ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 6, стр. 1261–1269

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА РАЗЛИЧИМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

*С. Н. Молотков**, *С. С. Назин*

Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 7 февраля 2001 г.

Обсуждаются ограничения, накладываемые специальной теорией относительности на различимость квантовых состояний. В качестве примера приведено явное выражение, связывающее вероятность ошибки при различении двух ортогональных однофотонных состояний с их структурой, моментом времени t начала измерения и интервалом времени T, прошедшим с начала измерения до момента получения окончательного результата наблюдателем.

PACS: 89.70.+c, 03.65.-w

Многие вопросы нерелятивистской квантовой теории информации, например, проблема передачи информации по квантовым каналам связи, приводят к задаче о различимости квантовых состояний.

Основные постулаты классической нерелятивистской физики предполагают, что любое измерение состояния физической системы наблюдателем может быть проведено сколь угодно точно и без возмущения исходного состояния. Более того, из-за отсутствия ограничений на предельную скорость нет запретов на проведение измерений, в том числе и нелокальных в пространстве, за сколь угодно малое (формально — нулевое) время. Поэтому различение двух состояний физической системы может быть осуществлено достоверно, мгновенно и без их возмущения.

В нерелятивистской квантовой механике любое измерение в квантовой системе, вообще говоря, приводит к возмущению исходного состояния системы. Имеется принципиальная разница при различении состояний квантовой системы, находящейся в одном из двух ортогональных или неортогональных состояний. Для ортогональных состояний ответ на вопрос о том, в каком состоянии находится квантовая система, может быть получен с достоверностью (с нулевой вероятностью ошибки) и без возмущения исходного состояния [1, 2]. Возможность получения наблюдателем результата (для нелокальных измерений) за нулевое время в скрытом виде содержит отсутствие ограничений на предельную скорость.

Неортогональные состояния принципиально достоверно неразличимы, т. е. ответ на вопрос о том, в каком из двух неортогональных состояний находится квантовая система, никогда нельзя получить с нулевой вероятностью ошибки. Может быть установлена точная нижняя граница для вероятности такой ошибки [3–5]. Поэтому все нерелятивистские квантовые криптографические протоколы обмена используют неортогональные состояния. Никаких принципиальных запретов на различение (хотя и с некоторой вероятностью ошибки) неортогональных состояний за нулевое время не существует.

В релятивистской квантовой механике также должны возникать дополнительные (по сравнению с нерелятивистской квантовой механикой) ограничения на время, необходимое для различения квантовых состояний. Впервые вопрос о принципиальных ограничениях, накладываемых специальной теорией относительности на измеримость динамических переменных квантовых систем, рассматривался в 1931 г. в работе Ландау и Пайерлса [6]. Качественные соображения работы [6], основанные на рассмотрении соотношений неопределенности, вместе с ограничением на предельную скорость привели к выводу о том, что в релятивистской области оказывается невозможным точное определение, например, импульса (в отличие от нерелятивистского случая)

*E-mail: molotkov@issp.ac.ru

ни за какое конечное время. Фактически в работе [6] был сделан вывод о том, что никакие нелокальные динамические переменные квантовой системы не измеримы в релятивистской области.

В нерелятивистской квантовой механике не запрещено сколь угодно точное измерение импульса квантовой системы — несмотря на то что собственным вектором оператора импульса является бесконечно протяженная в пространстве плоская волна. Более точно, плоская волна не является физически реализуемым состоянием, поскольку не принадлежит гильбертову пространству квадратично-интегрируемых функций, а является обобщенным собственным вектором оператора импульса [7] (линейным непрерывным функционалом в оснащенном гильбертовом пространстве [8]). Обобщенный собственный вектор (плоская волна) может быть приближен сколь угодно точно нормированным состоянием, локализованным в конечной, но сколь угодно большой пространственной области, таким состоянием, что среднее значение оператора импульса, измеренное на этом состоянии, будет сколь угодно близко к значению импульса плоской волны. Такое измерение импульса подразумевает, что состояние, присутствующее в сколь угодно большой пространственной области, доступно для измерения целиком. В нерелятивисткой квантовой механике формально возможен доступ к любой области за нулевое время, поэтому в принципе нет ограничений на сколь угодно точное измерение, например, импульса. С учетом ограничений специальной теории относительности доступ к бесконечной области требует бесконечного времени, и в этом смысле динамические переменные являются неопределимыми. Точнее говоря, они неопределимы, если мы требуем абсолютно точного их измерения за конечное время.

Дальнейшее исследование вопроса об измерениях квантовых систем в релятивистском случае было сделано в 1933 г. в работе Бора и Розенфельда [9]. Критические замечания, высказанные в работе [9] относительно результатов из [6], не отменяют ограничений, высказанных в работе [6], поскольку последние следуют из ограничений, диктуемых специальной теорией относительности. Противное означало бы отказ от теории относительности. В неизменном виде аргументы работы [6] воспроизводятся позднее в [10].

Ортогональность двух квантовых состояний, вообще говоря, является нелокальным свойством как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве-времени Минковского. Однако из этого не следует, что, например, различение двух ортогональных состояний не может быть осуществлено локальными измерениями (локальными в том смысле, что исход измерения может быть приписан определенной точке пространства).

В связи с задачами квантовой теории информации нас будет интересовать вопрос об ограничениях, диктуемых релятивистской квантовой теорией, на время получения результата измерения при различении двух ортогональных состояний квантовой системы. Хотя соображения о конечности времени получения окончательного результата наблюдателем являются общими, само это время зависит от структуры состояний.

В данной работе будет приведен пример задачи о различении двух ортогональных однофотонных состояний, для которых удается в общем виде связать ошибку их различения с интервалом времени T с начала измерения до момента получения окончательного результата наблюдателем.

Для наших целей достаточно ограничиться чистыми состояниями, поскольку любое состояние может быть представлено как статистическая смесь чистых состояний (хотя такое представление, вообще говоря, не является однозначным).

Пусть имеется пара ортогональных состояний в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $|\psi_{0,1}\rangle \in \mathcal{H}$ и $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0$. По степени детальности описания измерительной процедуры в квантовой механике естественно выделяются несколько уровней [4, 11–14]. Простейшее описание процесса измерения позволяет лишь ответить на следующие вопросы: какие исходы возможны при данном измерении (т. е. каково пространство возможных результатов измерения Θ); с какой относительной частотой (вероятностью) будет получаться тот или иной результат (т. е. результат измерения будет принадлежать измеримому множеству $\Delta \subset \Theta$) при заданном начальном состоянии ρ измеряемой квантовомеханической системы. В этом смысле измерения находятся во взаимнооднозначном соответствии с положительными разложениями единицы на Θ в гильбертовом пространстве состояний системы $\mathcal{H}$ [3, 4, 11–14], т. е. семействами эрмитовых операторов $M_t(\Delta)$, $\Delta \subset \Theta$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и удовлетворяющих свойствам:

1) $M_t(\emptyset) = 0$, $M_t(\Theta) = I$ (нормировка);
2) $M_t(\Delta) \geq 0$ (положительность);
3) $M_t(\Delta) = \sum_j M_t(\Delta_j)$, если $\Delta = \cup_j \Delta_j$, $\Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset$ при $i \neq j$ (аддитивность).

При этом мера $\mu_{t,\rho}$ множества Δ определяется выражением

$$\mu_{t,\rho}(\Delta) = \mathrm{Pr}_t(\theta \in \Delta) = \mathrm{Tr}\{\rho M_t(\Delta)\}. \qquad (1)$$

Иными словами, $M_t(\Delta)$ определяют положительную операторно-значную меру. Разные значения параметра t описывают физически различные измерения. Здесь введен параметр t — момент времени начала измерения. Подчеркнем, что здесь и ниже время t является параметром и не принадлежит пространству результатов. Время получения окончательного результата наблюдателем (сбора и доставки уже классической информации с нелокального прибора до наблюдателя) будем обозначать T.

Задание положительной операторно-значной меры является формальным описанием физического прибора — черного ящика, на входе которого имеется квантовое состояние, а на выходе возникает классическая величина (функция), определяющая распределение вероятности (1). Такое описание прибора, вообще говоря, не является самым подробным, так как одно и то же разложение единицы может быть реализовано при помощи разных приборов.

Частным случаем такой меры являются спектральные ортогональные разложения единицы, соответствующие семействам спектральных проекторов самосопряженных операторов в $\mathcal{H}$, для которых имеет место равенство

$$M_t(\Delta_1)M_t(\Delta_2) = 0, \text{ если } \Delta_1 \cap \Delta_2 = 0.$$

Однако в таком подходе игнорируется вопрос о том, в каком состоянии оказывается система после измерения, давшего тот или иной конкретный результат. Поскольку нас пока не будет интересовать вопрос о состоянии системы после измерения, не будем использовать понятие инструмента (супероператора) [4, 11–14].

Состояния достоверно различимы при помощи измерения, которое описывается ортогональным разложением единицы в $\mathcal{H}$

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_\perp = I, \quad \mathcal{P}_{0,1} = |\psi_{0,1}\rangle\langle\psi_{0,1}|, \\ \mathcal{P}_\perp = I - \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1,\end{gathered} \qquad (2)$$

где $\mathcal{P}_{0,1}$ проекторы на подпространства $\mathcal{H}_{0,1}$, натянутые на $|\psi_{0,1}\rangle$, $\mathcal{P}_\perp$ — проектор на подпространство $\mathcal{H}_{0,1}^\perp = (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1)^\perp$. Вероятность получения исхода в канале 0 на множестве результатов $\Theta = \{0, 1, \perp\}$, если входным состоянием является, например, $|\psi_0\rangle$, равна

$$\mathrm{Pr}\{|\psi_0\rangle\} = \mathrm{Tr}\{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\mathcal{P}_0\} = 1, \qquad (3)$$

а в каналах $\mathcal{P}_{1,\perp}$ тождественно равна нулю:

$$\mathrm{Pr}\{|\psi_0\rangle\} = \mathrm{Tr}\{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\mathcal{P}_{1,\perp}\} = 0, \qquad (4)$$

и аналогично для входного состояния $|\psi_1\rangle$. Соотношения (2)–(4) означают, что ортогональные состояния различимы достоверно. Существенным обстоятельством является тот факт, что продолжительность рассматриваемой измерительной процедуры до сих пор нигде не упоминалась.

Наши выводы о времени получения окончательного результата будут относиться ко времени доведения результата до наблюдателя; точнее говоря, оценки, полученные ниже, дают нижнюю границу для этого времени. Для получения таких оценок не требуется знания конкретной измерительной процедуры (явного задания инструмента (супероператора)), а достаточно лишь разложения единицы (задания положительных эрмитовых операторов $M_t(\Delta)$). Множество результатов Θ может быть сколь угодно сложным, но оно обязательно содержит явно или опосредованно пространственные области. Этого оказывается уже достаточно, чтобы вывести ограничения, диктуемые конечностью скорости света.

В релятивистском случае до сих пор не существует четкого и внутренне непротиворечивого ответа на вопрос о состоянии системы после измерения, т. е. в каком смысле следует понимать редукцию вектора состояния квантовой системы. Различные аспекты этой проблемы обсуждались в работах [15–18]. Полная, пока еще не построенная, теория квантовомеханических измерений в релятивистском случае должна уметь отвечать на вопрос об изменении состояния в результате измерения. При этом ответы на некоторые вопросы могут быть получены и без полного описания процесса измерения.

До сих пор при доказательстве упомянутых утверждений использовались только свойства абстрактного гильбертова пространства состояний квантовой системы. Поскольку состояния релятивистских квантованных полей описываются лучами в гильбертовом пространстве состояний, с формальной точки зрения измерения также описываются разложениями единицы. При этом не существенно, какая конкретная реализация абстрактного гильбертова пространства используется, ее выбор диктуется лишь соображениями удобства в каждой конкретной задаче. Однако все квантовые состояния должны быть ассоциированы с некоторой физической системой. Все манипуляции и измерения над квантовыми системами происходят в координатном пространстве (или пространстве-времени, если речь идет о релятивистском случае). Не существует физических систем, которые имели бы степени свободы, описываемые состояниями в некотором гильбертовом пространстве в отрыве от пространственных степеней свободы. Последнее фактически диктуется тем, что различные сорта частиц классифицируются по неприводимым представлениям группы Пуанкаре, содержащей подгруппу трансляций в пространстве-времени Минковского [7].

В нерелятивистской квантовой механике отсутствие ограничений на предельную скорость не приводит к запретам на мгновенное получение результатов нелокальных измерений (даже для бесконечно протяженных в пространстве состояний) в некоторый произвольно выбранный момент времени. В релятивистской квантовой теории поля возникает принципиально иная ситуация. В квантовой теории поля состояния поля порождаются полевыми операторами (точнее, операторными обобщенными функциями) [7]. Сглаживающие функции (амплитуды) в импульсном представлении задаются на массовой поверхности. Это приводит к тому, что состояния поля являются принципиально нелокализуемыми в координатном пространстве, т. е. носители амплитуд отличны от нуля во всем пространстве [7, 19–22]. При этом допускаются состояния свободного поля (как для массовых, так и безмассовых полей), сколь угодно сильно локализованные в пространстве — со степенью локализации, сколь угодно близкой к экспоненциальной, порядка $\exp(-\alpha|\mathbf{x}|/\ln(\ln(\ldots|\mathbf{x}|)))$, где α может быть любой). Это не приводило бы к каким-либо ограничениям, как для нерелятивистского случая, если бы не было ограничений на предельную скорость распространения. При существовании предельной скорости распространения как квантовых, так и классических объектов, нелокализуемость (которая возникает из-за требований специальной теории относительности при квантовании полей [7]) приводит к новой ситуации, отличающейся от нерелятивистского случая. Достоверное различение пары ортогональных состояний квантованного поля требует доступа ко всему пространству (такое измерение должно быть нелокальным в координатном пространстве), поэтому время, необходимое для получения результата наблюдателем, бесконечно. Но утверждение, что абсолютно точное (достоверное) различение ортогональных состояний квантованного поля требует бесконечного времени, физически вряд ли удовлетворительно.

Постановка задачи, при которой требуется доступ ко всему пространству для достоверного (с вероятностью единица) различения состояний, не имеет смысла. Наблюдатель никогда не может контролировать все пространство. Поэтому необходимо ослабить требование о достоверной различимости состояний и переформулировать задачу следующим образом. Наблюдатель контролирует некоторую конечную (но сколь угодно большую) пространственную область, где можно проводить измерения. Спрашивается, как связана вероятность ошибки при различении состояний с размером области (фактически временем T, за которое наблюдателем может быть получен окончательный результат) и структурой самих состояний. Точнее говоря, требуется при заданных входных состояниях и размере области (и, соответственно, времени получения результата) провести оптимальное измерение, минимизирующее ошибку при различении состояний.

Рассмотрим теперь наиболее интересный для приложений случай калибровочного поля — фотонов. Операторы электромагнитного поля имеют вид [23]

$$A^{\pm}_{\mu}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm i\hat{k}\hat{x}} e^m_{\mu}(\mathbf{k}) a^{\pm}_m(\mathbf{k}) \qquad (5)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[A^-_{\mu}(\hat{x}), A^+_{\nu}(\hat{x}')]_- = i g_{\mu\nu} D^-_0(\hat{x}-\hat{x}'), \qquad (6)$$

где $D^-_0(\hat{x}-\hat{x}')$ — коммутаторная функция для поля с нулевой массой:

$$\begin{gathered} D^{\pm}_0(\hat{x}) = \pm\frac{1}{i(2\pi)^3}\int \frac{d\mathbf{p}}{2p_0} e^{\pm i\hat{p}\hat{x}} = \\ = \frac{1}{4\pi}\varepsilon(x_0)\delta(\hat{x}^2) \pm \frac{i}{4\pi\hat{x}^2}, \\ \varepsilon(x_0)\delta(\hat{x}^2) \equiv \frac{\delta(x_0-|\mathbf{x}|)-\delta(x_0+|\mathbf{x}|)}{2|\mathbf{x}|}. \end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь величины со шляпками обозначают четырехмерные векторы: $\hat{k} = (k_0, \mathbf{k})$, $\hat{x} = (x_0, \mathbf{x})$. Различают четыре сорта фотонов: два поперечных, продольный и временной, при этом два последних являются фиктивными и могут быть исключены из рассмотрения путем введения индефинитной метрики [23]. Наиболее короткий путь к ответу связан с использованием конкретной калибровки. Далее будем работать в подпространстве физических состояний в кулоновской калибровке $A_\mu = (\mathbf{A}, \varphi = 0)$, имея дело с двумя физическими поперечными состояниями электромагнитного поля. Операторная обобщенная функция является вектором в трехмерном пространстве

$$\vec{\psi}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \times \\ \times \sum_{s=\pm 1} \mathbf{w}(\mathbf{k}, s) \{a(\mathbf{k}, s) e^{-i\hat{k}\hat{x}} + a^+(\mathbf{k}, -s) e^{i\hat{k}\hat{x}}\}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{w}(\mathbf{k}, s)$ — трехмерный вектор, описывающий состояние спиральности $s = \pm 1$,

$$\mathbf{w}(\mathbf{k}, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \pm i \mathbf{e}_2(\mathbf{k})], \\ \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \perp \mathbf{e}_2(\mathbf{k}), \quad |\mathbf{w}(\mathbf{k}, s)|^2 = 1, \quad (9)$$

где $\mathbf{e}_{1,2}(\mathbf{k})$ — векторы, перпендикулярные $\mathbf{k}$. Операторы поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{\psi}(\hat{x}) = -i \frac{\partial}{\partial t} \vec{\psi}(\hat{x}), \quad \nabla \cdot \vec{\psi}(\hat{x}) = 0. \quad (10)$$

Сглаженные операторы поля могут быть записаны в виде

$$\vec{\psi}(f) = \sum_{s=\pm 1} \int \vec{\psi}(\hat{x}, s) f(\hat{x}, s) d\hat{x} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \sum_{s=\pm 1} \mathbf{w}(\mathbf{k}, s) \times \\ \times \{f(\mathbf{k}, s) a^+(\mathbf{k}, s) + f^*(\mathbf{k}, s) a(\mathbf{k}, s)\}, \quad (11)$$

где $f(\mathbf{k}, s)$ представляют собой значения $f(\hat{k}, s)$ на массовой поверхности, $f(\hat{k}, s)$ — четырехмерный фурье-образ произвольной функции $f(\hat{x}, s)$ из пространства основных функций $\mathcal{J}(\hat{x})$.

Будем рассматривать задачу о различении одного из двух однофотонных состояний, которые различаются только состояниями спиральности. Два однофотонных состояния фотонного поля с ортогональными состояниями спиральности и одинаковой пространственной амплитудой f могут быть записаны в виде

$$|\vec{\psi}_{0,1}\rangle = \left(\vec{\psi}^+(f_{0,1})\right) |0\rangle = \\ = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, t) \vec{\psi}^+(\mathbf{x}, t, \pm) |0\rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} f(\mathbf{k}) \mathbf{w}(\mathbf{k}, \pm) a^+(\mathbf{k}, \pm) |0\rangle, \quad (12)$$

где

$$\vec{\psi}^+(\mathbf{x}, t, \pm) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \mathbf{w}(\mathbf{k}, \pm) a^+(\mathbf{k}, \pm) e^{-i\hat{k}\hat{x}}, \\ f(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} f(\mathbf{k}) e^{i\hat{k}\hat{x}}. \quad (13)$$

Состояние с индексом 0 содержит компоненты с различными $\mathbf{k}$, но только со спиральностью «+», а состояние с индексом 1 — компоненты со спиральностью «−». Измерение, позволяющее достоверно различать одно из пары ортогональных состояний, описывается ортогональным разложением единицы в одночастичном подпространстве и записывается в виде

$$I = \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{P}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{P}}_\perp, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}_{0,1} = |\vec{\psi}_{0,1}\rangle \langle \vec{\psi}_{0,1}|, \\ \boldsymbol{\mathcal{P}}_\perp = I - \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 - \boldsymbol{\mathcal{P}}_1. \quad (14)$$

Операторная единица имеет вид

$$I = \sum_{s=\pm} \int \boldsymbol{\mathcal{M}}_t(d\mathbf{x}, \pm) = \\ = \sum_{s=\pm 1} \int d\mathbf{k} \left(\mathbf{w}(\mathbf{k}, s) |\mathbf{k}, s\rangle\right) \left(\langle \mathbf{k}, s | \mathbf{w}(\mathbf{k}, s)\right), \\ |\mathbf{k}, s\rangle = a^+(\mathbf{k}, s)|0\rangle, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_t(d\mathbf{x}, \pm) = \left(\int d\mathbf{k} e^{-i\hat{k}\hat{x}} \mathbf{w}(\mathbf{k}, \pm) |\mathbf{k}, \pm\rangle\right) \times \\ \times \left(\int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{k}', \pm | \mathbf{w}(\mathbf{k}', \pm) e^{i\hat{k}'\hat{x}}\right) \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3}, \\ \langle \mathbf{k}s | \mathbf{k}'s' \rangle = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (16)$$

Рассмотрим параметр времени t в разложении единицы (16). Интеграл по всему пространству в (15) от него не зависит и тождественно равен единичному оператору. Отметим, что для всех точек $\mathbf{x}$ параметр t одинаков (он не может зависеть от $\mathbf{x}$, иначе (15) не будет разложением единицы). Как будет видно ниже, время t следует интерпретировать как момент времени, в который проводится измерение классическим прибором.

Вероятность получения различных исходов измерений в каналах $\mathcal{P}_j$ имеет вид

$$\mathrm{Pr}_i\{|\vec{\psi}_j\rangle\} = \mathrm{Tr}\{|\vec{\psi}_i\rangle \langle \vec{\psi}_i | \boldsymbol{\mathcal{P}}_j\} = |\langle \vec{\psi}_j | \vec{\psi}_i \rangle|^2 = \\ = \delta_{s,s'} \left| \iint d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}' f^*(\mathbf{x}, t) D_0^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') \right|^2 = \\ = \frac{\delta_{s,s'}}{(2\pi)^3} \left| \int f^*(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \right|^2 = \delta_{i,j}. \quad (17)$$

Значения $s, s' = +$ соответствуют $i, j = 0$, а $s, s' = -$ отвечают $i, j = 1$. Амплитуды поля $f(\mathbf{x}, t)$ и $f(\mathbf{x}', t')$ связаны между собой причинно-следственной связью за счет эффектов распространения, описываемых коммутаторной функцией. Амплитуды $f(\mathbf{x}, t))$ являются коэффициентами в разложении вектора состояния $|\vec{\psi}_{0,1}\rangle$ в разных базисах — $\vec{\psi}^+(\mathbf{x}, t, \pm)|0\rangle$ и $\vec{\psi}^+(\mathbf{x}', t', \pm)|0\rangle$.

Положительно-частотная часть коммутаторной функции представляет собой скалярное произведение обобщенных базисных векторов:

$$D_0^-(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') = \\ = -i\langle 0|\vec{\psi}^-(\mathbf{x},t,\pm)\cdot\vec{\psi}^+(\mathbf{x}',t',\pm)|0\rangle, \quad t>t', \quad (18)$$

и интерпретируется [23] как амплитуда процесса рождения частицы в точке $\mathbf{x}', t'$, ее последующего распространения и уничтожения в точке $\mathbf{x}, t$.

Может сложиться впечатление, что интерпретация (18) противоречит (7) и соображениям причинности, из-за того что коммутаторная функция отлична от нуля и вне светового конуса (где $c^2|t-t'|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 \neq 0$), и тем самым допускает распространение сигналов быстрее скорости света. Это «противоречие» связано с тем, что в таком рассуждении обобщенная функция представляется как обычная. Но обобщенная функция, точнее говоря, линейный непрерывный функционал над пространством основных функций, в действительности не определена поточечно (нельзя говорить о значениях обобщенной функции в точке). Такое поведение коммутаторных функций не противоречит причинности; этот вопрос подробно разобран в работах [24, 25].

Из-за того что амплитуда поля $f(\mathbf{x},t)$ нелокализуема (отлична от нуля во всем пространстве), измерение (14)–(16) и получение результата с достоверностью подразумевают доступ ко всему пространству в момент времени t (точнее говоря, ко всей области пространства, где отлична от нуля $f(\mathbf{x},t)$). Поскольку такая область представляет собой все пространство, для достоверного различения ортогональных состояний наблюдателю требуется бесконечное время.

Рассмотрим теперь задачу о различении состояний, когда для измерений доступна лишь конечная область пространства Ω (дополнение до полного пространства — $\overline{\Omega}$). Пространством результатов является декартово произведение двух множеств $\Theta = \{(+,-)\times\Omega\bigcup ?\}$. Исходы измерений в области Ω доступны наблюдателю, а исход ?, формально соответствующий срабатыванию детектора в области $\overline{\Omega}$ — недоступен. Измерение описывается разложением единицы на этом множестве результатов, отнесенным к моменту t,

$$I = I_{\overline{\Omega}} + I_\Omega, \\ I_\Omega = \int\limits_\Omega \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_t(d\mathbf{x},+) + \boldsymbol{\mathcal{M}}_t(d\mathbf{x},-)\right). \quad (19)$$

Такое разложение единицы соответствует непрерывно распределенному в области Ω классическому прибору, который в каждой точке $\mathbf{x}$ в момент t может выдать результат в одном из двух каналов «+» или «−».

Хотя разложение единицы (19) в формальной записи выглядит нелокальным (содержит интегрирование по пространственным областям), сами исходы измерений являются локальными (срабатывание классического прибора — исход измерения — имеет место в некоторой пространственной точке). В данном случае пространством результатов является само координатное пространство, где происходят измерения, в отличие от ситуации, когда измерение описывается ортогональными проекторами (2)–(4) в $\mathcal{H}$ (которые также нелокальны в координатном пространстве, но только неявно, из-за нелокальности амплитуд состояний). В этом случае множеством результатов является $(0,1,\perp)$ (исходы в каналах $\mathcal{P}_{0,1,\perp}$), и невозможно сказать, в какой пространственной точке произошло срабатывание прибора.

Пусть требуется отличить одно из состояний, случайно предъявляемых для измерений с известными априорными вероятностями π_0 и π_1 ($\pi_0+\pi_1=1$). При измерении состояний исходы могут иметь место в доступной области или отсутствовать в ней (т. е. формально исход ? имеет место в недоступной области). Вероятность исхода в недоступной области $\overline{\Omega}$ имеет вид

$$\Pr\{\rho,\overline{\Omega}\} = \mathrm{Tr}\{\rho I_{\overline{\Omega}}\} = \pi_0\,\mathrm{Tr}\{\rho_0 I_{\overline{\Omega}}\} + \pi_1\,\mathrm{Tr}\{\rho_1 I_{\overline{\Omega}}\} = \\ = \pi_0 p_t + \pi_1 p_t = p_t, \quad (20)$$

где

$$p_t = \int\limits_{\overline{\Omega}} d\mathbf{x}\left|p(\mathbf{x},t)\right|^2, \quad (21)$$

$$p(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} f(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|t)}. \quad (22)$$

Заметим, что функция $p(\mathbf{x},t)$ по существу совпадает с волновой функцией Ландау–Пайерлса для фотона в координатном представлении [26].

Формула (20) описывает вероятность регистрации фотона, имеющего только компоненты со спиральностью «+» ($\pi_0 p_t$) и спиральностью «−» ($\pi_1 p_t$) в области $\overline{\Omega}$ в момент времени t.

Поэтому, если не было исхода в доступной области, наблюдатель должен с вероятностями

$$p_0 = \frac{\pi_0 p_t}{\pi_0 p_t + \pi_1 p_t} = \pi_0, \quad p_1 = \frac{\pi_1 p_t}{\pi_0 p_t + \pi_1 p_t} = \pi_1 \quad (23)$$

считать, что имел место исход в недоступной области от состояний, соответственно, $|\vec{\psi}_0\rangle$ и $|\vec{\psi}_1\rangle$.

Таким образом, если исход имел место в недоступной для наблюдателя области, то вероятность ошибки при различении состояний равна произведению вероятности ошибки на долю исходов в области $\overline{\Omega}$:

$$P_e(\overline{\Omega}) = (\pi_0 p_1 + \pi_1 p_0) p_t. \tag{24}$$

Если состояния предъявляются равновероятно ($\pi_0 = \pi_1 = 1/2$), то вероятность ошибки равна доле исходов в $\overline{\Omega}$. Суммарная вероятность всех возможных исходов во всем пространстве результатов $\Omega \bigcup \overline{\Omega}$ равна 1 в силу нормировки

$$\int d\mathbf{x} |p(\mathbf{x},t)|^2 = 1.$$

Найдем теперь измерение, при котором вероятность ошибки минимальна, а исход имеет место в доступной области Ω. В этом случае имеем

$$P_e(\Omega) = \pi_0 \operatorname{Tr}\{\rho_0 I_\Omega\} + \min_{E_0} \operatorname{Tr}\{\Gamma E_0\}. \tag{25}$$

В базисе двух ортогональных состояний спиральности «+» и «−» оператор Γ имеет вид

$$\Gamma = \pi_1\rho_1 - \pi_0\rho_0 = \\ = \begin{pmatrix} \pi_1|\vec{\psi}_1\rangle\langle|\vec{\psi}_1| & 0 \\ 0 & -\pi_0|\vec{\psi}_0\rangle\langle|\vec{\psi}_0| \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Минимизирующее измерение легко находится:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_\Omega \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} I_\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

При этом вероятность ошибки при различении состояний, если исход имел место в доступной области, с учетом (26), (27) равна

$$P_e(\Omega) = 0. \tag{28}$$

Полная вероятность ошибки равна с учетом (25), (28):

$$P_e(\Omega,\overline{\Omega}) = P_e(\Omega) + P_e(\overline{\Omega}) = \\ = 2\pi_0\pi_1 p_t = 2\pi_0\pi_1 \int\limits_{\overline{\Omega}} d\mathbf{x} \Big| p(\mathbf{x},t)\Big|^2 \tag{29}$$

и определяется долей исходов в недоступной области. Поскольку область Ω и, соответственно, ее дополнение до полного пространства $\overline{\Omega}$ заданы исходно, для минимизации ошибки требуется взять такое значение параметра времени t (момента времени, в который происходит измерение), чтобы доля исходов в недоступной области была минимальна. Такое условие интуитивно очевидно: вследствие эволюции амплитуды $f(\mathbf{x},t)$ в пространстве-времени нужно выбрать такой момент времени для измерения, когда интеграл от квадрата модуля $p(\mathbf{x},t)$ в доступной области имеет максимум (соответственно, минимум в недоступной).

Для того чтобы узнать, имел ли место исход в доступной области, наблюдателю необходимо просмотреть ее после момента времени t и выяснить, имело ли место срабатывание прибора в одной из точек Ω в одном из каналов для спиральностей, «+» или «−». Просмотр области Ω ведется за время T, которое определяется условием накрытия ее частью светового конуса, относящейся к прошлому. Это диктуется требованиями специальной теории относительности.

Отметим, что в некоторых работах, например [27], для вероятности регистрации фотона в пространственной области используется другая величина, которая описывает степень локализации энергии фотона, а также описывает другое измерение, отличное от (19). Действительно, эрмитов оператор энергии $\hat{E}$ может быть представлен через спектральное разложение в виде

$$\hat{E} = \sum_{s=\pm} |\mathbf{k}||\mathbf{k}s\rangle\langle s\mathbf{k}|d\mathbf{k} = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \times \\ \times \sum_{s=\pm} \left\{ \left(\int \sqrt{|\mathbf{k}|}|\mathbf{k}s\rangle \exp\left[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - |\mathbf{k}|t)\right] d\mathbf{k} \right) \times \\ \times \left(\int \sqrt{|\mathbf{k}'|}\langle \mathbf{k}'s| \exp\left[i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} - |\mathbf{k}'|t)\right] d\mathbf{k}' \right) \right\} = \\ = \int \sum_{s=\pm} \mathcal{M}_E(t, d\mathbf{x}). \tag{30}$$

Здесь $\mathcal{M}_E(t,d\mathbf{x})$ — измеряющий оператор для плотности энергии $E(\mathbf{x},t)$ (см. отличие от (19)). Среднее значение оператора энергии $\langle\hat{E}\rangle$ в произвольном однофотонном состоянии (здесь, в отличие от (8), для краткости удобнее не вводить векторные обозначения для состояния $|\psi\rangle$)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} f(\mathbf{k}s)|\mathbf{k}s\rangle \tag{31}$$

по определению имеет вид

$$\langle\hat{E}\rangle = \operatorname{Tr}\{\hat{E}|\psi\rangle\langle\psi|\} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{s=\pm} \int |f(\mathbf{k}s)|^2 d\mathbf{k}. \tag{32}$$

Энергия в окрестности точки $d\mathbf{x}$ в момент времени t по определению равна

$$E(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \sum_{s=\pm} \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}_E(t,d\mathbf{x})|\psi\rangle\langle\psi|\} = \\ = \left(\sum_{s=\pm} |f(\mathbf{x},t)|^2\right) \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3}, \quad (33)$$

где

$$f(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{k},s) \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - |\mathbf{k}|t)\right], \quad (34)$$

что совпадает с выражением, полученным в работе [27].

В поставленной задаче нас интересует не распределение плотности энергии в пространстве, а вероятность различения двух ортогональных однофотонных состояний (как целостных квантовых объектов) при ограниченном доступе к ним. Поэтому ответ выражается с помощью функции Ландау–Пайерлса [26], а не величины (34).

Подчеркнем еще раз, что измерение для различения состояний, которое описывается разложением единицы (19), и измерение, связанное с определением плотности энергии, являются физически различными измерениями (им отвечают различные физические устройства, реализующие данные измерения).

Физическая интерпретация функции Ландау–Пайерлса не является столь очевидной, как интерпретация функции (34), используемой в работе [27] для описания распределения плотности энергии. В работе [28] на примере безмассовой частицы было показано, что ковариантное измерение времени регистрации события (event time) выражается через функцию Ландау–Пайерлса. Интересно отметить, что измерение энергии, даваемое величиной (34), и измерение времени регистрации приводят к лоренц-инвариантному соотношению неопределенностей энергия-время для безмассовой частицы [28].

Таким образом, явно найдено измерение, минимизирующее вероятность ошибки различения ортогональных состояний при заданном размере доступной для измерения области (или, что то же самое, времени получения окончательного результата T). Эта минимально возможная вероятность ошибки зависит также и от структуры самих состояний.

Время T не следует понимать как длительность самого процесса измерения. В каждом конкретном эксперименте результат измерения возникает в некоторой случайной точке $\mathbf{x}$ области Ω (в момент времени t). Может оказаться, что в данном конкретном эксперименте исход будет иметь место прямо в точке нахождения наблюдателя в момент t, тогда время различения двух состояний $T_{min} = 0$. В другом эксперименте исход возникнет в другой точке, при этом наблюдателю потребуется уже некоторое конечное время, для того чтобы убедиться, что исход произошел в области Ω в одном из каналов для спиральности. Время T — это минимальное время, которое обеспечивает достоверное различение состояний при возникновении исхода измерения в любой точке области Ω.

Работа поддержана РФФИ (проект 02-02-16289), а также проектом «Квант».

ЛИТЕРАТУРА

1. J.von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ., Princeton (1955).
2. C. H. Bennett, Phys. Rev. Lett. **68**, 3121 (1992); C. H. Bennett, G. Brassard, and N. D. Mermin, Phys. Rev. Lett. **68**, 557 (1992).
3. C. W. Helstrom, Information and Control **10**, 254 (1967); *Quantum Detection and Estimation Theory*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 123, Academ. Press, New York, San Francisco, London (1976).
4. A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North Holland Publishing Corporation, Amsterdam (1982); *Lectures on Statistical Structure of Quantum Theory* (1999), p. 1.
5. C. A. Fuchs, E-print archives, xxx.lanl.gov/quant-ph/9601020.
6. L. D. Landau and R. Pierls, Zeits. für Phys. **69**, 56 (1931); Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, Наука, Москва (1969), т. 1, с. 56.
7. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, Москва (1987).
8. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, вып. 4, Физматгиз, Москва (1961).
9. N. Bohr and L. Rozenfeld, Math.-Fys. Medd. **12**, 3 (1933); Н. Бор, *Собрание научных трудов*, Наука, Москва (1971).

10. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, т. IV, Наука, Москва (1982).

11. K. Kraus, *States, Effects and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

12. P. Busch, M. Grabowski, and P. J. Lahti, *Operational Quantum Physics*, Springer Lecture Notes in Physics, Berlin (1995), Vol. 31.

13. G. Lüders, Ann. Physik **8**(6), 322 (1951).

14. M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79 (1984); **34**, 5596 (1993).

15. K.-E. Hellwig and K. Krauss, Phys. Rev. D **1**, 566 (1970).

16. Y. Aharonov and D. Z. Albert, Phys. Rev. D **21**, 3316 (1980); **24**, 359 (1981); **29**, 228 (1984).

17. G. C. Ghirardi, *Open Systems and Measurement in Relativistic Theory*, ed. by H. P. Breuer and F. Petruccione, Springer, Berlin (1999).

18. J. Finkelstein, Phys. Lett. A **278**, 19 (2000).

19. Д. А. Киржниц, УФН **90**, 129 (1966).

20. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ **47**, 1966 (1964).

21. A. M. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).

22. I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. Lett. **80**, 5247 (1998).

23. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1973).

24. E. Stuekelberg and D. Rivier, Helv. Phys. Acta **22**, 215 (1949).

25. M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **23**, 731 (1950).

26. L. D. Landau and R. Pierls, Zeits. für Phys. **62**, 188 (1930); Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, Наука, Москва (1969), т. 1, с. 33.

27. I. Bialynicki-Birula, *Photon Wave Function*, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, North Holland, Amsterdam (1996), Vol. XXXVI, c. 245.

28. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **74**, 477 (2001).