ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 5, стр. 1080–1097

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПЛАЗМЕННЫЕ ПОПРАВКИ К СКОРОСТЯМ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Н. Цытович*

Институт общей физики Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 октября 2001 г.

Получены кинетические уравнения для ядерных реакций в плотной плазме с учетом коллективных плазменных эффектов. Показано, что наряду с поправками, пропорциональными произведению зарядов Z_i и Z_j реагирующих зарядов ядер i и j, возникают новые, сравнимые по величине поправки, пропорциональные квадратам зарядов Z_i^2 и Z_j^2 ядер. Показано, что поправки Солпитера [1] к вероятностям ядерных реакций из-за плазменного экранирования поля реагирующих ядер, по крайней мере, в r/d раз меньше, чем те значения, которые ранее принимались (r — ядерный размер, d — радиус экранирования), и эти поправки равны нулю в нулевом приближении, когда пренебрегается эффектами порядка r/d. Поправки, пропорциональные Z_iZ_j, из-за корреляционных эффектов имеют другой физический смысл, чем в [1], могут иметь другой знак и возникают для тех реакций, для которых солпитеровские поправки равны нулю. Для корреляционных эффектов, заменяющих ранее используемые солпитеровские поправки, случай сильных корреляций затруднителен для аналитического описания. Интерполяционные формулы между слабым и сильным солпитеровским экранированием, ранее используемые во многих астрофизических приложениях, не могут быть использованы, так как интерполяционные формулы между слабыми и сильными корреляционными эффектами не могут быть сейчас получены. В работе найден новый тип поправок, пропорциональных квадрату зарядов реагирующих ядер и обусловленных изменением коллективной собственной электростатической энергии системы при протекании ядерных реакций. Проведен численный расчет плазменных поправок для реакций водородного цикла для температуры, плотности и состава, соответствующих недрам Солнца.

PACS: 52.25.Dg, 52.25.Gj, 52.25.Vy, 28.70.Ji, 26.65.+t

1. ВВЕДЕНИЕ

В широко известной работе Солпитера [1] было показано, что для дебаевски-экранированного кулоновского взаимодействия вероятность ядерных реакций в плотной плазме заметно выше, чем для не экранированного. Этот эффект получил название эффекта экранирования термоядерных реакций. Он широко использовался при описании моделей эволюции звезд [2] и ядерных реакций в недрах Солнца [3] (см. обзоры [4, 5]). Для реакций водородного цикла в недрах Солнца этот эффект дает вклад в скорости ядерных реакций от 5 до 20 %. Это достаточно много как для солнечных нейтрино, так и для скорости звуковых колебаний Солнца, хорошо детектируемых в настоящее время методами солнечной сейсмологии. Только спустя 35 лет в работе [6] было обращено внимание на то, что изменение вероятности ядерных реакций из-за статического экранирования (как рассматривалось в [1]) с физической точки зрения бессодержательно, так как реакции происходят при энергиях, намного превышающих средние тепловые энергии (при так называемых энергиях Гамова), когда статическое экранирование для плазменных частиц отсутствует (см., например, [7]). Для таких энергий экранирование становится динамическим, исчезая в пределе больших скоростей. Позже появилось много достаточно серьезных исследований с использованием сложной диаграммной техники в квантовой статистике [8, 9], показывающих, что поправки к скоростям ядерных реакций должны соответствовать именно статическому экранированию. Как будет показано в настоящей работе, в [8, 9] фактически рассчитывался эффект, отличный от рассмат-

*E-mail: tsytov@td.lpi.ac.ru

риваемого в [1], и хотя в расчетах [8, 9] нет ошибок, физическая интерпретация результатов [8, 9] не точна. Само же совпадение результатов, полученных в [8, 9], с результатом из [1] является, по-видимому, случайным и возникает только в нулевом приближении по малым параметрам, разным в [1] и в [8, 9]. В настоящей работе получены новые, ранее не учтенные поправки к скоростям ядерных реакций, которые пропорциональны квадратам зарядов реагирующих ядер.

Дискуссия о том, является ли экранирование динамическим или статическим, ведется до сих пор. Для ее разрешения нужно было отказаться от исходного предположения [1, 6] о том, что взаимодействие ядер определяется усредненным потенциалом. В [10–12] уравнения ядерной кинетики в плазме были выведены из первых принципов путем усреднения микроуравнений по плазменным флуктуациям. Только такой подход является последовательным для систем большого числа частиц. В подходе [1, 6] рассматриваются только две пробные реагирующие частицы, для которых без доказательства используется экранированный потенциал. Флуктуационный подход применительно к кулоновским столкновениям в плазме позволил строго доказать, что столкновения происходят между динамически экранированными частицами [7]. В работах [10–12] найдено возможное разрешение дилеммы динамического или статического экранирования ядерных реакций, а именно, было получено сокращение всех статических поправок. В данной работе развит и уточнен метод вывода кинетических уравнений для ядерных реакций в плазме, использованный в [10–12], а именно, учтено изменение флуктуаций в результате ядерных реакций. Указанная дилемма разрешена здесь по-другому. Показано, что эффект статического солпитеровского экранирования вообще отсутствует, что корреляционные эффекты в плазме в первом приближении по малому параметру, числу частиц в дебаевской сфере, приводят к результату, совпадающему с нулевым результатом статического экранирования. Существовавший парадокс разрешается, так как физическая интерпретация эффекта в корне меняется: корреляционные эффекты могут определяться статической диэлектрической проницаемостью (что в физике плазмы известно для ряда процессов, например для рассеяния волн [7]), тогда как экранирование — не может. Совпадение этих эффектов имеет место только в нулевом приближении и только для поправок, пропорциональных произведению зарядов $Z_i Z_j$ реагирующих ядер i и j. В следующих приближениях эффекты экранирования и эффекты корреляций дают совершенно различные результаты. В настоящей работе рассмотрены только эффекты слабых корреляций, которые соответствовали бы слабому экранированию при солпитеровском подходе.

Качественно новым результатом [10–12] является обнаружение коллективных поправок, пропорциональных квадрату зарядов ядер (Z_i^2 и Z_j^2), которые отсутствовали во всех предшествующих подходах. Эти поправки связаны не с корреляциями ядер при их взаимодействии, они специфичны для систем, в которых идут прямые термоядерные реакции, но невозможны обратные. Такие системы являются открытыми. Ядерные реакции в звездных недрах и на Солнце, в которых участвуют нейтрино, всегда являются именно такими, если нейтрино способны свободно покидать область, где происходят ядерные реакции. Учет этого эффекта в интеграле столкновений (которым пренебрегали в предшествующих исследованиях) приводит к дополнительным вкладам, зависящим от производных по времени и, тем самым, от скоростей ядерных реакций. Это приводит к перенормировке функций распределения реагирующих ядер и к поправкам, пропорциональным квадратам зарядов ядер. Как и эффекты корреляций, эти эффекты связаны с изменениями в распределениях ядер, но не с самими ядерными процессами, т. е. являются кинетическими коллективными эффектами. Известно, что перенормировка распределений частиц является стандартной операцией в любой кинетической теории [13, 14], и необходимость ее использования в кинетике ядерных реакций представляется очевидной.

В настоящей работе процессы временной эволюции в кинетике ядерных реакций в плазме исследуются в наиболее естественной для любых временных задач постановке. Предполагается, что до начального момента $t = 0$ ядерные реакции отсутствовали, и исследуется асимптотическое во времени поведение системы. Такая постановка задачи использовалась Ландау при исследовании затухания плазменных волн. Применительно к ядерным реакциям в плазме она позволяет найти квадратичные по зарядам поправки. В отличие от [10–12] здесь считается, что плазменные флуктуации модифицируются ядерными реакциями. Окончательные поправки зависят от всего цикла ядерных реакций и асимптотически отличаются от тех, которые получены в [10-12].

Таким образом, в настоящей работе получены результаты в приближении слабых плазменных поправок, пропорциональных как произведению зарядов реагирующих ядер, так и их квадратам.

Общие результаты используются в конкретном численном расчете плазменных поправок для ядерных реакций водородного цикла для параметров недр современного состояния Солнца.

2. ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ СОЛПИТЕРОВСКОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ

Напомним основные положения работы [1]. Потенциал взаимодействия ядер считается соответствующим дебаевски-экранированному кулоновскому потенциалу:

$$\phi(r) = \frac{Z_i Z_j e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{d}\right) \approx \frac{Z_i Z_j e^2}{r} - \frac{Z_i Z_j e^2}{d}, \quad (1)$$

где r — расстояние между двумя ядрами, много меньшее радиуса дебаевского экранирования d. Поправка к кулоновскому потенциалу — константа в энергии взаимодействия — может быть включена в энергию E_r относительного движения ядер, от которой только и зависит вероятность ядерной реакции

$$w_{ij} = w_{ij}\left(E_r + \frac{Z_i Z_j e^2}{d}\right) \approx \approx w_{ij}(E_r) + \frac{Z_i Z_j e^2}{d} \frac{\partial}{\partial E_r} w_{ij}(E_r). \quad (2)$$

Скорость термоядерной реакции получится интегрированием вероятности по максвелловскому распределению. Производная по относительной энергии при интегрировании по частям сведется к фактору $1/T$ в нулевом приближении по параметру

$$\frac{T}{E_r} \approx \frac{T}{E_G} \ll 1,$$

где E_G — энергия Гамова (такую малость имеет производная от фазового множителя по сравнению с производной от максвелловского распределения). Для скорости ядерной реакции R_{ij} имеем

$$R_{ij} = R_{ij}^{(0)}\left(1 + \Lambda_{ij}^{(S)}\right), \quad (3)$$

$$\Lambda_{ij}^{(S)} = \frac{Z_i Z_j e^2}{dT} = \frac{Z_i Z_j e^2}{2\pi^2 T} \int \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}, 0}\right) d\mathbf{k}, \quad (4)$$

где $R_{ij}^{(0)}$ — скорость реакций без плазменных поправок, $\epsilon_{\mathbf{k},0}$ — статическая диэлектрическая проницаемость ($\epsilon_{\mathbf{k},\omega}|_{\omega=0}$). Как отмечалось, ее присутствие в окончательном результате для процессов экранирования является с физической точки зрения мало приемлемым.

Ошибка в этом выводе достаточно завуалирована. Она связана с тем, что экранирующий поляризационный заряд представляет собой не фиксированный пространственный заряд около ядер. Он появляется за счет движения остальных частиц, создающих потенциалы и поля, которые для всей системы частиц являются флуктуационными. Ядерные реакции для конкретной пары ядер происходят в поле внешнего флуктуирующего потенциала ϕ, создаваемого всеми остальными ядрами. Усредненное значение этого потенциала не определяет скорости ядерных реакций, так как время усреднения много больше времени ядерного туннелирования. Введение флуктуационного потенциала ϕ в выражение для вероятности, последующее разложение по нему и усреднение по флуктуациям приводят к значению, пропорциональному квадрату флуктуирующего потенциала. Но такой расчет, формально дающий (4), также представляется неверным. Мы приведем его: для членов, пропорциональных $Z_i Z_j$, видоизменение усредненной вероятности $\delta\langle w_{ij}\rangle$ имеет вид

$$\delta\langle w_{ij}\rangle = Z_i Z_j e^2 \langle\phi^2\rangle \frac{\partial^2}{\partial E_r^2} w_{ij}(E_r), \quad (5)$$

флуктуационный потенциал ϕ определяется динамически-экранированными частицами, но стандартное выражение для флуктуационного потенциала совместно с флуктуационно-диссипативной теоремой и интегрированием по максвелловскому распределению снова приводят к выражению (4), содержащему статическую диэлектрическую проницаемость. Этот результат показывает, что при использовании стандартной теории плазменных флуктуаций ошибка делается где-то до процесса усреднения. Расчет, приводящий к (4), (5), использует то, что имеется естественный малый параметр, а именно, отношение ядерного размера, на котором происходит туннелирование, к характерному размеру флуктуаций. Этот малый параметр используется в дальнейшем.

Если ввести координату центра масс реагирующих ядер, $\mathbf{R}$, относительную координату ядер $\mathbf{r}$ и координаты каждого из ядер $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ и учесть, что при ядерной реакции координаты двух ядер почти совпадают, $r \ll R$, то можно для дополнительной энергии использовать разложение

$$eZ_i\phi(\mathbf{r}_i) + eZ_j\phi(\mathbf{r}_j) \approx \approx e(Z_i + Z_j)\phi(\mathbf{R}) + e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}\frac{m_j Z_i - m_i Z_j}{m_i + m_j}. \quad (6)$$

Первый член в последнем выражении представляет собой константу для ядерных реакций, но он «зависит» от координаты центра масс. Следовательно, при пренебрежении вкладом второго члена (6) при разделении переменных, он вносит вклад в волновую функцию центра масс, приводит к появлению фазового множителя в волновой функции центра масс системы реагирующих ядер и не приводит к какому-либо изменению вероятности ядерной реакции. Второй член (6), зависящий от относительных координат и электрического поля, мал по параметру отношения ядерного размера к характерному размеру флуктуаций. Таким образом, постоянное смещение по энергии возникает не в относительном движении, а в трансляционном, и солпитеровский эффект экранирования ядерных реакций в действительности отсутствует. Результат (5) получится, если ошибочно рассматривать первый член (6) как возмущение относительного движения ядер. Этот результат становится очевидным, если усреднение проводится после ядерной реакции и не используется усредненный потенциал. Это, в свою очередь, требует, чтобы характерное время туннелирования было много меньше характерного времени флуктуаций (определяющего временной масштаб усреднения). Последнее выполняется с хорошей точностью, если, как обычно, в качестве временного масштаба флуктуаций принять величину, обратную плазменной частоте. Основным здесь является установленный в физике плазмы факт, что экранирование создается при флуктуациях, а он не учитывался в подходах [1, 6].

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

Корреляционные эффекты описывают корреляцию состояний двух реагирующих ядер. Если ядра более часто находятся вблизи друг друга, то число реакций в среднем увеличивается. Этот эффект отличается от обсужденного в [1, 6], где рассматривалось изменение скоростей самих реакций. Для описания корреляционных эффектов важна кинетика флуктуаций в системе реагирующих ядер. Используем для этих целей микроуравнения, как в [10–12], но в более точной форме. Это уточнение необходимо при построении более подробной теории корреляций, которая здесь не излагается, а приводится только ее окончательный результат, совпадающий в нулевом приближении с полученным в [10–12]. Поэтому указанные уточнения используются только для гарантированного обоснования корреляционных поправок, найденных в [10–12]. Исходным при развитии уточненной теории корреляций служит уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}f_i+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}f_i+Z_ie\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}f_i=-\int w_{ij}f_{ij}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (7)$$

где f_i — одночастичная, а f_{ij} — двухчастичная функции распределения. Первая получается интегрированием полного распределения по переменным всех частиц за исключением частицы i, а вторая — за исключением частиц i и j. В [10, 12] использовалось приближение $f_{ij}\approx f_if_j$. Уравнение (7) является более точным, чем использованное в [10, 12]. Его исследование связано с анализом уравнения для f_{ij}, которое можно получить путем интегрирования по всем переменным за исключением i и j, а не по всем переменным за исключением переменных частицы i, как при получении (7). Оно позволяет более подробно исследовать корреляционные эффекты. Такой подход является более детальным, чем проведенный в [10, 12], хотя и намного более громоздким. Корреляционные эффекты содержатся уже в подходе [10, 12], так как среднее значение от произведения двух одночастичных функций распределения не равно произведению усредненных распределений. Мы приведем только результат довольно пространного исследования проблемы корреляций при помощи уравнения (7): он состоит в том, что в первом неисчезающем приближении поправки на корреляционные эффекты совпадают с теми, которые получены в [10, 12] в предположении $f_{ij}\approx f_if_j$. В следующих приближениях аппроксимация, описанная в [10, 12], невозможна. Напомним, что для получения соответствующих поправок вводим распределения, усредненные по флуктуациям

$$f_i=\Phi_i+\delta f_i, \quad \langle f_i\rangle=\Phi_i. \quad (8)$$

Усредняя уравнение (7) и учитывая, что вероятность не зависит в первом приближении от флуктуирующего потенциала (в [10, 12] такая зависимость учитывалась), получим в правой части

$$\langle f_if_j\rangle=\Phi_i\Phi_j+\langle\delta f_i\delta f_j\rangle. \quad (9)$$

Второй член (9), как показали описанные выше исследования, правильно описывает корреляции в первом неисчезающем приближении. Для их явного расчета можно воспользоваться малостью скорости реакций по сравнению с частотой флуктуаций. Далее можно использовать стандартные выражения для флуктуаций функции распределений в плазме в отсутствие ядерных реакций. Хотя общие выражения могут быть записаны для любых неравновесных распределений ядер, мы приведем результат для равновесных тепловых распределений, когда можно воспользоваться флуктуационно-диссипативной теоремой для интегрирования флуктуаций по частотам. В этом пределе поправки выражаются через статическую диэлектрическую проницаемость:

$$\langle \delta f_i \delta f_j \rangle = \frac{Z_i Z_j e^2}{2\pi^2 T} \Phi_i \Phi_j \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},0}}\right). \quad (10)$$

Здесь учтено, что кулоновское поле двух реагирующих ядер не должно учитываться во флуктуирующем потенциале, создаваемом всеми остальными частицами плазмы. Сам эффект корреляций не имеет отношения к возможному изменению вероятности ядерных процессов между двумя реагирующими ядрами: просто из-за корреляций число реагирующих ядер в среднем оказывается большим. В [10, 12] помимо корреляций учитывалось еще изменение вероятности — эффект, который в [10, 12] интерферировал с эффектом корреляций. В настоящей работе обнаружено, что изменение вероятности отсутствует, поэтому рассматриваются только поправки, связанные с корреляциями. Пропорциональность поправок произведению усредненных функций распределения позволяет ввести некие эффективные вероятности ядерных реакций, которые приводят к тому же результату в уравнениях для ядерных реакций в плазме, что и учет корреляций:

$$w_{ij}^{eff} = w_{ij} \left[1 + \frac{Z_i Z_j e^2}{2\pi^2 T} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{bfk,0}}\right)\right] = = w_{ij}(1 + \Lambda_{ij}^{(C)}). \quad (11)$$

Формальное совпадение поправок $\Lambda_{ij}^{(C)}$ в (11) с солпитеровскими поправками (4), $\Lambda_{ij}^{(S)}$, не должно вводить в заблуждение, так как поправки в (11) имеют иной физический смысл. Один пример показывает, что имеется и фактическое различие. В реакции ядер Be с электронами ядерный барьер отсутствует и солпитеровские поправки равны нулю, тогда как корреляционные эффекты не равны нулю и описываются (11).

Отметим, что расчет [8, 9] проводился путем статистического усреднения невозмущенной вероятности по распределениям электронов и ионов и поэтому соответствует именно учету корреляций. Таким образом, полученный здесь результат согласуется также с результатом [8, 9].

4. ФЛУКТУАЦИИ В СИСТЕМЕ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ВО ВРЕМЕНИ

Из-за отсутствия обратных процессов с поглощением нейтрино система является открытой и эволюционирующей во времени. Плазменные флуктуации не являются стационарными (как обычно в отсутствие ядерных реакций), причем скорость их изменения во времени определяется ядерными реакциями. Хотя эта скорость мала по сравнению с характерной частотой флуктуаций, при расчете всех эффектов, линейных по скорости ядерных реакций, нужно учитывать эффекты, связанные с эволюцией во времени плазменных флуктуаций. Ранее этими эффектами пренебрегали. Эффекты, связанные с наличием коллективного электрического поля, приводят к плазменным поправкам. Поэтому рассмотрим сначала те эффекты, для которых электрическое поле несущественно. Так как полные поправки рассматриваются как слабые, будем учитывать эффекты, связанные с наличием коллективных полей по теории возмущений, нулевому приближению которой будет соответствовать отсутствие коллективных полей. Обозначим нулевое приближение индексом $^{(0)}$. Тогда исходное уравнение для линейных флуктуаций будет иметь вид

$$\frac{\partial \delta f_i^{(0)}(\mathbf{p})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_i^{(0)}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}} = -\int w_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \times (\delta f_i^{(0)}(\mathbf{p}) \Phi_j(\mathbf{p}') + \delta f_j^{(0)}(\mathbf{p}') \Phi_i(\mathbf{p})) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \quad (12)$$

Напишем аналогичное уравнение для $f_j^{(0)}(\mathbf{p}')$:

$$\frac{\partial \delta f_j^{(0)}(\mathbf{p}')}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_j^{(0)}(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{r}} = -\int w_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \times (\delta f_i^{(0)}(\mathbf{p}) \Phi_j(\mathbf{p}') + \delta f_j^{(0)}(\mathbf{p}') \Phi_i(\mathbf{p})) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (13)$$

Записав эту систему уравнений для компонент Фурье,

$$\delta f_{i,j} = \int \delta f_{i,j,\mathbf{k},\omega} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) d\mathbf{k} d\omega,$$

можно получить уравнение, содержащее только флуктуации функции распределения одного из ядер:

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\nu_i(\mathbf{v}) \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)}(\mathbf{v}) = = -\Phi_i(\mathbf{v}) \int \frac{w_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') w_{ij}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}')}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' + i\nu_j(\mathbf{v}')} \times \times \Phi_j(\mathbf{v}') \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)}(\mathbf{v}'') \frac{d\mathbf{p}' d\mathbf{p}''}{(2\pi)^6}, \quad (14)$$

где величины

$$\nu_i(\mathbf{p}) = \int w_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Phi_j(\mathbf{p}')\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3},$$
$$\nu_j(\mathbf{p}') = \int w_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\Phi_i(\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \qquad (15)$$

описывают затухание флуктуаций из-за ядерных реакций. Правая часть в (14) описывает корреляцию флуктуаций из-за ядерных реакций и их дополнительное затухание. Легко оценить корреляцию, учтя, что характерная частота флуктуаций $kv_{Ti} \approx \omega_{pi}$ для k имеет порядок обратного дебаевского радиуса $1/d$, где ω_{pi} — плазменная частота ионов i. Правая часть (14) имеет порядок ν_i^2/ω_{pi}, т. е. меньше затухания, входящего в левую часть (14), в ν_i/ω_{pi} раз и с хорошей точностью может не учитываться. Для пространственных компонент флуктуаций функции распределения

$$\delta f_i^{(0)}(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = \int \delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{v},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{k}$$

запишем соответствующее уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + \nu_i(\mathbf{v})\right)\delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{v},t) = 0. \qquad (16)$$

Здесь мы ставим временную задачу с начальными значениями для системы в момент $t = 0$. Такая постановка необходима в открытой системе, которая не может прийти в полное равновесие из-за отсутствия обратных процессов с нейтрино. Будем считать, что ядерные реакции включаются в момент $t = 0$ и рассмотрим их темп асимптотически при больших временах. Таким образом, считаем, что при $t < 0$ величина $\nu_i = 0$. Эта постановка близка к реальной ситуации в звездах, где ядерное горение начинается на определенной стадии сжатия протозвездного облака. Теперь при $t < 0$ решение (16) имеет вид

$$\delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p},t) = \delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t), \qquad (17)$$

тогда как при $t > 0$:

$$\delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p},t) = \delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}t - i\nu_i(\mathbf{v})t). \qquad (18)$$

Далее ограничимся пространственно-однородной задачей. Тогда средние значения $\delta f_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ должны быть теми же, что и для задачи, стационарной в среднем:

$$\langle \delta f_{i,\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p})\delta f_{j,\mathbf{k}'}^{(0)}(\mathbf{p}')\rangle = \Phi_i(\mathbf{p})\delta_{i,j}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \quad (19)$$

Это приводит к следующему интересующему нас закону для усреднения временных флуктуаций при наличии ядерных реакций:

$$\begin{aligned}\langle \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)}(\mathbf{p})\delta f_{j,\mathbf{k}',\omega'}^{(0)}(\mathbf{p}')\rangle &= \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\Phi_i(\mathbf{p})\delta_{i,j}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') &\times \\ \times \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - i0} - \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i\nu_i(\mathbf{v})}\right] &\times \\ \times \left[\frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}' - i0} - \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}' + i\nu_j(\mathbf{v}')}\right]. &\qquad (20)\end{aligned}$$

В пределе $\nu_{i,j} \to 0$ результат (20) совпадает с хорошо известным законом усреднения для стационарной системы (мы обозначим соответствующие распределения верхним индексом $^{(0,0)}$):

$$\begin{aligned}\langle \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0,0)}(\mathbf{p})\delta f_{j,\mathbf{k}',\omega'}^{(0,0)}(\mathbf{p}')\rangle = \Phi_i(\mathbf{p})\delta_{i,j}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') &\times \\ \times\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega')\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). &\qquad (21)\end{aligned}$$

При помощи (20) следует найти изменение во времени усредненной по флуктуациям функции распределения ядер, что даст изменение скоростей ядерных реакций из-за коллективных плазменных эффектов. Помимо изменения флуктуаций во времени существенное значение имеет эволюция усредненной функции распределения ядер.

5. ВЛИЯНИЕ ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩИХ ВО ВРЕМЕНИ ФЛУКТУАЦИЙ НА СКОРОСТИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Для расчета коллективных поправок к скоростям ядерных реакций исходным является уравнение, получаемое при усреднении (7) по плазменным флуктуациям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = Z_i e\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\langle \delta f_i \nabla\phi\rangle &- \\ - \int w_{ij}(\Phi_i\Phi_j + \langle \delta f_i \delta f_j\rangle)\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. &\qquad (22)\end{aligned}$$

Как и при расчете флуктуаций, мы считаем усредненное распределение однородным, но зависящим от времени — эта зависимость обусловлена ядерными реакциями, плазменные поправки к которым и исследуются. При отсутствии такой зависимости первый член правой части (22), как известно, приводит к интегралу столкновений, который быстро (за характерное время столкновений) обращается в нуль, делая распределения частиц тепловыми. Но при наличии временных изменений (которые в данном случае пропорциональны скоростям ядерных реакций) он дает дополнительный не равный нулю вклад, пропорциональный темпу изменения флуктуаций и темпу временной эволюции усредненного распределения ядер. Нашей задачей является учет в этом члене только эффектов первого порядка по скоростям ядерных реакций, т. е. линейных по производным от усредненного распределения и линейным по w_{ij}. Последний член правой части (22) содержит поправки, обусловленные корреляциями. Поскольку эффекты временной эволюции и эффекты корреляций в рассматриваемом приближении, линейном по w_{ij}, складываются аддитивно, мы будем в этом разделе пренебрегать корреляционными эффектами. Наконец, если пренебречь поправками, обязанными временной эволюции флуктуаций, то уравнение (22) сведется к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i^{(0)} = -\Phi_i^{(0)}\int w_{ij}\Phi_i'\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} = -\nu_i\Phi_i^{(0)}. \quad (23)$$

Причем в этом уравнении частоту ν_i следует считать постоянной, так как учет ее зависимости от времени означал бы учет поправок более высокого порядка по w_{ij}. Для флуктуаций вместо уравнения (16) имеем

$$-i(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\nu_i)\delta f_{i,\mathbf{k},\omega} = Z_i e\left(\nabla\delta\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_i\right)_{\mathbf{k},\omega}, \quad (24)$$

где ϕ — потенциал флуктуационного электрического поля. Решение последнего уравнения имеет вид

$$\delta f_{i,\mathbf{k},\omega} = \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)} - \frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\nu_i}\times \times\int\phi_{\mathbf{k},\omega-\omega'}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_{i,\omega'}\right)d\omega', \quad (25)$$

где $\delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)}$ — решение однородного уравнения (24), описывающее обсуждавшиеся в предыдущем разделе флуктуации в системе, эволюционирующей во времени. Поскольку усредненная функция распределения меняется во времени намного медленнее, чем плазменные флуктуации $\omega' \ll \omega$, можно записать разложения по ω', а также по ν_i:

$$\begin{gathered}\phi_{\mathbf{k},\omega-\omega'} \approx \phi_{\mathbf{k},\omega} - \omega'\frac{\partial}{\partial\omega}\phi_{\mathbf{k},\omega},\\ \int\omega'\Phi_{i,\omega'}d\omega' \approx i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i.\end{gathered} \quad (26)$$

Воспользовавшись (23), получаем

$$\delta f_{i,\mathbf{k},\omega} = \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)} - \left(1 - i\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\times \times\frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\phi_{\mathbf{k},\omega}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_i\right). \quad (27)$$

С помощью уравнения Пуассона найдем выражение для флуктуационного потенциала, в котором члены с производной по времени рассматриваются по теории возмущений:

$$\begin{gathered}\phi_{\mathbf{k},\omega} \approx \phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)} + \phi_{\mathbf{k},\omega}^{(1)} + \ldots,\\ \phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)} = \frac{4\pi}{k^2\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0))}}\sum_\alpha Z_\alpha e\int\delta f_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},\end{gathered} \quad (28)$$

$$\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(1)} = \frac{i}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\right), \quad (29)$$

$$\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)} = 1 + \frac{4\pi}{k^2}\sum_\alpha Z_\alpha^2 e^2\int\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\times \times\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_\alpha\right)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (30)$$

Здесь суммирование по α распространяется на все виды частиц плазмы: электроны и все ионы, в том числе реагирующие ядра. Имеем

$$\delta f_{i,\mathbf{k},\omega} = \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)} - - \frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_i\right) + \delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(1)}, \quad (31)$$

$$\delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(1)} = i\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_i\right) - - \frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(1)}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi_i\right). \quad (32)$$

Эффекты, связанные с временной эволюцией системы, описываются уравнением для усредненного по флуктуациям распределения. Пренебрегая корреляциями, из (22) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i &= Z_i e\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int i\mathbf{k}'\langle\delta f_{i,\mathbf{k},\omega}\phi_{\mathbf{k}',\omega'}\rangle\times\\ &\times\exp\left[i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r} - i(\omega+\omega')t\right]d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega' -\\ &- \int w_{ij}\Phi_i\Phi_j\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} =\\ &= I_i^{(0)} + I_i^{(t)} - \int w_{ij}\Phi_i\Phi_j\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3},\end{aligned} \quad (33)$$

где $I_i^{(0)}$ определяется эволюционирующими во времени флуктуациями $\delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)}$,

$$\begin{aligned}I_i^{(0)} &= -Z_i e\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int i\mathbf{k}\left\langle\left[\delta f_{i,\mathbf{k},\omega}^{(0)} -\right.\right.\\ &\left.\left.- \frac{Z_i e}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\Phi_i}{\partial\mathbf{p}}\right)\phi_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}\right]\phi_{\mathbf{k}',\omega'}^{(0)}\right\rangle\times\\ &\times\exp\left[-i(\omega+\omega')t\right]d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'d\omega\,d\omega',\end{aligned} \quad (34)$$

а $I_i^{(t)}$ определяется изменением во времени усредненного распределения реагирующих ядер:

$$I_i^{(t)} = Z_i e \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \int \mathbf{k} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} - \right.\right.$$

$$- \left[\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'}} \frac{\partial}{\partial \omega'} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'} + \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} \right] \Bigg\} \times$$

$$\times \frac{Z_i e}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{p}} \right) \langle \phi^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} \phi^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle +$$

$$\left. + \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'}} \frac{\partial}{\partial \omega'} \frac{\partial \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'}}{\partial t} \langle \delta f^{(0)}_{i,\mathbf{k},\omega} \phi^{(0)}_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle \right\} \times$$

$$\times \exp\left[-(\omega + \omega')t \right] d\omega\, d\omega'. \quad (35)$$

Здесь учтено, что согласно (20) (однородности флуктуаций), $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. Если в (34) нужно учитывать временную эволюцию флуктуаций, то в выражениях (35), уже содержащих производную по времени от усредненного распределения, достаточно воспользоваться приближенным соотношением (21). В последнем случае соответствующие корреляционные функции обозначаем индексом $^{(0,0)}$, так же как и функции распределения в (21). Получаем из (21)

$$\int \langle \phi^{(0,0)}_{\mathbf{k}',\omega'} \phi^{(0,0)}_{\mathbf{k},\omega} \rangle d\mathbf{k}' =$$

$$= -\frac{T}{2\pi^3 k^2 \omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \right) \delta(\omega + \omega'), \quad (36)$$

$$\int \langle f^{(0,0)}_{i,\mathbf{k}',\omega'} \phi^{(0,0)}_{\mathbf{k},\omega} \rangle d\mathbf{k}' =$$

$$= \frac{Z_i e}{2\pi^2 k^2 \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \Phi_i \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \delta(\omega + \omega'). \quad (37)$$

Здесь предполагается, что усредненная функция распределения в членах (35) может с достаточным приближением считаться тепловой (максвелловской). Малые отличия распределений от максвелловских необходимо учитывать только в членах, не содержащих малые производные по времени от усредненных распределений (см. ниже). Заменяя корреляционные функции (35) на их приближенные значения (36), (37), увидим, что первый член из (35), содержащий полную производную по частоте, при интегрировании по частотам обращается в нуль, а также получим

$$I_i^{(t)} = -\frac{Z_i^2 e^2}{2\pi^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \Phi_i d\omega d\mathbf{k} \times$$

$$\times \left\{ -\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \frac{\partial \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t} \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} + \right.$$

$$+ \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\partial \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \right) \right] + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \right) \frac{\partial \epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}} \right\} \right\}. \quad (38)$$

Для расчета изменения скорости реакций из-за временной эволюции флуктуаций, описываемой соотношением (30), следует учесть, что такие эффекты нужно учитывать в первом неисчезающем порядке по скоростям реакций. В этом пределе из (20) получим соотношение (ср. с (27), (28))

$$\int \langle \delta f^{(0)}_{i,\mathbf{k},\omega}(\mathbf{p}) \delta f^{(0)}_{j,\mathbf{k}',\omega'}(\mathbf{p}') \rangle e^{-(\omega+\omega')t} d\mathbf{k}' d\mathbf{p}' =$$

$$= \delta_{i,j} \left[\Phi_i - \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \omega'} \right) \right] \times$$

$$\times \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). \quad (39)$$

Первый член правой части (39) приводит к обычному интегралу кулоновских столкновений частиц, который обращает распределения частиц в тепловые за очень короткие промежутки времени. Для теплового распределения первый член (39) строго обращается в нуль. В дальнейшем мы учтем перенормировочные поправки, для которых первый член (39) будет порядка $1/N_d \ll 1$ и которым тоже можно будет пренебречь. В поправках, пропорциональных производной по времени от усредненного распределения, можно считать усредненное распределение тепловым. Получаем

$$I_i^{(0)} = -\frac{Z_i^2 e^2}{4\pi^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} d\mathbf{k} d\omega \times$$

$$\times \left\{ \pi \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} + \right.$$

$$+ \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\Phi_i}{(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega \epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im} \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im} \epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}} \right] \right\}. \quad (40)$$

В этом выражении возможны определенные упрощения. Первый член в квадратных скобках может быть проинтегрирован по частотам по частям. Возникающая комбинация при учете второго члена в квадратных скобках, но без учета производной по частоте от $1/(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)$,

$$-\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} + \frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{-\mathbf{k},-\omega}}, \qquad (41)$$

не изменяется при замене $\omega \to -\omega$, $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$. Остальные множители

$$\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega(\partial/\partial t)\,\mathrm{Im}\,\epsilon_{\mathbf{k},\omega}}$$

тоже не меняются при такой замене. Поэтому в выражении остается только не меняющийся при такой замене член $1/(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0)$, т. е. $-i\pi\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$. Это означает, что в выражении (41) остается только мнимая часть. В оставшейся производной по частоте от $1/(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)$ можно вновь провести интегрирование по частям. В результате имеем

$$I_i^{(0)} = -\frac{Z_i^2 e^2}{4\pi^3}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int\frac{\mathbf{k}}{k^2}d\mathbf{k}d\omega\,\times$$
$$\times\left\{\pi\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\,\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}\times\right.\right.$$
$$\times 2\left[\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\right]\right] +$$
$$\left. + \frac{\omega\Phi_i}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{\omega|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\,\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}\right)\right\}. \qquad (42)$$

Аналогично можно упростить первый член в квадратных скобках в (38): интегрируя по частотам по частям, получаем

$$I_i^{(t)} = -\frac{Z_i^2 e^2}{2\pi^3}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int\frac{\mathbf{k}}{k^2}\Phi_i d\omega d\mathbf{k}\,\times$$
$$\times\left\{\pi\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\left[\frac{1}{|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t}\frac{\partial\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial\omega} - \right.\right.$$
$$- 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}\omega}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\,\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k}\omega}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\,\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}\right]\right] +$$
$$+ \frac{\omega}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\,\times$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}\right]\right\}. \qquad (43)$$

Сумма (42) и (43) допускает дальнейшие упрощения. Выделив члены, содержащие $\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$, запишем $I_i = I_i^{(t)} + I_i^{(0)}$ в виде

$$I_i = \frac{Z_i^2 e^2}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int\frac{\mathbf{k}}{k^2}d\omega d\mathbf{k}\,\times$$
$$\times\left\{\frac{\Phi_i}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\right)\times\right.\right.$$
$$\times\,\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right) +$$
$$\left. + \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\right)\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\right] -$$
$$- \delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\Phi_i}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}|^2}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\,\epsilon_{\mathbf{k},\omega}\right]\right\}. \qquad (44)$$

При получении этих соотношений использовались равенства

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2}, \qquad (45)$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2}\frac{\partial\,\mathrm{Re}(\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega})}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}\right). \qquad (46)$$

Выражение в первых квадратных скобках (44) может быть преобразовано к виду

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\right) -$$
$$- \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\omega}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}}\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i0}\right). \qquad (47)$$

Первый член (47) при интегрировании по частотам дает нулевой вклад. Для того чтобы убедиться в этом, нужно вынести знаки мнимой части и интегрирования по времени за знак интегрирования по частотам и учесть, что производная по частоте от $1/(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + i0)$ не имеет полюсов в верхней части комплексного ω, также как и $1/\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}$ (последняя в силу аналитических свойств диэлектрической проницаемости). Второй член (47) преобразуется к выражению, также не имеющему полюсов в верхней полуплоскости комплексного ω, путем добавления и вычитания соответствующего выражения с

$\mathrm{Im}(1/\omega+i0)=-\pi\delta(\omega)$. Таким образом, первая квадратная скобка (44) преобразуется к виду

$$\int d\omega\pi\delta(\omega)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\epsilon_{\mathbf{k},0}} = \\ = \int d\omega\frac{\pi}{\omega\epsilon_{\mathbf{k},0}}\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). \quad (48)$$

Соотношение (48) используется только для того, чтобы окончательный результат записать в компактной форме, содержащей только $\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$. Итак,

$$I_i = -\frac{Z_i^2e^2}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\cdot\int\frac{\mathbf{k}}{k^2}d\omega d\mathbf{k}\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\times \\ \times\left\{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}}-\frac{\Phi_i}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},0}}+\right. \\ \left.+\frac{\Phi_i}{|\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega}|^2}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}(\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega})\right\}. \quad (49)$$

6. ПЕРЕНОРМИРОВКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

Так же, как корреляционные эффекты, эффекты временной эволюции флуктуаций могут быть сведены к эффективному изменению вероятности ядерных реакций. Заметим, что соответствующее уравнение (33), учитывающее эффекты временной эволюции в пренебрежении корреляциями, по форме отличается от уравнения, которое обычно используется при описании ядерных реакций без учета плазменных эффектов. А именно, при учете плазменных эффектов уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = I_i^{(0)}+I_i^{(t)}-\int w_{ij}\Phi_i\Phi_j\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (50)$$

тогда как уравнение без учета плазменных эффектов имеет вид

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = -\int w_{ij}\Phi_i\Phi_j\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \quad (51)$$

Здесь стоит напомнить, что мы ограничиваемся только первыми плазменными поправками. С такой точностью уравнение (50) можно свести к стандартно используемой форме путем перенормировки функции распределения частиц. Рассмотрим задачу приведения уравнения (50) к форме (51) путем перенормировки распределения частиц и введения эффективной вероятности. Введем перенормированную функцию распределения $\Phi_i^{(R)}$ как решение уравнения

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}-I_i^{(0)}-I_i^{(t)} = \frac{\partial\Phi_i^R}{\partial t}. \quad (52)$$

Положим, что решение (52) имеет вид

$$\Phi_i = (1+\Lambda^R_{i,\mathbf{p}})\Phi_i^{(R)}. \quad (53)$$

Учитывая, что поправки малы и что перенормируются обе функции распределения реагирующих ядер, получим окончательно с учетом корреляционных эффектов уравнение в стандартно используемой форме

$$\frac{\partial\Phi_i^{(R)}}{\partial t} = -\int w_{ij}^{eff}\Phi_i^{(R)}\Phi_j^{(R)}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (54)$$

где

$$w_{ij}^{eff} = w_{ij}(1+\Lambda^{(S)}_{ij}+\Lambda^{(R)}_{i,\mathbf{p}}+\Lambda^{(R)}_{j,\mathbf{p}'}). \quad (55)$$

При решении уравнения для Φ_i^R нужно иметь ввиду, что перераспределение частиц по импульсам происходит намного быстрее ядерных реакций. Поэтому от времени зависит только концентрация частиц, и функция распределения представляет собой произведение концентрации, зависящей от времени, и функции импульсов. Производная по времени от диэлектрической проницаемости, входящая в I_i, определяется всеми реагирующими ядрами и темпами изменения во времени их функций распределения, т. е. производными по времени от их концентраций. Зависимость от импульсного фактора в распределении частиц та же, что и в случае обычной проницаемости.

Далее будем рассматривать ядерный цикл (в приложениях к Солнцу — водородный цикл) и будем интересоваться асимптотическим во времени поведением системы, когда темпы всех реакций уже установились и определяются темпом наиболее медленной реакции цикла. К моменту выравнивания темпов устанавливается и перенормированное распределение, которое, как будет видно из дальнейшего, описывает коллективный сдвиг энергии в распределении каждого типа ядер. Поскольку темпы всех реакций в асимптотике совпадают, в уравнении (50) относительные производные по времени равны, это легко позволяет определить коэффициент перенормировки. При этом надо иметь ввиду, что рассматриваются малые поправки и в перенормировочном члене можно не делать различия между перенормированной и неперенормированной функциями распределения. Получаемое таким путем выражение для $\Lambda_i^{(R)}$

имеет вид

$$\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)} = -\frac{Z_i^2 e^2}{4\pi^2} \int \frac{\mathbf{k} d\mathbf{k} d\omega}{k^2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\mathbf{v}}{T} \right) \times \\ \times \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \,\mathrm{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial\omega} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}} + \frac{1}{\omega(\epsilon_{\mathbf{k},0}^{(0)})^2} (\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},0} - 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}|^2} \omega \frac{\partial}{\partial\omega} \frac{1}{\omega} \left(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega}^{(0)} - 1 \right) \right\}, \quad (56)$$

где

$$\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \frac{4\pi}{k^2} \times \\ \times \sum_{\tilde{j}} \int \frac{Z_{\tilde{j}}^2 e^2}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}' + i0} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \Phi_{\tilde{j}}}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \quad (57)$$

Здесь суммирование проводится только по тем ядрам $\tilde{j}$, которые входят в рассматриваемый цикл ядерных реакций, а также по электронам, если электроны участвуют в ядерных реакциях (как это имеет место для водородного цикла).

Следует подчеркнуть, что вероятность w_{ij} зависит только от относительной энергии ядер E_r и в пределе $E_r \gg T$ имеет резкий максимум вблизи энергии Гамова E^G. А эффективная вероятность (55) зависит также от значений импульсов каждой из реагирующих частиц, т. е. от значений скоростей частиц относительно среды (плазмы), что является довольно естественным для коллективных процессов.

7. ИЗМЕНЕНИЕ КОЛЛЕКТИВНОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЯДЕР И СДВИГ ПО ЭНЕРГИИ

Отдельное ядро i в плазме окружено поляризационным экранирующим зарядом и имеет дополнительную собственную энергию $E_i^{(s)}$, которая может быть вычислена только в недиссипативной среде, в том случае, если можно пренебречь мнимой частью диэлектрической проницаемости. Это не соответствует рассматриваемой задаче, так как диссипативные процессы играют значительную роль. Однако в асимптотически установившемся со временем состоянии оказывается возможным найти скорость изменения во времени электростатической энергии всей системы в расчете на отдельное ядро, пропорциональной квадрату заряда ядра и играющей роль эффективной собственной энергии реагирующих ядер. В большой системе поляризационные заряды вокруг отдельных ядер создаются коллективными флуктуациями остальных ядер. При наличии в системе взаимодействующих и реагирующих ядер, когда диссипативные процессы, связанные с ними, не позволяют однозначно ввести собственную электростатическую энергию ядер, изменение полной электростатической энергии системы не может совпадать с суммой собственных энергий отдельных ядер. Но после выравнивания скоростей всех реагирующих компонент поправки, описываемые перенормировкой, сводятся к сдвигу по энергии в их распределении и в этом смысле выступают как некая эффективная собственная энергия. До выравнивания скоростей такая интерпретация невозможна, а возникающие поправки математически не могут быть представлены как некий эффективный сдвиг по энергии отдельных ядер. Получаемая эффективная собственная энергия не совпадает с суммой собственных электростатических энергий отдельных частиц в недиссипативных системах. Эффективная собственная электростатическая энергия отдельного ядра, естественно, зависит от его скорости относительно среды (плазмы). Поправки, вносимые перенормировкой распределения частиц на одно ядро, сходны с электростатической энергией отдельных ядер, но их структура, величина и знак являются иными. В отличие от собственной энергии полный интеграл по импульсам от эффективного энергетического сдвига оказывается равным нулю. Знак и величина поправок определяются ядерными реакциями, которые показывают, какие значения энергии и импульсов ядер вносят наибольший вклад в результаты перенормировок.

В диссипативной системе можно проанализировать скорость изменения полной электростатической энергии системы и показать, что найденные перенормировочные поправки действительно определяются этой скоростью. Для скорости изменения во времени полной электростатической энергии всей системы имеем

$$\frac{dW^s}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right\rangle = \\ = \int \sum_i Z_i e \langle \delta f_{i,\mathbf{k},\omega} (-i\omega') \phi_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle \times \\ \times \exp\left[-i(\omega + \omega')t\right] d\mathbf{k}\mathbf{k}' d\omega d\omega'. \quad (58)$$

Это соотношение нужно сопоставить с первым членом правой части (33). Изменение энергии частиц получается умножением левой части (33) на энергию отдельной частицы и интегрированием по распределению частиц. Производная по импульсам при интегрировании по частям приведет к множителю $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$, а в силу (40), (41) произведение $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ может быть заменено на ω. Учитывая это, легко увидеть, что (42) и (43) соответствуют таким изменениям распределений частиц, которые описывают изменения полной электростатической энергии системы из-за ее эволюции во времени благодаря протеканию ядерных реакций. Именно поэтому коллективные поправки к каждой ядерной реакции зависят от темпа других реакций всего цикла.

Описанные перенормировочные члены легко интерпретировать как появление сдвига энергии $\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}}$ или как добавки к энергии ядра

$$\epsilon_{i,\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m_i}\Phi_i^R(\mathbf{p}) \propto \exp\left(-\frac{\epsilon_{i,\mathbf{p}}}{T} - \frac{\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}}}{T}\right) \approx \approx \exp\left(-\frac{\epsilon_{i,\mathbf{p}}}{T}\right)\left(1 - \frac{\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}}}{T}\right),$$

где $\epsilon_{i,\mathbf{p}}$ — энергия частиц i, а $\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}}$ — коллективный сдвиг энергии частиц i. Учтя, что $\Phi_i^{(R)} = \Phi_i(1-\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)})$, получим

$$\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)} = \frac{\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}} - \delta\epsilon_i^{(0)}}{T}, \quad \delta\epsilon_i^{(0)} = \frac{\int (\delta\epsilon_{i,\mathbf{p}}/T)\exp(-\epsilon_{\mathbf{p}}/T)\,d\mathbf{p}}{\int \exp(-\epsilon_{\mathbf{p}}/T)\,d\mathbf{p}}, \tag{59}$$

где $\delta\epsilon_i^{(0)}$ возникает из нормировки. Соотношение (59) предполагает лишь, что распределение реагирующих ядер осталось тепловым. Поэтому поправки будут обусловлены только появлением у ядерных частиц энергетического сдвига.

Интеграл по тепловому распределению частиц от (56) дает нуль, а это означает, что

$$\frac{\delta\epsilon_{i\mathbf{p}}}{T} = \Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)}. \tag{60}$$

Выражение (60) отлично от использованного в [10, 12], где учитывалась эволюция во времени усредненного распределения, но не учитывалась временная эволюция флуктуаций и коллективное изменение распределения из-за ядерных реакций, которые и приводят к выражениям (49), (56). Последние являются более общими, чем соотношения, полученные в [10, 12], так как учитывают временное изменение флуктуаций под действием ядерных реакций. Для сравнения с (56) приведем выражение для собственной энергии недиссипативной системы из [10, 12]:

$$\frac{E_{i,\mathbf{p}}^s}{T} = \frac{Z_i^2e^2}{4T\pi^2} \times \int d\mathbf{k}d\omega\delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\omega^2\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega\,\mathrm{Re}(\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)})}. \tag{61}$$

В отличие от (57) интеграл (61) по импульсам не равен нулю. Энергетический сдвиг (60) зависит, очевидно, только от модуля скорости частиц, т. е. от энергии частиц, и следовательно, в силу обращения в нуль интеграла по импульсам, он должен изменять знак с изменением энергии. При интегрировании с весом, определяемым скоростью ядерных реакций w_{ij}, относительная энергия близка к энергии Гамова, а трансляционная энергия имеет величину порядка тепловой, но при определении эффективного знака энергетического сдвига существенным является также угловое усреднение.

В силу предположения о тепловом распределении частиц, поправки можно интерпретировать только как эффективный энергетический сдвиг. Описанный сдвиг энергии является коллективным и в определенной мере представляет собой коллективный аналог лэмбовского сдвига. Сам сдвиг выступает как эффективная перенормированная собственная энергия ядер.

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОПРАВОК

Отношение скорости ядерных реакций R_{ij} при учете коллективных плазменных эффектов к их скорости $R_{ij}^{(0)}$ в отсутствие плазмы составляет

$$\frac{R_{ij}}{R_{ij}^{(0)}} = \frac{\int w_{ij}^{eff}\Phi_i(\mathbf{p})\Phi_j(\mathbf{p}')d\mathbf{p}d\mathbf{p}'}{\int w_{ij}\Phi_i(\mathbf{p})\Phi_j(\mathbf{p}')d\mathbf{p}d\mathbf{p}'} = 1 + \Lambda^{(C)} + \Lambda^{(T)}, \tag{62}$$

где $\Lambda^{(C)}$ описывает корреляционные поправки, $\Lambda^{(T)}$ — поправки из-за временной эволюции (индекс T указывает на временную эволюцию). Величина $\Lambda^{(C)}$, как независящая от импульсов, совпадает с уже полученной ранее (11), а для $\Lambda^{(T)}$ имеем

$$\Lambda^{(T)} = \left[\int w_{ij}(\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)} + \Lambda_{j,\mathbf{p}'}^{(R,)})\Phi_i(\mathbf{p})\Phi_j(\mathbf{p}')d\mathbf{p}d\mathbf{p}'\right] \times \left[\int w_{ij}\Phi_i(\mathbf{p})\Phi_j(\mathbf{p}')d\mathbf{p}d\mathbf{p}'\right]^{-1}. \tag{63}$$

Вводя относительную скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ и скорость центра масс

$$\mathbf{V} = \frac{m_i \mathbf{v} + m_j \mathbf{v}'}{m_i + m_j}$$

двух реагирующих ядер, можно (63) трактовать как усреднение по относительному движению и движению центра масс:

$$\Lambda^{(T)} = \left[\int w_{ij} (\Lambda^{(R)}_{i,\mathbf{p}} + \Lambda^{(R)}_{j,\mathbf{p}'}) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\frac{E_r}{T} - \frac{V^2}{2(m_i+m_j)T}\right] d\mathbf{v_r} d\mathbf{V}\right] \times$$
$$\times \left[\int w_{ij} \exp\left[-\frac{E_r}{T} - \frac{V^2}{2(m_i+m_j)T}\right] d\mathbf{v_r} d\mathbf{V}\right]^{-1}. \quad (64)$$

Подынтегральные выражения в зависимости от относительной энергии $E_r = \mu_{ij} v_r^2/2$ имеют резкий максимум около энергии Гамова $E^G_{ij} = \mu_{ij}(v^G_{ij})^2/2$, где

$$\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

— приведенная масса. Поэтому интегрирование по относительной энергии сводится к ее замене на энергию Гамова. Однако величина $\Lambda^{(R)}_{i,\mathbf{p}} + \Lambda^{(R)}_{j,\mathbf{p}'}$ зависит от относительных импульсов частиц плазмы. Следовательно, кроме абсолютных значений относительной и трансляционной энергии, она зависит от углов. Соотношение (64) содержит соответствующее угловое усреднение. После выделения угловых переменных можно провести интегрирование по модулю k, учитывая, что отношение $\omega/kv_{T\alpha}$ ($v_{T\alpha}$ — тепловая скорость частиц α) не зависит от модуля k в силу $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$

Одновременно с выделением угловой зависимости для явного расчета поправок для реальных приложений в плазме, представляющей собой смесь различных реагирующих ядер, нужно преобразовать поправки к виду, содержащему относительный вклад по массе различных ядер. Будем считать ионы полностью ионизованными, т. е. «голыми» ядрами, заряд которых компенсирован электронами:

$$n_e = \sum_i Z_i n_i.$$

Диэлектрическую проницаемость используем в виде

$$\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \frac{1}{k^2 d_e^2} + \sum_i \frac{1}{k^2 d_i^2} W(s_i) =$$
$$= 1 + \frac{1}{k^2 d^2 (1 + Z_{eff})} \left(1 + \frac{\sum_i Z_i^2 n_i W(s_i)}{\sum_i Z_i n_i}\right), \quad (65)$$

где суммирование проводится только по ионам и считается, что их скорости много меньше тепловой скорости электронов, для отклика которых используется поэтому приближение дебаевской экранировки (второй член в первом равенстве (65)). Здесь d — полный дебаевский радиус, $W(s)$ — известная дисперсионная функция плазмы

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{d_e^2} + \sum_i \frac{1}{d_i^2},$$
$$W(s) = 1 + s\exp(-s^2)\left(i\sqrt{\pi} - 2\int_0^s \exp t^2 dt\right) \quad (66)$$

и

$$s_i = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_{Ti}}, \quad 1 + Z_{eff} = \frac{d_e^2}{d^2},$$
$$Z_{eff} = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{\sum_i Z_i n_i}. \quad (67)$$

В силу сказанного, как s_i, так и $W(s_i)$ зависят только от угловых переменных. Если

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\sum_j m_j n_i}$$

описывает относительную массовую плотность ядер, то

$$\epsilon^{(0)}_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \frac{1}{k^2 d^2}\left(1 + \frac{\sum_i \frac{Z_i^2 X_i}{m_i}}{\sum_i \frac{Z_i X_i}{m_i}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\sum_i \frac{Z_i^2 X_i}{m_i} W(s_i)}{\sum_i \frac{Z_i X_i}{m_i}}\right). \quad (68)$$

Заметив, что $\Lambda^{(R)}_{i,\mathbf{p}}$ содержит суммы по сортам ионов j' от функций, зависящих от k^2 и от угловых переменных, входящих в $s_{i,j,j'}$, а $\Lambda^{(R)}_{j,\mathbf{p}'}$ содержит суммы по сортам ионов j' от функций, зависящих от k^2 и от угловых переменных, входящих в $s_{j,i,j'}$, получаем

$$s_{i,j,j'} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{k\sqrt{2} v_{Tj'}} =$$
$$= \sqrt{\frac{m_{j'}}{m_i + m_j}}\left(yx + \lambda_{ij} z \frac{m_j}{m_i + m_j}\right), \quad (69)$$

$$s_{j,i,j'} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}'}{k\sqrt{2} v_{Tj'}} =$$
$$= \sqrt{\frac{m_{j'}}{m_i + m_j}}\left(yx - \lambda_{ij} z \frac{m_i}{m_i + m_j}\right). \quad (70)$$

Здесь x — косинус угла между вектором $\mathbf{k}$ и относительной скоростью двух реагирующих ядер $\mathbf{v}_r$, z — косинус угла между $\mathbf{k}$ и трансляционной скоростью $\mathbf{V}$ двух реагирующих ядер, y — нормированная скорость трансляционного движения, λ_{ij} — нормированная скорость, соответствующая энергии Гамова,

$$y = \frac{V}{\sqrt{2T/(m_i+m_j)}},\qquad \lambda_{ij} = \frac{v_{ij}^G}{\sqrt{2T/(m_i+m_j)}}. \tag{71}$$

В силу соотношения

$$\omega\frac{\partial W(s)}{\partial\omega} = s\frac{dW(s)}{ds} = (1-2s^2)W(s) - 1 \tag{72}$$

удобно, использовав

$$\int d\omega\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})L_{\mathbf{k},\omega} = \int d\omega\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\frac{k^2v_{Ti}^2}{T}\frac{\partial L_{\mathbf{k},\omega}}{\partial\omega}, \tag{73}$$

привести соотношение (56) к виду, содержащему только операторы $\omega\partial/\partial\omega$:

$$\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(R)} = \Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(T)} + \tilde{\Lambda}_{i,\mathbf{p}}^{(T)}, \tag{74}$$

$$\Lambda_{i,\mathbf{p}}^{(T)} = \frac{Z_i^2e^2}{4\pi^2T}\int\frac{d\mathbf{k}}{k^2}\,\mathrm{Re}\left\{\left[1+\frac{k^2v_{Ti}^2}{\omega^2}\times\left(1-\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\right]\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}}\right\}_{\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}, \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{i,\mathbf{p}}^{(T)} = \frac{Z_i^2e^2}{4\pi^2T}\int\frac{d\mathbf{k}}{k^2}\times\\ \times\mathrm{Re}\Bigg\{\left(1+\frac{k^2v_{Ti}^2}{\omega^2}\right)\left[\frac{(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},0}^{(0)}-1)}{|\epsilon_{\mathbf{k},0}^{(0)}|^2} - \frac{\mathrm{Re}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}-1)}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}|^2}\right]+\\ + \frac{1}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}|^2}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}-1) + \frac{k^2v_{Ti}^2}{\omega^2}\left(\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\times\\ \times\left[2\frac{\mathrm{Re}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}-1)}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}|^2} - \right.\\ \left. - \frac{1}{|\epsilon_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}|^2}\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k},\omega}^{(0)}-1)\right]\Bigg\}_{\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}.\end{aligned} \tag{76}$$

Интегрирование по k в этом соотношении проводится аналитически и поиск коллективных поправок сводится к усреднению по y с формфактором

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\ldots y^2\exp(-y^2)dy,$$

по x с

$$(1/2)\int_{-1}^{1}\ldots dx$$

и по z с

$$(1/2)\int_{-1}^{1}\ldots dz.$$

Используя (66), получаем окончательно

$$\Lambda^{(T)}(y,x,z) = -\frac{Z_i^2e^2}{4\sqrt{\pi}Td\sqrt{1+Z_{eff}}}\int_0^\infty y^2e^{-y^2}dy\times\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dz\,\mathrm{Re}\{\Lambda_{ij}^{(T)}+\tilde{\Lambda}_{ij}^{(T)}\} + (i\leftrightarrow j), \tag{77}$$

где $\Lambda_{ij}^{(T)}(y,x,z)$ определяется усреднением (75), а $\tilde{\Lambda}_{ij}^{(T)}(y,x,z)$ — усреднением (76), причем выражения для $\Lambda_{ij}^{(T)}(y,x,z)$ и $\tilde{\Lambda}_{ij}^{(T)}(y,x,z)$ приведены в Приложении. При замене $i\leftrightarrow j$ в (П.1), (П.2) вместо (69) входит (70) и соответственно вместо $s_{i,j,i}$ входит $s_{j,i,j}$, а вместо Z_i^2 входит Z_j^2. Поскольку массы ядер входят в числители и знаменатели (П.1), (П.2) с одинаковыми степенями, массу ядер в (76) можно исчислять в массах протона, т. е. m в (69), (70) и (П.1), (П.2) соответствуют атомному весу ядер.

Соотношения (П.1), (П.2) позволяют рассчитывать скорости ядерных реакций между ядрами i и j для произвольной смеси ядер в плазме, причем суммирование по ионам плазмы j' включает как реагирующие ядра, так и не реагирующие, а суммирование по $\tilde{j}'$ включает только реагирующие ядра.

9. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты расчетов для центральных частей Солнца, используя параметры [3]: $X_{\mathrm{H}} = 0.3411$, $X_{\mathrm{He}} = 0.6387$, $X_{\mathrm{C}} = 0.00003$, $X_{\mathrm{N}} = 0.0063$, $X_{\mathrm{O}} = 0.0085$. Имеем $Z_{eff} = 2.551$, $\sum\limits_j Z_jX_J/m_j = 0.661$. От температуры и плотности зависит в основном параметр e^2dT. Для температуры $T = 1.5$ кэВ и плотности $n = 5\cdot10^{25}$ см$^{-3}$, принимаемых в современных моделях Солнца, имеем $e^2/Td = 0.05$, что составляет для солпитеровских поправок для p–p-реакций (начало водородного цикла) 5 % и для реакций с Be (конец водородного цикла) $4e^2/Td \approx 20\,\%$. Для того чтобы не привязываться к определенным значениям температуры и плотности, целесообразно привести результаты

№	Реакция	$\lambda_{i,j}$	$\Lambda_{ij,N}^{(S)}$	$\Lambda_{ij,N}^{(C)}$	$\Lambda_{ij,N}^{(T)}$	$\Lambda_{ij,N}^{(C)} + \Lambda_{ij,N}^{(T)}$
1	$p + p$	4.280	1	1	0.357	1.357
2	$p + {}^2\mathrm{H}$	4.757	1	1	0.313	1.313
3	${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He}$	8.150	4	4	0.98	4.98
4	${}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He}$	8.420	4	4	0.943	4.943
5	${}^7\mathrm{Li} + p$	10.234	3	3	0.676	3.676
6	${}^7\mathrm{Be} + p$	11.264	4	4	1.056	5.056
7	${}^7\mathrm{Be} + e$	0	0	-4	0.788	-3.212

численных расчетов для поправок в единицах e^2/Td для $\Lambda_{ij,N} \equiv \Lambda_{ij}Td/e^2$. В таблице представлены результаты численного расчета коллективных плазменных поправок по формулам (77), (П.1), (П.2). Таблица содержит принятые значения для относительной величины гамовских энергий λ_{ij}, для корреляционных поправок $\Lambda_{ij,N}^{(C)}$, для поправок $\Lambda_{ij,N}^{(T)}$, для поправок $\Lambda_{ij,N}^{(S)}$ и для суммарных поправок $\Lambda_{ij,N}^{(C)} + \Lambda_{ij,N}^{(T)}$.

10. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ранее предполагалось, что коллективные поправки соответствуют солпитеровским поправкам и дают увеличение скоростей всех реакций. Как видно из таблицы, не все поправки приводят к ускорению реакций, а только некоторые из них, например, в реакции с поглощением электронов ядрами ^{7}Be скорости реакций уменьшаются. Последнее существенно, так как реакция с ядрами ^{7}Be является ветвящейся (см. шестую строку таблицы), и такое ветвление было и до сих пор остается одной из нерешенных проблем для реакций, производящих нейтрино в недрах Солнца. Уменьшение скорости реакции с поглощением электронов ядрами ^{7}Be приведет к уменьшению числа ядер B и к уменьшению числа нейтрино, возникающих при их распаде. Для всех остальных реакций водородного цикла скорости реакций оказываются бо́льшими, чем те, которые принимались ранее. Результирующий эффект для этих реакций складывается из найденного в [10–12] эффекта подавления и эффекта, связанного с временной эволюцией из-за ядерных реакций с нейтрино, свободно покидающих систему. Последний эффект превалирует, приводя к усилению реакций. С другой стороны, доказанное равенство нулю солпитеровских поправок имеет подтверждение в том смысле, что при не равенстве нулю солпитеровских поправок их интерференция с корреляционными поправками приведет к результату, противоречащему наблюдениям. Действительно, в этом случае поправки будут в 4 раза больше солпитеровских, т. е. около 80 % для реакций 3, 4 таблицы, что противоречит данным солнечной сейсмологии. Корреляционные эффекты приводят к поправкам, «восстанавливающим» в определенной степени результат, часто используемый в стандартных моделях Солнца, но полные поправки, приведенные в последнем столбце таблицы, отличаются от используемых. Опыт численного расчета моделей Солнца показывает, что даже относительно небольшие поправки могут заметно влиять на окончательные параметры эволюционирующей ядерной системы. Последняя строка таблицы показывает, что корреляционные поправки для реакций поглощения электронов ядрами ^{7}Be значительны и отрицательны. При этом равные нулю солпитеровские поправки дают ошибочный ответ. Корреляционные поправки для ядер ^{7}Be должны учитываться при построении моделей Солнца, их учет важен в существующей проблеме ветвления ядерных реакций, включающих ядра ^{7}Be.

Обсудим вопрос о том, с какой точностью можно пренебречь теми членами, которые приводят к выводу об обращении в нуль солпитеровского экранирования. Это определяется возможностью пренебрежения вторым членом (6). Он описывает влияние реально возникающих флуктуационных электрических полей на скорости термоядерных реакций. Современная теория плазменных флуктуаций дает для последнего эффекта выражения, расходящиеся по k. Если для оценок использовать $k_{max} \approx 1/r$, где r — характерный ядерный размер, то получим, что эффекты, связанные с флуктуационными электрическими полями, в r/R раз меньше тех, которые здесь учитывались (R — характерный размер флуктуационных полей). Если же $k_{max} \approx N_d/d$ (большие углы при столкновениях), то относительный вклад второго члена (6) еще меньше и приблизительно равен $\approx r^2 N_d/R^2$.

Стоит отметить, что в лабораторной лазерной плазме плотности плазмы могут быть бо́льшими, чем в недрах Солнца, тогда как температуры имеют тот же порядок величины. Тогда величина e^2/dT будет на порядок большей, чем в недрах Солнца, и корреляционные поправки для реакций D + T будут иметь порядок 50 %, а не 5 %, как в недрах Солнца. Суммарные поправки, рассчитанные численно при использовании настоящей теории, будут большими, чем корреляционные поправки (которые дают оценку 50 %) на фактор 1.194, что соответствует усилению скорости реакции до 51 %.

Согласно результатам настоящей работы, физический смысл коллективных поправок связан с изменением распределения ядер (корреляционным и временным), но не с изменением вероятности ядерных реакций, как предполагалось ранее. В этом смысле поправки не специфичны для ядерных реакций и возникают для любых других реакций, в частности, химических (правда, для применимости полученных численных результатов их скорости должны быть больше скорости флуктуаций, и конкретные результаты усреднения в противоположных условиях будут иными). Это подчеркивает основное физическое отличие рассчитанных здесь поправок от тех, которые могли бы быть связаны с ранее учитываемым экранированием ядерных реакций. Таким образом решается парадокс между динамическим и статическим экранированием.

Для описания ядерных процессов в недрах Солнца и в звездах на других стадиях эволюции нулевое приближение солпитеровского слабого экранирования считалось недостаточным. Использовались интерполяционные формулы, дающие описание ядерных реакций в промежуточной области между сильным и слабым экранированием. Из полученных в настоящей работе результатов следует, что такой подход не может быть использован. Эффект экранирования отсутствует, а для получения интерполяционных формул необходимо более точно описывать эффекты корреляций. В настоящей работе получен результат для слабых корреляций при разложении по малому параметру числа частиц в дебаевской сфере. Этот параметр отличен от того, который ранее использовался для солпитеровских поправок — отношения тепловой энергии к энергии Гамова. Правильные интерполяционные формулы для корреляционных поправок могли бы быть получены, если бы был известен результат для сильных корреляций. Хотя в исследованиях использовались различные методы описания сильных корреляций в плазме, все они базируются на ряде гипотез, до сих пор не доказанных. До сих пор не была полностью решена даже проблема слабых корреляций, исследованию которой и посвящена настоящая работа. Используя полученные результаты, можно предложить метод описания корреляционных эффектов следующего порядка по параметру $1/N_d$, сформулировать соответствующие уравнения и исследовать их. Но эффекты сильных корреляций, которые могли бы быть использованы для получения интерполяционных формул, в общем виде вряд ли могут быть подробно исследованы в обозримом будущем. Тем самым ставится под сомнение точность существующих сейчас моделей для описания ядерных реакций при эволюциях звезд, использующих интерполяционные солпитеровские формулы.

Автор выражает благодарность В. С. Березинскому и участникам рабочей группы по солнечным нейтрино (Гран Сассо, Италия) за многочисленные обсуждения и постоянный интерес к работе. Автор также благодарен за возможность проведения более подробных численных расчетов плазменных поправок к ядерным реакциям во время визита в Национальный Институт ядерных исследований (NIFS, Токи, Япония).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет дает для $\Lambda_{ij}^{(T)}(y,x,z)$:

$$\Lambda_{ij}^{(T)}(y,x,z) = \frac{\sum\limits_{j'} \frac{Z_{j'}^2 X_{j'}}{m_{j'}} \left[\left(1 + \frac{3 s_{i,j,j'}^2}{s_{i,j,i}^2} - 2 s_{i,j,j'}^2 \left(1 + \frac{s_{i,j,j'}^2}{s_{i,j,i}^2} \right) \right) W(s_{i,j,j'}) - \left(1 + \frac{s_{i,j,j'}^2}{s_{i,j,i}^2} \right) \right]}{\sqrt{\sum\limits_{j''} \frac{Z_{j''} X_{j''}}{m_{j''}} \left[\sum\limits_{j'} \frac{Z_{j'} X_{j'}}{m_{j'}} + \sum\limits_{j'} \frac{Z_{j'}^2 X_{j'}}{m_{j'}} W(s_{i,j,j'}) \right]}} +$$

$$
+\frac{1}{4s_{i,j,i}^2}\,\frac{\left[\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_j'}\left[(1-2s_{i,j,j'}^2)W(s_{i,j,j'})-1\right]\right]^2}{\sqrt{\sum\limits_{j''}\frac{Z_{j''}X_{j''}}{m_{j''}}\left[\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})\right]^3}} \tag{П.1}
$$

и аналогичное выражение для $\tilde{\Lambda}_{ij}^{(T)}(y,x,z)$:

$$
\tilde{\Lambda}_{ij}^{(T)}(y,x,z)=
$$

$$
=-\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j''}\frac{Z_{j''}X_{j''}}{m_{j''}}}}\left\{\frac{\mathrm{Re}\left\{\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}'}}\left[\left(1+\frac{3s_{i,j,\tilde{j}'}^2}{s_{i,j,i}^2}-2s_{i,j,\tilde{j}'}^2\left(1+\frac{s_{i,j,\tilde{j}'}^2}{s_{i,j,i}^2}\right)\right)W(s_{i,j,\tilde{j}'})-\left(1+\frac{s_{i,j,\tilde{j}'}^2}{s_{i,j,i}^2}\right)\right]\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})}\right\}}+\right.
$$

$$
+\;\frac{1}{2s_{i,j,i}^2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{Re}\left\{\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}}'}\left[(1-2s_{i,j,\tilde{j}'}^2)W(s_{i,j,\tilde{j}'})-1\right]\right\}}{\mathrm{Re}\left[\sqrt{\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})}\right]}+\frac{\left\{\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_j'}\left[(1-2s_{i,j,j'}^2)W(s_{i,j,j'})-1\right]\right\}}{\sqrt{\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})}}\times\right.
$$

$$
\left.\left.\times\;\frac{\mathrm{Re}\left\{\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}}'}\left[(1-2s_{i,j,\tilde{j}'}^2)W(s_{i,j,\tilde{j}'})-1\right]\right\}-2\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}'}}+\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}'}}W(s_{i,j,\tilde{j}'})\right\}}{2\left\{\mathrm{Re}\left[\sqrt{\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})}\right]\right\}^2}\right\}\right\}-
$$

$$
-\,\mathrm{Re}\left\{\left(1+\frac{1}{2s_{i,j,i}^2}\right)\left[\frac{1+\tilde{Z}_{eff}}{\sqrt{1+Z_{eff}}}-\frac{\mathrm{Re}\left[\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}X_{j'}}{m_{\tilde{j}'}}+\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}\frac{Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}}{m_{\tilde{j}'}}W(s_{i,j,\tilde{j}'})\right]}{\sqrt{\sum\limits_{j''}\frac{Z_{j''}X_{j''}}{m_{j''}}\left[\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}X_{j'}}{m_{j'}}+\sum\limits_{j'}\frac{Z_{j'}^2X_{j'}}{m_{j'}}W(s_{i,j,j'})\right]}}\right]\right\}. \tag{П.2}
$$

Здесь, как и выше, индекс $\tilde{j}$ учитывает только ядра, участвующие в ядерных реакциях, а

$$
\tilde{Z}_{eff}=\frac{\tilde{\sum\limits_{\tilde{j}'}}Z_{\tilde{j}'}^2X_{\tilde{j}'}/m_{\tilde{j}'}}{\sum\limits_{j}Z_jX_j/m_j}.
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. Salpeter, J. Phys. **7**, 373 (1954).
2. D. D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, Mc Graw-Hill, New York (1968).
3. J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).
4. S. Ichimaru, Rev. Mod. Phys. **65**, 255 (1993).
5. G. Shaviv and N. J. Shaviv, Phys. Rep. **311**, 99 (1999).
6. C. Carraro, A. Schafer, and S. E. Koonin, Astrophys. J. **331**, 565 (1988).
7. V. N. Tsytovich, *Lectures on Nonlinear Plasma Kinetics*, Springer-Verlag, Berlin (1995).
8. L. S. Brown and R. F. Sawyer, Rev. Mod. Phys. **69**, 411 (1997).
9. J. Weneser, Phys. Rev. D **52**, 640 (1995).
10. V. N. Tsytovich and M. Bornatici, Comments in Mod. Phys. C **2**, 1 (2000).
11. V. N. Tsytovich, Astron. Astrophys. Lett. **356**, L57 (2000).
12. В. Н. Цытович, М. Борнатичи, Физика плазмы **26**, 804 (2000) [Plasma Phys. Rep.] **26**, 840 (2000)].
13. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
14. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Физматгиз, Москва (1979).