ν играет роль вязкости, $\xi(x,t)$ — случайная короткокоррелированная по времени и пространству сила с нулевым средним, удовлетворяющая гауссовой статистике.

Уравнение (1) описывает систему одномерных слабых ударных волн; в этом случае поле $u(x,t)$ пропорционально скорости среды в системе отсчета, движущейся со скоростью звука [1, 9]. Оно также возникает в задаче о флуктуациях поверхностей раздела типа раствор–осадок, растущих за счет случайного притока атомов из раствора. При этом $u = \partial_x h$, где h — высота поверхности, и уравнение эволюции поля $h(x,t)$, следующее из (1), называется $1+1$-мерным уравнением Кардара–Паризи–Жанга [10]. К задаче такого же типа приводит изучение статистики вихревых нитей в сверхпроводниках с примесями [11]. В дальнейшем мы будем оперировать гидродинамическими терминами и называть $u(x,t)$ полем скорости.

Парный коррелятор случайной силы $\xi(x,t)$ возьмем в следующем виде:

$$\langle \xi(x,t)\xi(x_1,t_1)\rangle = -\nu\beta^{-1}\delta''(x-x_1)\delta(t-t_1). \quad (2)$$

В этом случае существует стационарное распределения $\mathcal{P}[u]$ для поля u, имеющее вид распределения Гиббса:

$$\mathcal{P}[u] = \mathcal{N}\exp\left\{-\mathcal{F}[u]\right\}, \quad \mathcal{F}[u] = \beta\int dx\, u^2(x). \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{N}$ — нормировочная константа. Из (3) видно, что параметр β играет роль обратной температуры, так что статистика поля скорости в данный момент времени оказывается также гауссовой с двухточечным средним

$$\langle u(x,t)u(x',t)\rangle = (2\beta)^{-1}\delta(x-x'), \quad (4)$$

соответствующим нулевой корреляционной длине.

В данной работе мы вычисляем асимптотики следующих корреляционных функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X,t) &= \langle u(0,0)u(X,t)\rangle, \\ T(X,Y,t) &= \langle u(0,0)u(Y,0)u(X,t)\rangle, \\ S(X,Y,\Delta,t) &= \langle u(0,0)u(Y,0)u(X,t)u(X+\Delta,t)\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

при малом времени t и большом расстоянии X. Предполагается, что вязкость — малая величина, $\nu\to 0$, однако для существования теории необходимо, чтобы она была отлична от нуля (см. ниже). Естественно также думать, что влиянием шума ξ в течение малого интервала времени t можно пренебречь (позже мы вернемся к этому предположению). Тогда усреднение проводится по распределению (3) значений поля $u_0(x) = u(x,0)$. В работе [8] были найдены главные экспоненциальные части асимптотик корреляторов (5). При этом был использован тот факт, что при $\nu\to 0$ динамика, устанавливающая корреляции скорости в разнесенных точках пространства, представляет собой лагранжев перенос. Поэтому коррелятор $\mathcal{K}(X,t)$ определяется вероятностью такой начальной флуктуации $u_0(x)$, что лагранжева частица попадет из точки 0 в точку X за время t. В [8] показано, что оптимальным является линейный профиль

$$\begin{aligned} u_0^*(x) &= (X-x)/T, \quad 0<x<X, \\ u_0(x) &= 0, \quad x<0, \quad x>X. \end{aligned} \quad (6)$$

Экспоненциальная часть асимптотики $\mathcal{K}(X,t)$ есть просто

$$\mathcal{P}[u_0^*] = \exp\left(-\beta X^3/3t^2\right). \quad (7)$$

Заметив теперь, что эта же флуктуация «доставляет» за время t все частицы из внутренней части интервала $(0,X)$ в точку $x = X$, мы придем к заключению, что при $\Delta \ll X$, $0<Y<X$:

$$\mathcal{K}(X,t) \sim T(X,Y,t) \sim S(X,Y,\Delta,t) \sim \\ \sim \exp\left(-\frac{\beta X^3}{3t^2}\right). \quad (8)$$

Условие $\Delta \ll x$ обеспечивает малое отличие оптимального профиля от линейного (6). Исследуемая асимптотика соответствует неравенству

$$\beta X^3/t^2 \gg 1,$$

а соотношения (8) выражают не что иное, как перемежаемость.

В приведенных выше рассуждениях мы считали, что при $\nu \to 0$ корреляционные функции типа (5) стремятся к конечному пределу. Такое предположение было высказано в работе [12]. Там же было отмечено, что в этом пределе существует всего лишь одна безразмерная комбинация параметров $\beta X^3/t^2$, что обычно формулируется на языке закона дисперсии как

$$\omega_k \propto k^{3/2}.$$

Малость ν означает выполнение неравенства

$$x^2(\nu t)^{-1} \gg \beta X^3 t^{-2}.$$

Отсутствие расходимостей при $\nu \to 0$ проверяется следующим образом: если это не так, то основной вклад в вычисляемые средние дают коротковолновые флуктуации. Однако для них в уравнении движения (1) доминирует член, пропорциональный νu_{xx}, что позволило бы применить теорию возмущений к нелинейным членам. Анализ, подтвердивший существование предела $\nu \to 0$ в рамках диаграммной техники Уальда, был проделан в работе [13]. Заметим, что в данном случае сходимость при $\nu \to 0$ перенормированных диаграмм теории возмущений означает ее неприменимость. Следует, однако, подчеркнуть, что ν не может быть сразу приравнена к нулю. Действительно, в динамике конечных флуктуаций принципиальную роль играют ударные волны, которые могут быть корректно описаны только с учетом диссипативного члена в уравнениях движения (1). В работе же [8] существенно использовался подход, основанный на лагранжевых траекториях. Поэтому представляет интерес независимое подтверждение ее основного результата (8). Кроме того, подход, использованный в [8], не позволяет вычислить предэкспоненциальные множители в выражениях для корреляторов. В той же работе было указано, что интеграл по флуктуациям на фоне оптимального профиля (6) отнюдь не является гауссовым, и задача не сводится к применению стандартного метода перевала в функциональных интегралах.

В данной работе мы вычислим полные асимптотики корреляционных функций (5) при $\beta X^3/3t^2 \gg 1$, оставаясь в рамках приближения, при котором пренебрегается действием шума на интервале t. Заметим сразу, что полученные асимптотики согласуются с оценкой (8) и полностью соответствуют оптимальной флуктуации, если ей приписать в функциональном пространстве меру

$$\Omega = \left(\frac{\beta X^3}{t^2}\right)^{-1/3} \left(2\mathrm{Ai}'(-a_0)\right)^{-1} \times \\ \times \exp\left(-a_0\left(\frac{\beta X^3}{t^2}\right)^{1/3}\right). \quad (9)$$

Здесь $-a_0$ — первый нуль функции Эйри:

$$\mathrm{Ai}(-a_0) = 0.$$

Понятие меры определено так же, как и в инстантонном исчислении в квантовой теории поля [14]: среднее от произведения значений поля скорости вычисляется подстановкой в него оптимального профиля (6) с последующим умножением на гиббсов вес этого профиля (7) и меру Ω. Из выражения для Ω видно, что флуктуации относительно (6) малы: Ω убывает с ростом X^3/t^2. Однако зависимость Ω от перевального параметра $\left(\beta X^3/t^2\right)^{1/2}$ существенно неаналитична. Такое поведение меры означает невозможность использования для ее вычисления квадратичного по флуктуациям разложения эффективного действия.

Распадная турбулентность для уравнения Бюргерса с начальным распределением (3) подробно изучалась в работах [15, 16]. Однако в [15] рассматривалась только одновременная статистика, никакой перемежаемости для самого поля скорости не демонстрирующая. В статье же [16] изучался предел, противоположный нашему, а именно $t \to \infty$. Кроме того, в [16] не затрагивались разновременные и разноточечные в пространстве средние. Отметим, что в [15, 16] была корректно описана перемежаемость одновременных структурных функций поля скорости, обусловленная разрывными флуктуациями. Она характерна и для общей постановки задачи о бюргерсовской турбулентности [2, 17–19], предполагающей, что длина L корреляции внешнего шума или начального распределения скоростей существенно превосходит масштаб диссипации r_d. При этом расстояния r, на которых изучаются корреляции, предполагаются принадлежащими инерционному интервалу, т. е. $r_d \ll r \ll L$.

2. КОРРЕЛЯТОРЫ ПРИ МАЛОЙ РАЗНОСТИ ВРЕМЕН

Начнем с вычисления асимптотики функции $\mathcal{K}(X,t)$ при $\beta X^3/t^2 \gg 1$. Поскольку усреднение по начальному условию $u_0(x)$ происходит с гауссовым весом (3), коррелятор $\mathcal{K}$ можно записать в виде

$$\mathcal{K}(X,t) = \frac{1}{2\beta}\left\langle \frac{\delta u(X,t)}{\delta u_0(0)} \right\rangle. \tag{10}$$

При вычислении вариационной производной в (10) мы рассматриваем $u(X,t)$ как функционал от поля $u_0(x)$. Решение задачи Коши для (1) получается с помощью известной подстановки Кола–Хопфа, такой что

$$\begin{gathered} u(X,t) = -2\nu\partial_X \ln\left\{\int\limits_{-l}^{l_1} dz\, F(z,X)\right\}, \\ F(z,X) = \exp\left(-\frac{(z-X)^2}{4t\nu} - \frac{1}{2\nu}\int\limits_{-l}^{z} u_0(y)dy\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $-l$ и l_1 — координаты удаленных концов интервала, занятого средой. Формула (11) верна при $l, l_1 \to \infty$. В этом пределе l и l_1 не входят в окончательные выражения для корреляторов, хотя их удобно сохранять в промежуточных вычислениях. Независимость $\mathcal{K}(X,t)$ от l и l_1 позволяет сдвинуть концы интервала:

$$(-l, l_1) \to (-l+X, l_1+X).$$

Используя трансляционную инвариантность энергии $\mathcal{F}$, заменим $u_0(x)$ на $u_0(x-X)$. После этих преобразований, взятия вариационной производной и дифференцирования по X в (10) и (11) коррелятор приобретает простой вид:

$$\begin{gathered} \mathcal{K}(X,t) = \frac{1}{2\beta}\left\langle F(-X,0)\left\{\int\limits_{-l}^{l_1} dz\, F(z,0)\right\}^{-1}\right\rangle = \\ = \frac{1}{2\beta}\int\limits_0^{\infty} d\lambda \left\langle \exp\left(-\int\limits_{-l}^{l_1} dz\, \exp\left(-\frac{\Phi(z)}{2\nu}\right)\right)\right\rangle. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$\Phi(z) = -2\nu\ln\lambda + \frac{z^2 - X^2}{2t} + \int\limits_{-X}^{z} d\tau\, u_0(\tau). \tag{13}$$

Усреднение $\langle\ldots\rangle$ выполняется как функциональное интегрирование по $\mathcal{D}u_0$. Теперь, используя формулу (13), перейдем от переменной интегрирования $u_0(z)$ к $\Phi(z)$. По построению $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$\Phi(-X) = -2\nu\ln\lambda. \tag{14}$$

Выражая $\mathcal{F}$ через Φ,

$$\mathcal{F}[\Phi] = \mathcal{S}[\Phi] - \frac{2\beta}{t}(l_1\Phi(l_1) + l\Phi(-l)) + \frac{\beta}{3t^2}(l_1^3 + l^3), \tag{15}$$

$$\mathcal{S}[\Phi] = \int\limits_{-l}^{l_1} dx\,\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \frac{2}{t}\Phi\right\},$$

и учитывая (12), сводим вычисление $\mathcal{K}(X,t)$ к интегралу по траекториям типа интеграла Фейнмана–Каца [20]. Из (14) следует, что интегрирование по $d\lambda$ снимает граничное условие на $\Phi(x)$ в точке $x = -X$, а коррелятор $\mathcal{K}(X,t)$ следующим образом выражается через матричный элемент евклидовой квантовой механики:

$$\begin{gathered} \mathcal{K}(X,t) = \frac{\exp\left\{-\frac{\beta}{3t^2}(l_1^3 + l^3)\right\}}{4\nu\beta} \times \\ \times \left\langle \exp\left(\frac{2\beta l_1}{t}\Phi\right)\right| \times \\ \times \exp\left(-(l_1 - X)\hat{H}\right)\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(l+X)\hat{H}\right) \times \\ \times \left|\exp\left(\frac{2\beta l}{t}\Phi\right)\right\rangle \end{gathered} \tag{16}$$

с гамильтонианом

$$\begin{gathered} \hat{H} = -\frac{1}{4\beta}\frac{d^2}{d\Phi^2} + U(\Phi), \\ U(\Phi) = \frac{2\beta}{t}\Phi + \exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right). \end{gathered} \tag{17}$$

К сожалению, базис, в котором оператор $\hat{H}$ диагонален, в замкнутом виде найти не удается. Однако при $\nu \to 0$ и $\beta X^3/t^2 \gg 1$ задача (16), (17) допускает аналитическое решение.

Действительно, при малом ν вся ось Φ разделяется на две области доминантности каждого из слагаемых в $U(\Phi)$ по отдельности. В ведущем по ν приближении собственные функции $\hat{H}$ выписываются без труда:

$$\hat{H}\psi_n(\Phi) = \left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3} a_n\psi_n(\Phi), \tag{18}$$

$$\psi_n(\Phi) = \begin{cases} 4\nu \left(\dfrac{8\beta^2}{t}\right)^{1/2} K_0\left(8\nu\sqrt{\beta}\exp\left(-\dfrac{\Phi}{4\nu}\right)\right), & \Phi < \nu \ln\dfrac{1}{\nu}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{Ai}'(-a_n)}\left(\dfrac{8\beta^2}{t}\right)^{1/6} \mathrm{Ai}\left(\left(\dfrac{8\beta^2}{t}\right)^{1/3}\Phi - a_n\right), & \Phi > \nu\ln\dfrac{1}{\nu} \end{cases} \tag{19}$$

(K_0 — эллиптическая функция Макдональда). В выражении (19) $-a_n$, такие что $a_n > 0$, $a_{n+1} > a_n$, $n = 0, 1, \ldots$, представляют собой последовательность нулей функции Эйри: $\mathrm{Ai}(-a_n) = 0$. При вычислении среднего в (16) нам нужно найти результат действия оператора «эволюции» вида $\exp(-T\hat{H})$ на начальное состояние вида $\exp(\alpha\Phi)$. Оно ненормируемое, поэтому разложение по базису (19) либо возможно, либо невозможно, в зависимости от соотношения между T и α. Значения α, соответствующие граничным волновым функциям в (16), велики:

$$\alpha^3 t/\beta^2 \gg 1.$$

В этом случае скалярное произведение $\langle\psi_n|\exp(\alpha\Phi)\rangle$ с точностью до исчезающих при $\nu \to 0$ слагаемых имеет вид

$$c_n(\alpha) = \langle\psi_n|\exp(\alpha\Phi)\rangle = \frac{1}{\mathrm{Ai}'(-a_n)}\left(\frac{t}{8\beta^2}\right)^{1/6} \times \\ \times \exp\left(\alpha a_n \left(\frac{t}{8\beta^2}\right)^{1/3} + \alpha^3 \frac{t}{8\beta^2}\right). \tag{20}$$

Для функции

$$f(\Phi, X) = \exp\left(-\frac{\beta l^3}{3t^2}\right)\exp\left(-(l+X)\hat{H}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{2\beta l}{t}\Phi\right) \tag{21}$$

ряд

$$f(\Phi, X) = \sum_n c_n\left(\frac{2\beta l}{t}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{\beta l^3}{3t^2} - a_n\left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3}(l+X)\right)\psi_n(\Phi) = \\ = \sum_n \frac{1}{\mathrm{Ai}'(-a_n)}\exp\left(-a_n\left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3} X\right)\psi_n(\Phi) \tag{22}$$

сходится; при $\beta X^3/t^2 \gg 1$ сумма в (22) определяется вкладом основного состояния. Далее будет существенна только область $\Phi < \nu\ln(1/\nu)$, в которой

$$f(\Phi, X) \approx \frac{4\nu}{\mathrm{Ai}'(-a_0)}\left(\frac{8\beta^2}{t}\right)^{1/3} \times \\ \times K_0\left(8\nu\sqrt{\beta}\exp\left(-\frac{\Phi}{4\nu}\right)\right) \times \\ \times \exp\left(-a_0\left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3} X\right). \tag{23}$$

Ряд, аналогичный (22), для состояния

$$g(\Phi, X) = \exp\left(-\frac{\beta l_1^3}{3t^2}\right)\exp\left(-(l_1 - X)\hat{H}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{2\beta l_1}{t}\Phi\right) \tag{24}$$

расходится. Однако при $\beta X^3/t^2 \gg 1$ можно использовать тот факт, что основная часть функции $g(\Phi, \tau)$ для $\tau > X$ находится в области, где доминирует линейное слагаемое в $U(\Phi)$. Соответствующая эволюционная задача легко решается:

$$g_0(\Phi, X) = \exp\left(\frac{2\beta X}{t}\Phi - \frac{\beta X^3}{3t^2}\right). \tag{25}$$

Поведение $g(\Phi, X)$ при малых и отрицательных Φ найдем, используя подстановку

$$g(\Phi,\tau) = g_0(\Phi,\tau)G(\Phi,\tau), \\ G(\Phi \to +\infty, \tau) \to 1, \quad G(\Phi \to -\infty, \tau) \to 0. \tag{26}$$

Решение уравнения для G

$$\partial_\tau G = \left(\frac{1}{4\beta}\partial_\Phi^2 + \frac{\tau}{t}\partial_\Phi - \exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\right)G \tag{27}$$

с граничными условиями (26) и при больших τ может быть найдено с помощью адиабатического разложения. В ведущем приближении правая часть равенства (27) обращается в нуль и явное выражение для G находится без труда. Тогда в главном порядке по $\beta X^3/t^2$ полная функция $g(\Phi, X)$ имеет вид

$$g(\Phi, X) = 8\beta\nu\frac{X}{t} \times \\ \times K_{8\beta\nu X/t}\left(8\sqrt{\beta}\nu\exp\left(-\frac{\Phi}{4\nu}\right)\right)\exp\left(-\frac{\beta X^3}{3t^2}\right). \quad (28)$$

В области $\Phi < \nu\ln(1/\nu)$ отличием индекса функции Макдональда от нуля можно пренебречь. Подстановка (28) и (23) в (16) приводит к окончательному выражению для коротковременной асимптотики парного коррелятора поля скорости:

$$\mathcal{K}(X,t) \approx \frac{(X/t)^2}{2\mathrm{Ai}'(-a_0)}\left(\frac{\beta X^3}{t^2}\right)^{-1/3} \times \\ \times\exp\left(-\frac{\beta X^3}{3t^2} - a_0\left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3}X\right). \quad (29)$$

Мы видим, что коррелятор $\mathcal{K}(X,t)$ действительно конечен при $\nu \to 0$. Далее, из (29) следует, что интеграл по флуктуациям около оптимального профиля (6) зависит от параметра теории $\beta X^3/t^2$, а именно, он пропорционален $(\beta X^3/t^2)^{-1/3}\exp\left(-a_0(\beta X^3/t^2)^{1/3}\right)$ и не может быть результатом какого-либо гауссового интегрирования.

Корреляционная функция третьего порядка $T(X,Y,t)$ (см. (5)) в приближении, учитывающем распад корреляторов, также выражается через вариационные производные решения (11) по начальному полю:

$$T(X,Y,t) = \frac{1}{4\beta^2}\left\langle\frac{\delta^2 u(X,t)}{\delta u_0(0)\delta u_0(Y)}\right\rangle. \quad (30)$$

Выполняя преобразования, полностью аналогичные (12)–(15), мы получаем операторное представление для $T(X,Y,t)$:

$$T(X,Y,t) = -\frac{1}{16\nu^2\beta^2}\exp\left\{-\frac{\beta}{3t^2}(l_1^3 + l^3)\right\} \times \\ \times\partial_X\int\limits_{-l}^{-X}dz_1\int\limits_{Y-X}^{l_1}dz_2 \times \\ \times\left\langle\exp\left(\frac{2\beta l_1}{t}\Phi\right)\right|\exp\left(-(l_1+z_1)\hat{H}\right) \times \\ \times\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(z_2-z_1)\hat{H}\right) \times \\ \times\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(l-z_2)\hat{H}\right) \times \\ \times\left|\exp\left(\frac{2\beta l}{t}\Phi\right)\right\rangle. \quad (31)$$

Перейдем к функциям f и g, определенным в (21) и (24), тогда (31) примет вид

$$T(X,Y,t) = \frac{-\partial_X}{16\nu^2\beta^2}\int\limits_X^l dz_1\int\limits_{-l_1}^{-Y+X}dz_2 \times \\ \times\left\langle g(\Phi,z_1)\right|\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right) \times \\ \times\exp\left(-(z_1-z_2)\hat{H}\right)\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\left|f(\Phi,z_2)\right\rangle. \quad (32)$$

Из (28) следует, что при $\beta X^3/t^2 \gg 1$ основной вклад в интеграл по dz_1 дает малая окрестность вблизи верхнего предела $z_1 = -X$. Заметим, что эффект перемежаемости (8) на этом этапе вычислений состоит именно в том, что функция $g(\Phi, X)$ неразложима по полному набору собственных функций (19), в связи с чем эта функция имеет вид (28). При $X - Y \sim X \sim Y$ матричный элемент в (32) определяется вкладом промежуточного основного состояния ψ_0 (произведение $g(\Phi,X)$ на $\exp(-\Phi/2\nu)$ уже раскладывается по базису (19)). В интеграле по dz_2 существенна область $-X + Y < z_2 < 0$, внутри которой зависимостью среднего в (32) от z_2 можно пренебречь. В результате мы приходим к выражению

$$T(X,Y,t) \approx \frac{(X/t)^2}{2\mathrm{Ai}'(-a_0)}\left(\frac{\beta X^3}{t^2}\right)^{-1/3}\frac{X-Y}{t} \times \\ \times\exp\left(-\frac{\beta X^3}{3t^2} - a_0\left(\frac{\beta}{t^2}\right)^{1/3}X\right) \approx \\ \approx\frac{X-Y}{t}\mathcal{K}(X,t), \quad (33)$$

согласующемуся с тем, что начальный профиль (6) является доминирующим.

Схема вычисления корреляционной функции четвертого порядка

$$S(X,Y,\Delta,t) = S^{(1)}(X,X_1) + S^{(2)}(X,X_1) + \\ + S^{(1)}(X_1,X) + S^{(2)}(X_1,X), \quad (34)$$

$$S^{(1)}(X,X_1) = \frac{1}{4\beta^2}\left\langle\frac{\delta^2 u(X,t)}{\delta u_0(0)\delta u_0(y)}u(X_1,t)\right\rangle, \\ S^{(2)}(X,X_1) = \frac{1}{4\beta^2}\left\langle\frac{\delta u(X,t)}{\delta u_0(0)}\frac{\delta u(X_1,t)}{\delta u_0(y)}\right\rangle, \quad (35)$$

где $X_1 = X + \Delta$, несколько отличается от вычислений для случаев парного и тройного корреляторов. Это связано с тем, что в усредняемом выражении присутствуют одновременно комбинации $F(z, X_1)$ и

$F(z,X)$. Приведение средних к интегралам по траекториям осуществляется теперь заменой

$$\Phi(z) = -2\nu\ln\lambda - 2\nu\ln n_F(z-\mu) + \frac{z^2-X^2}{2t} + \int\limits_{-X}^{z} d\tau\, u_0(\tau),$$

где $n_F(z)$ имеет вид распределения Ферми:

$$n_F(z) = \left[1+\exp\left(\frac{\Delta}{2\nu t}z\right)\right]^{-1}. \qquad (36)$$

Замкнутые выражения удается получить, к сожалению, только для малых раздвижек $\Delta \ll X$. При этом, однако, Δ остается много больше диссипативного масштаба: $\Delta^2(\nu t)^{-1} \gg 1$. Формально малость Δ позволяет заменить в операторном представлении для $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ вершину $\exp(2\beta\Delta/t)$ на 1. В результате для среднего $S^{(1)}(X,X_1)$ получаем

$$S^{(1)} = \partial_X \frac{\Delta}{32\beta^2\nu^3t^2}\hat{\mathcal{L}} \times \left\langle f(\Phi,\zeta_1)\middle|\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(\zeta_1-\zeta_2)\hat{H}\right) \times \exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(\zeta_2-\zeta_3)\hat{H}\right) \times \exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\middle| g(\Phi,\zeta_3)\right\rangle, \qquad (37)$$

где

$$\hat{\mathcal{L}} = \int\limits_{Y-X}^{l_1} dz_1 \int\limits_{-l}^{-X} dz_2 \int\limits_{-l}^{l_1} dz_3 (z_3-\Delta) \times \int\limits_{-l}^{l_1} d\mu\, n_F(\mu-z_1) n_F(\mu-z_2) n_F(z_3-\mu), \qquad (38)$$

а $\{\zeta_n\}$ — такая перестановка переменных интегрирования $\{z_n\}$, что $\zeta_k < \zeta_{k+1}$. (Фактически (37) представляет собой матричный элемент от хронологически упорядоченного произведения операторов.)

Заметим, что подынтегральное выражение в (37) при $\nu \to 0$ имеет особенности как функция $\zeta_3-\zeta_2$. Действительно, матричные элементы оператора

$$\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(\zeta_3-\zeta_2)\hat{H}\right)\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)$$

при $\zeta_3-\zeta_2 \sim \beta\nu^2/t$ приблизительно в ν^{-3} раз больше значений при раздвижках $\zeta_3-\zeta_2 \sim X$. Эту сингулярность можно выделить по правилу

$$\frac{1}{\nu}\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right)\exp\left(-(\zeta_3-\zeta_2)\hat{H}\right)\exp\left(-\frac{\Phi}{2\nu}\right) \to \to \frac{2\beta}{t}\delta(\zeta_3-\zeta_2), \quad \nu\to 0. \qquad (39)$$

Возникающий при этом множитель порядка $1/\nu$ в (37) компенсируется результатом интегрирования по области $\mu > z_3$, имеющим порядок $\nu t/\Delta$. Не имеющая особенностей, определяемых формулой (39), часть пространства $z_{1,2} < \mu < z_3$ дает вклад порядка Δ и потому несущественна. Окончательно для $\Delta \ll X$ получаем

$$S^{(1)}(X,X_1) = \frac{(X-Y)^2}{2t^2}\mathcal{K}(X,t). \qquad (40)$$

Среднее $S^{(2)}(X,X_1)$ вычисляется полностью аналогично тройному коррелятору $T(X,Y,t)$, так как тождество

$$\partial_X \frac{\int\limits_0^{l_1} F(z,X)\,dz}{\int\limits_{-l}^{l_1} F(z,X)\,dz} = -\partial_X \frac{\int\limits_{-l}^{0} F(z,X)\,dz}{\int\limits_{-l}^{l_1} F(z,X)\,dz}$$

позволяет избавиться от сингулярностей типа (39):

$$S^{(2)}(X,X_1) = \frac{X^2-Y^2}{2t^2}\mathcal{K}(X,t). \qquad (41)$$

Вычисления $S^{(1)}(X_1,X)$ и $S^{(2)}(X_1,X)$ проводятся по той же схеме с заменой $\Delta \to -\Delta$. Результат оказывается таким, что при $\nu \to 0$ этими слагаемыми в (34) можно пренебречь. Полное выражение для четырехточечного коррелятора

$$S(X,Y,\Delta,t) \approx \frac{X(X-Y)}{t^2}\mathcal{K}(X,t) \qquad (42)$$

вместе с (29) и (33) подтверждает, что определяющую роль играет начальная флуктуация (6), и согласуется с выражением (9) для ее меры.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами, полученными в настоящей работе, являются выражения (29), (33) и (42). Экспоненциальная малость значений этих корреляционных функций означает редкость определяющей их флуктуации. Совпадение экспоненциальных частей этих выражений и определяет единственность этой флуктуации для различных средних, т. е. явление перемежаемости.

Формулы (29), (33) и (42) относятся, строго говоря, к начальному распределению (3), соответствующему случаю распада корреляторов. Возвращаясь к задаче (1), (2), мы должны оценить роль шума ξ. Например, для парного коррелятора исходным выражением будет

$$\mathcal{K}(X,t) = \langle u(0,0) \langle u(X,t) \rangle_\xi \rangle, \qquad (43)$$

где внешнее усреднение проводится по начальному ансамблю (3), а $\langle \ldots \rangle_\xi$ означает среднее по шуму ξ, действовавшему на временном интервале $(0,t)$. Если учитывать шум по теории возмущений на фоне эволюционирующего профиля (6), то поправка в $\langle u(X,t) \rangle_\xi$ возникает во втором порядке и легко оценивается из соображений размерности: коррелятор $\langle \xi\xi \rangle$ пропорционален температуре β^{-1}, которая (без ν) приводится к безразмерному виду единственным способом. Получающийся таким образом дополнительный множитель $\left(\beta X^3/t^2\right)^{-1}$ подтверждает применимость выражений (29), (33) и (42) для решения уравнения Бюргерса с накачкой ланжевеновского типа (2). Вязкость же, возникающая при усреднении по шуму ξ, компенсируется большими значениями градиентов поля $u(x,t)$ в момент опрокидывания оптимальной флуктуации.

В заключение сделаем несколько замечаний об обычной турбулентной постановке задачи для уравнения Бюргерса. Основные результаты, полученные к настоящему времени, относятся к различным асимптотическим выражениям для одновременных функций распределения градиента поля скорости u_x и разности скоростей $u(r,t) - u(0,t)$ [21–25]. В этом случае задача сводится к поиску той или иной оптимальной флуктуации, определяющей искомые дальние [19, 21–23, 26] или промежуточные [18, 24, 25] асимптотики. Решающую роль при этом играет большое значение аргумента функции распределения или, что то же самое, номер вычисляемого момента (см. также в более общем контексте [27–29]). Изучаемые в настоящей работе асимптотики корреляторов (5) определяются большой (по параметру $\beta X^3/t^2$) начальной флуктуацией поля скорости. Поэтому представляет интерес анализ данной задачи в рамках прямого инстантонного подхода [19, 27–29].

Явление перемежаемости, как уже отмечалось, является в некотором смысле обратным предельным случаем по отношению к задачам, корректно описываемым теорией возмущений, что делает его важным для статистической физики в целом. Однако систем, в которых удается построить последовательное аналитическое описание этого явления, совсем немного; кроме уже упомянутых работ, отметим работы, в которых в некоторых предельных случаях решена задача о переносе турбулентным потоком пассивного скаляра [30, 31]. С этой точки зрения явные выражения для асимптотик корреляционных функций (5) и меры (9) представляются нам весьма наглядными.

Мы благодарны В. В. Лебедеву и М. В. Черткову за многочисленные обсуждения и советы. Мы признательны М. Г. Степанову, Г. Е. Фальковичу и А. Фуксону за полезные замечания. Работа И. В. К. была частично поддержана Эйнштейновским центром при институте им. Х. Вейцманна, РФФИ (проект 00-02-17652) и персональным грантом Российского фонда поддержки науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

2. U. Frisch, *Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).

3. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).

4. K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).

5. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).

6. V. V. Lebedev, Письма в ЖЭТФ **70**, 675 (1999).

7. V. V. Lebedev, Phys. Rev. E **61**, 1002 (2000).

8. И. В. Колоколов, Письма в ЖЭТФ **71**, 20 (2000).

9. J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*, Reidel, Dordrecht (1974).

10. M. Kardar, G. Parisi, and Y. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).

11. G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).

12. D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Phys. Rev. A **16**, 732 (1977).

13. V. V. Lebedev and V. S. L'vov, Письма в ЖЭТФ **58**, 301 (1993).

14. А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск (1999).

15. L. Frachenbourg and Ph. A. Martin, E-print archives cond-mat/9909056.

16. R. Tribe and O. Zaboronski, Comm. Math. Phys. **101**, 415 (2000).

17. V. Yakhot and A. Chekhlov, Phys. Rev. Lett. **77**, 3118 (1996).

18. W. E. K. Khanin, A. Mazel, and Y. Sinai, Phys. Rev. Lett. **78**, 1904 (1997).

19. E. Balkovsky, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **78**, 1452 (1997).

20. R. P. Feynmann and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill B. C., New York (1965).

21. М. В. Фейгельман, ЖЭТФ **79**, 1095 (1980).

22. V. Gurarie and A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4908 (1996).

23. S. A. Boldyrev, Phys. Rev. E **55**, 6907 (1997).

24. T. Gotoh and R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 2859 (1998).

25. J. Bec and U. Frisch, Phys. Rev. E **60**, 1395 (2000).

26. A. I. Chernykh and M. G. Stepanov, Phys. Rev. E **64**, 026306 (2001).

27. G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, and A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4896 (1996).

28. M. Chertkov, Phys. Rev. E **55**, 2722 (1997).

29. E. Balkovsky and V. Lebedev, Phys. Rev. E **58**, 5776 (1998).

30. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **51**, 4924 (1995).

31. K. Gawedzki and A. Kupianen, Phys. Rev. Lett. **75**, 3834 (1995).