ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 3, стр. 565–572

К ВОПРОСУ О ГОМОГЕНИЗАЦИИ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

А. П. Виноградов*[*], *А. В. Мерзликин

Институт теоретической и прикладной электродинамики
Объединенного института высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 августа 2001 г.

Рассмотрена возможность введения эффективных параметров одномерной среды в длинноволновом приближении. В виде модели одномерной среды рассматривалась слоистая среда. Показано, что эффективные параметры являются функциями толщины образца. Изучались как периодические, так и случайные среды, при этом толщины случайных образцов предполагались много меньшими длины локализации, что позволяло не учитывать этот эффект. Проведено сравнение результатов с известным решением Рытова. Обнаружено, что при увеличении толщины образца волновой вектор стремится к рытовскому значению, а характеристический импеданс не имеет предела в длинноволновом приближении. Более того, характеристический импеданс может отличаться от рытовского на 100 %. Результаты были получены путем компьютерного моделирования распространения электромагнитной волны в слоистой системе.

PACS: 77.22.-d, 77.84.Lf

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о распространении волн в одномерной неоднородной среде традиционно привлекает многих исследователей [1–3]. Это обусловлено как относительной простотой этой задачи, так и ее важностью для понимания физики процессов, происходящих при распространении волн в неоднородных средах. В данной работе мы ограничимся рассмотрением длинноволнового приближения, когда масштаб неоднородностей d (период или корреляционная длина) много меньше длины волны λ. В случае неупорядоченных сред вторым условием, принятым в настоящей работе и исключающим эффекты локализации, является малость размера системы L по сравнению с длиной локализации L_{loc}. Известно (см. [3]), что для одномерных систем в длинноволновом пределе $L_{loc} \sim \lambda(\lambda/d)$, что много больше длины волны. Поэтому в нашем случае существует достаточно широкий диапазон значений L таких, что выполняется неравенство $\lambda \ll L \ll L_{loc}$. Последнее условие означает, что мы можем рассматривать оптически толстые системы, пренебрегая эффектами, связанными с локализацией.

Хотя точное решение задачи не представляет в настоящее время вычислительных трудностей, при принятых ограничениях часто вместо истинного распределения полей интересуются распределением полей, усредненных по физически бесконечно малому объему [4]. Нахождение этих полей связано с так называемой задачей гомогенизации. Последняя состоит в определении уравнений, описывающих поведение усредненных полей при заданных свойствах среды (распределение диэлектрической и магнитной проницаемостей) на микроскопическом уровне, и уравнения, которому подчиняются истинные микроскопические поля. В статическом случае в качестве микроскопических уравнений используют уравнение Лапласа, а для переменных во времени полей — систему материальных уравнений Максвелла. Предполагается, что усредненные поля подчиняются тем же уравнениям, но с эффективными материальными параметрами — диэлектрической ε_{eff} и магнитной μ_{eff} проницаемостями. Строгое доказательство этого факта и алгоритм расчета ε_{eff} и μ_{eff} существуют только для безграничных периодических систем, находящихся в постоянном поле [5]. При этом используется так называемая теория G-конвергенции. Основным в теории G-конвергенции является тот факт, что потенциал постоянного поля подчиняется безмасштабному уравнению — уравнению Лапласа.

[*]E-mail: vinogr@vinogr.msk.ru

В этом случае все линейные размеры могут быть измерены в единицах d. В результате зависимость любой величины от размера системы L может проявляться только как функция отношения L/d. Стремление L/d к бесконечности может быть достигнуто либо стремлением L к бесконечности, либо стремлением d к нулю. Это придает физический смысл рассмотрению бесконечно большой системы: системы, в которой выполняется строгое неравенство $L \gg d$.

Для уравнений Максвелла задача гомогенизации, обычно сводящаяся к нахождению ε_{eff} и μ_{eff}, становится многомасштабной. Появляются масштабы, связанные с самими уравнениями, а именно, набор локальных значений длин волн $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ — длина волны в вакууме, k_0 — волновое число. При наличии многих масштабов переход от конечной системы к бесконечной сопряжен с определенными трудностями [6] и результаты теории G-конвергенции в общем случае применить не удается. Тем не менее обычно предполагается [7–9], что если линейный размер l_{avr} бесконечно малого объема удовлетворяет неравенству

$$d \ll l_{avr} \ll \lambda_0, \tag{1}$$

то усредненные поля подчиняются макроскопическим уравнениям Максвелла, в которые входят эффективные материальные константы. Очевидно, что при строгом неравенстве

$$d\sqrt{\varepsilon_{max}\mu_{max}} \ll \lambda_0, \tag{2}$$

выполнение которого подразумевается в данной работе (индекс «max» указывает на максимальное локальное значение восприимчивости), всегда можно подобрать размер l_{avr}, удовлетворяющий (1). Этого должно быть достаточно для введения эффективных параметров [7–9]. Ниже будет показано, что в одномерной системе выполнение неравенства (2) не гарантирует существования эффективных материальных параметров.

Решение задачи о нахождении эффективных параметров одномерной периодической среды, помещенной в постоянное поле, известно давно [10, 11]. Например, если поле направлено вдоль слоев, то в силу непрерывности тангенциальной составляющей поля $\varepsilon_{eff} = \langle\varepsilon\rangle$. Для переменных полей Рытовым [12–14] было найдено решение для случая бесконечной периодической среды, состоящей из слоев с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Работы Рытова стали классическими, породив целое направление, посвященное гомогенизации одномерных сред различной природы [14–19].

Остановимся вкратце на результатах Рытова. В его работах было получено дисперсионное уравнение для эффективного волнового числа (эффективного показателя преломления). Для немагнитных ингредиентов, которые и будут рассматриваться в нашей работе, оно выглядит следующим образом:

$$\cos(k_0 n_{eff}^{Ryt} 2d) = \cos\left(k_0\sqrt{\varepsilon_1}\, d\right)\cos\left(k_0\sqrt{\varepsilon_2}\, d\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)\sin\left(k_0\sqrt{\varepsilon_1}\, d\right)\sin\left(k_0\sqrt{\varepsilon_2}\, d\right). \tag{3}$$

Помимо этого был введен эффективный характеристический импеданс, определенный как отношение $Z_{eff} = \langle E\rangle/\langle H\rangle$ (усреднение берется по периоду), что позволило определить эффективные магнитную и диэлектрическую проницаемости. Отметим, что даже в случае немагнитных ингредиентов возникает отличная от единицы эффективная магнитная проницаемость. При выполнении (2) легко получить следующие выражения для эффективных параметров [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eff} &= \langle\varepsilon\rangle\left[1 + ik_0\frac{d_1 d_2}{4(d_1+d_2)}\,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\right], \\ \mu_{eff} &= \left[1 - ik_0\frac{d_1 d_2}{4(d_1+d_2)}\,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что ε_{eff} и μ_{eff} являются комплексными величинами, хотя ε_1, ε_2 — действительные[1]. Более того, в зависимости от того, какой из слоев считается первым, какой вторым, одна из величин ε_{eff} или μ_{eff} имеет отрицательную мнимую часть, что затрудняет возможность придать им физический смысл.

Обычно отрицательное значение мнимой части восприимчивости связывается с генерацией энергии [6]. Однако в выражение для диссипации (генерации) энергии входят обе восприимчивости, так что отрицательность мнимой части одной может быть компенсирована положительностью мнимой части другой (см. [20]). Для того чтобы рассмотреть физический смысл каждой из восприимчивостей отдельно и отождествить отрицательную мнимую часть (для определенности у μ_{eff}) с усилением излучения, необходимо поместить образец в пучность магнитного поля, где величиной электрического поля можно пренебречь. Такой эксперимент можно провести лишь с конечной системой, а не с бесконечной, рассмотренной Рытовым. Поэтому мы рассмотрели задачу о конечной системе.

[1] Так как Рытов рассматривал бесконечную среду, то он вынужден был ограничиться бездиссипативными системами.

Подход Рытова, базирующийся на использовании теоремы Флоке–Блоха, для конечного образца не применим, так как в этом случае нарушена трансляционная инвариантность. Кроме того, нельзя использовать определение характеристического импеданса, так как при падении на образец плоской волны внутри образца возбуждаются две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях и имеющие различные знаки отношения $\langle E\rangle/\langle H\rangle$. Следовательно, отношение средних значений полных полей зависит не только от локальных свойств материала, но и от соотношения между амплитудами этих волн.

В данной работе мы рассмотрели несколько альтернативных определений эффективных параметров. Прежде всего мы исходили из экспериментальных методик, принятых для измерения этих величин. Назовем их, следуя СВЧ-терминологии, волноводным и резонаторным методами. В заключение мы рассмотрели подход, основанный на самосогласованном методе эффективной среды.

2. ВОЛНОВОДНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ε_{eff} И μ_{eff}

Согласно этому подходу, измерения проводятся в волноводе [21] или в свободном пространстве [22]. Величины ε и μ определяются по коэффициентам прохождения T и отражения R падающей волны[2)] [23]. При этом предполагается, что образец состоит из однородного материала с показателем преломления

$$n = \frac{k}{k_0} = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{5а}$$

и характеристическим адмитансем

$$Y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z}, \tag{5б}$$

где Z — характеристический импеданс. При нормальном падении плоской волны на образец

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{(1-R)^2 - T^2}{(1+R)^2 - T^2}}\,, \tag{6}$$

$$e^{ik_{eff}Nd} = \frac{T(1+1/Z_{eff})}{1/Z_{eff} + R/Z_{eff} + 1 - R}\,. \tag{7}$$

В нашей работе величины T и R находились из точного решения системы уравнений Максвелла. Если ось x перпендикулярна слоям, то остальные оси можно выбрать так, что электрическое и магнитное поля будут иметь лишь по одной ненулевой компоненте. Полное решение получается путем сшивки решений на границах слоев. В каждом слое решением является сумма двух волн, одна из которых распространяется в положительном направлении оси x, а другая — в противоположном направлении. Обозначая их амплитуды в j-м слое через A_j, B_j, легко получить

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$M_j = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_{j+1}}} \left| \begin{matrix} \left(\sqrt{\varepsilon_j} + \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)\exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_j} - \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)k_0 jd\right] & \left(\sqrt{\varepsilon_j} - \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)\exp\left[-i\left(\sqrt{\varepsilon_j} + \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)k_0 jd\right] \\ \left(\sqrt{\varepsilon_j} - \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)\exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_j} + \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)k_0 jd\right] & \left(\sqrt{\varepsilon_j} + \sqrt{\varepsilon_{j+1}}\right)\exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_{j+1}} - \sqrt{\varepsilon_j}\right)k_0 jd\right] \end{matrix} \right|.$$

Полагая амплитуду падающей волны равной единице, получаем уравнения для определения R и T

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $M = (M_N, M_{N-1}, \ldots, M_1, M_0)$. Из (6) и (7) можно определить значения k_{eff} и Y_{eff}, а затем величины

$$\mu_{eff} = \frac{k_{eff}}{Y_{eff}k_0}, \quad \varepsilon_{eff} = \frac{k_{eff}Y_{eff}}{k_0}.$$

Сначала рассмотрим периодическую систему слоев. По отношению к изменению направления падения волны на противоположное существуют два принципиально разных случая: количество слоев четно (целое число периодов, система несимметрична); количество слоев нечетно (полуцелое число периодов, система симметрична).

2) Мы рассматриваем оптически толстые образцы, поэтому не обсуждаем классический метод короткого замыкания — холостого хода [20], дающий надежные результаты лишь при оптической толщине порядка одной пятой длины волны.

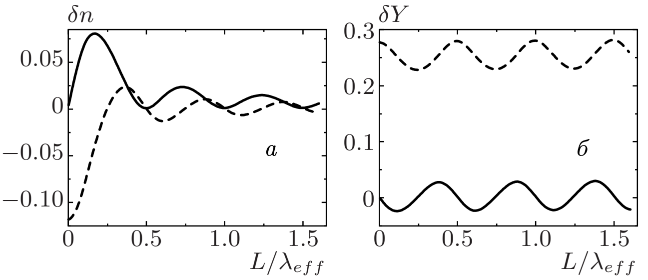

Рис. 1. Зависимости $\delta n = n_{eff} - n_{eff}^{Ryt}$ (*а*), $\delta Y = \left(\sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}} - Y_{eff}^{Ryt}\right) \cdot 100$ (*б*) для периодической системы от толщины образца в случае четного числа слоев. Толщина образца измерена в эффективной длине волны $\lambda_{eff} = \lim_{L\to\infty}(2\pi/k_{eff})$. Значения параметров $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 3$, $k_0 d = 0.01$. Сплошная линия — действительная часть, штриховая — мнимая часть

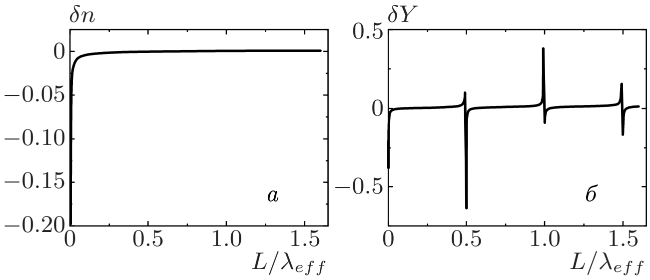

Рис. 2. Зависимости $\delta n = n_{eff} - n_{eff}^{Ryt}$ (*а*), $\delta Y = \sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}} - {Y^{Ryt}}_{eff}$ (*б*) для периодической системы от толщины образца в случае, когда число слоев нечетно. Значения параметров те же, что и на рис. 1

2.1. Четное число слоев

В случае, когда число слоев четно, эффективный показатель преломления $n_{eff} = k_{eff}/k_0$ (рис. 1*а*) стремится к рытовскому значению при увеличении размера системы. Отметим, что в отличие от рытовского решения величина n_{eff} при любой конечной толщине образца имеет отличную от нуля мнимую часть. Это нельзя списать на ошибки численного эксперимента, так как, во-первых, для образца, состоящего из одного периода (двух слоев), величина n_{eff} в первом порядке теории возмущения по $k_0 d$ является комплексной:

$$n_{eff} = \sqrt{\varepsilon_{eff}\mu_{eff}} = \\ = \sqrt{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}} + i\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2)}{16\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}}\, k_0 d.$$

Во-вторых, в ходе численного эксперимента контролировалось выполнение закона сохранения энергии: $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Отклонение от единицы не превышало 10^{-14}. Следовательно, никакого реального поглощения или усиления электромагнитной волны нет. Наблюдаются лишь биения амплитуды волн в зависимости от толщины образца. Наличие же мнимой части у n_{eff} компенсируется наличием мнимой части у Y_{eff}. Смена направления распространения волны меняет знак мнимых частей на протовоположный.

При увеличении толщины образца показатель преломления стремится к рытовскому (чисто действительному) значению как

$$n_{eff} - n_{eff}^{Ryt} = \frac{d}{L} F\left(k_{eff}^{Ryt} L\right),$$

где $F(x)$ — периодическая функция[3)].

Адмитанс Y_{eff} системы осциллирует с периодом $0.5\lambda_{eff} = \pi/k_{eff}$ (рис. 1*б*). Эффективные восприимчивости являются функциями как n_{eff}, так и Y_{eff}, поэтому проявляют комбинированное поведение: при стремлении толщины образца к бесконечности их поведение стремится к периодическому с тем же периодом, что у Y_{eff} и $F(x)$. Действительные части ε_{eff} и μ_{eff} отличаются от решения, найденного Рытовым [14], лишь во втором порядке по $k_0 d$, в то время как отличие мнимых частей ε_{eff} и μ_{eff} от рытовских имеет величину порядка $k_0 d$.

2.2. Нечетное число слоев

В случае, когда число слоев нечетно, поведение n_{eff} почти совпадает с тем, что можно было ожидать, исходя из теории Рытова. Эффективный показатель преломления является чисто действительной величиной и стремится к рытовскому значению

$$n_{eff} - n_{eff}^{Ryt} \sim \frac{d}{L}$$

(рис. 2*а*). Квадрат эффективного адмитанса также является чисто действительной величиной (хотя может принимать отрицательные значения)[4)], но в отличие от n_{eff} испытывает периодические всплески различной амплитуды (рис. 2*б*). Заметим, что амплитуда всплесков не затухает с ростом L. Пики

[3)] При малых значениях $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ функцию F можно аппроксимировать следующими выражениями: $\mathrm{Re}\, F = \sin^2(k_{eff}^{Ryt} L)$ и $\mathrm{Im}\, F = \sin(k_{eff}^{Ryt} L)$.

[4)] Заметим, что из (6) следует, что при изменении направления падения волны значение Y_{eff}^2 меняется на комплексно-сопряженное. С другой стороны, для системы из нечетного числа слоев величина Y_{eff}^2 не должна меняться, следовательно, Y_{eff}^2 является чисто действительной величиной.

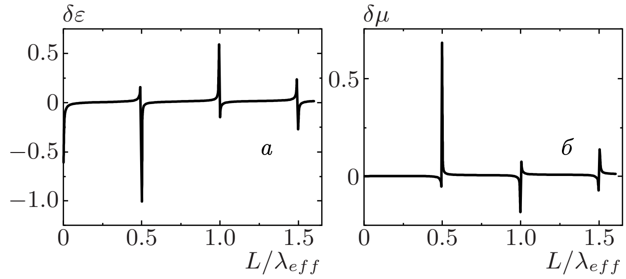

Рис. 3. Зависимости $\varepsilon_{eff} - \varepsilon_{eff}^{Ryt}$ (*а*), $\mu_{eff} - \mu_{eff}^{Ryt}$ (*б*) для периодической системы от толщины образца в случае, когда число слоев нечетно. Значения параметров те же, что и на рис. 1

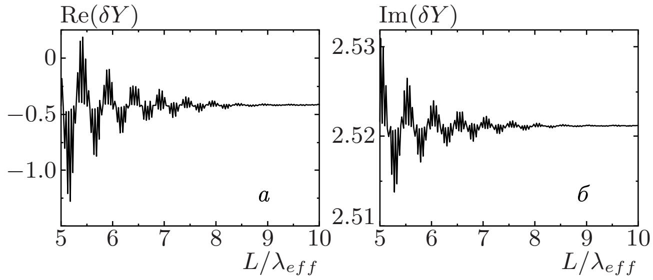

Рис. 4. Зависимости $\mathrm{Re}(\delta Y) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}} - \sqrt{\varepsilon_{eff}^{Ryt}/\mu_{eff}^{Ryt}}\right) \cdot 10^4$ (*а*), $\mathrm{Im}(\delta Y) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}} - \sqrt{\varepsilon_{eff}^{Ryt}/\mu_{eff}^{Ryt}}\right) \cdot 100$ (*б*) для периодической системы от толщины образца в случае, когда есть поглощение. Значения параметров $\varepsilon_1 = 2 + 0.5i$, $\varepsilon_2 = 3 + 0.5i$, $k_0 d = 0.1$

наблюдаются, когда на почти прозрачную пластину (толщиной $\lambda_{eff}/2$, состоящую из четного числа слоев) добавляют еще один слой. Для качественного понимания явления представим образец из нечетного числа слоев как двухслойный, первый слой которой имеет проницаемость ε_1 и толщину d, а второй слой — проницаемость $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ (что близко к рытовскому решению) и толщину $L_{odd} = (N-1)d$. Рассчитав Y_{eff}^2 такого двухслойного образца при условиях

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, k_0 d \ll 1, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{2}\, k_0 L_{odd} - \pi l \ll 1,$$

где l — целое число, получим следующее выражение:

$$\frac{\varepsilon_{eff}}{\mu_{eff}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\, \frac{k_0 d\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2}}{k_0 L\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2} - \pi l}. \qquad (10)$$

Вблизи области прозрачности $\varepsilon_{eff}/\mu_{eff}$ ведет себя как отношение

$$\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_0 d}{L - 0.5 l \lambda_{eff}},$$

т. е. при стремлении L к $0.5\lambda_{eff} l$ адмитанс Y_{eff} стремится к бесконечности. Наблюдаемые в численном эксперименте случайные всплески конечной амплитуды связаны с несоизмеримостью d и λ_{eff}.

Следствием такого поведения Y_{eff} является то, что ε_{eff} и μ_{eff} могут сколь угодно отличаться от решения, найденного Рытовым (рис. 3).

2.3. Среда с поглощением

Если возможно локальное поглощение энергии, то величина пиков эффективного адмитанса, которые наблюдались в случае нечетного числа слоев, уменьшается с увеличением толщины образца, а сам Y_{eff} стремится к некоторому значению, отличному от рытовского (рис. 4).

Отметим, что предельное значение Y_{eff} достигается на толщине, при которой образец становится непрозрачным. Это значение, как видно из (6), равно входному адмитансу. Отличие последнего от величины, полученной путем аналитического продолжения рытовского решения в область комплексных значений локальных восприимчивостей, указывает на существование переходного слоя, где решение отличается от рытовского, и в котором формируется входной адмитанс.

3. РЕЗОНАТОРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ε_{eff} И μ_{eff} (ЧЕТНОЕ ЧИСЛО СЛОЕВ)

Резонаторный метод определения ε и μ состоит в том, что оптически тонкий образец помещается в резонатор с известной резонансной частотой. Изменение резонансной частоты и добротности связано соответственно с действительными и мнимыми частями восприимчивостей [22, 4]. Обычно образец помещается сначала в пучность электрического поля, а затем в пучность магнитного поля, что позволяет находить ε и μ независимым образом.

Следуя вышеуказанной схеме, образец, состоящий из двух слоев, помещался в пучность электрического поля (в центр одномерного резонатора), а затем на одну из стенок (пучность магнитного поля). Численно определялись две резонансные частоты, они приравнивались резонансным частотам резонатора с однородным образцом, откуда вычислялись его параметры ε_{eff} и μ_{eff}.

Закон сохранения энергии выполняется при любом положении образца в резонаторе, поэтому добротность остается бесконечно большой, а, следовательно, мнимые части ε_{eff} и μ_{eff} равны нулю. Действительные части мало отличаются от статических значений $\varepsilon_{eff} = 2.5$, $\mu_{eff} = 1$ (они же — действительные части (4)). Так, для $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 2$ имеем $\varepsilon_{eff} = 2.5092$, $\mu_{eff} = 0.9099$ при условии, что образец помещается в центр и к левой стенке, и $\varepsilon_{eff} = 2.5076$, $\mu_{eff} = 1.1146$ при условии, что образец помещается в центр и к правой стенке.

Поскольку задача решается точно, в данном подходе можно использовать почти любые два положения образца. Каждая пара порождает свои значения ε_{eff} и μ_{eff}. Исключения составляют симметричные относительно центра положения, когда для однородного образца резонансные частоты совпадают. Примечательно, что для исследуемого образца в этом случае частоты разные, что указывает на невозможность приписать образцу вообще какие-либо эффективные параметры.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим иное определение ε и μ. Погрузим образец в среду с ε_{eff} и μ_{eff}, тогда он должен быть прозрачен, т. е. коэффициент отражения должен быть равен нулю, а набег фазы должен соответствовать набегу фазы по однородному веществу.

Определенные таким образом ε_{eff} и μ_{eff} не зависят от направления падения волны. Это связано с тем, что хотя в общем случае коэффициенты отражения зависимы от направления падения волны, условие прозрачности слоя универсально. Для доказательства этого удобно воспользоваться свойствами M-матрицы. Из (8) следует, что детерминант M-матрицы одного однородного слоя равен единице. Так как детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов [24], то детерминант M-матрицы любого числа слоев тоже равен единице. С другой стороны, M-матрицу можно выразить через четыре величины — коэффициенты отражения и прохождения R_L, T_L при падении волны на слой слева и коэффициенты отражения и прохождения R_R, T_R при падении волны справа:

$$M = \left| \begin{array}{cc} T_L - \dfrac{R_R R_L}{T_R} & \dfrac{R_R}{T_R} \\ -\dfrac{R_L}{T_R} & \dfrac{1}{T_R} \end{array} \right|.$$

Как легко видеть, детерминант этой матрицы равен T_L/T_R. Так как $\det M = 1$, то $T_L = T_R$. Отсюда следует, что условие прозрачности ($|T| = 1$) не зависит от направления падения волны. Заметим, однако, что коэффициенты отражения и прохождения хотя и равны по модулю (для непоглощающих сред), в общем случае имеют разную фазу даже в точке прозрачности. Последнее обстоятельство является причиной отличия «правых» и «левых» эффективных параметров при определении их «волноводным» методом у несимметричного образца. Вычисленные методом теории эффективной среды коэффициенты отражения равны нулю, а, следовательно, их фазы не играют никакой роли. Последнее условие гарантирует симметричность любой системы.

Хотя значение Y_{eff} не зависит от толщины пластины в случае четного числа слоев, оно не совпадает ни с рытовским решением, ни со значениями, полученными «волноводным» или «резонансным» методами. Независимость ε_{eff} и μ_{eff} от толщины является кажущейся. Она наблюдается только в случае погружения образца в среду с эффективными параметрами.

В случае, когда число слоев нечетно, Y_{eff} совпадает с расчетом эффективного адмитанса по коэффициентам отражения и прохождения. Это связано с тем, что для симметричного слоя $R_L = R_R$ независимо от окружения.

5. СЛУЧАЙНАЯ СРЕДА

Выше было показано, что одномерная периодическая среда не может быть адекватно описана в рамках ε_{eff} и μ_{eff}. Для того чтобы выяснить, не является ли периодическая зависимость ε_{eff} и μ_{eff} от толщины следствием периодичности среды, нужно рассмотреть случайный образец.

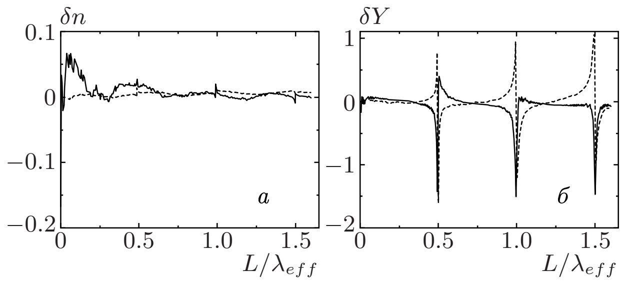

Рис. 5. Зависимости $\delta n = n_{eff}(L) - n_{eff}^{Ryt}$ (*а*), $\delta Y = Y_{eff}(L) - Y_{eff}^{Ryt}$ (*б*) для случайной системы от толщины образца. Значения параметров те же, что и на рис. 1. Сплошная линия — действительная часть, штриховая — мнимая часть

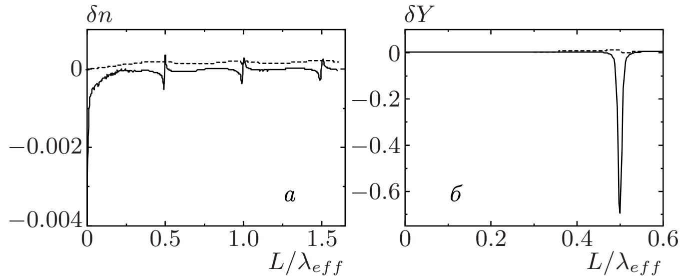

Рис. 6. Зависимости $\langle n_{eff}(L)\rangle - n_{eff}^{Ryt}$ (*а*), $\langle Y_{eff}(L)\rangle - Y_{eff}^{Ryt}$ (*б*) от толщины образца. Усреднение по 10^4 реализациям. Значения параметров те же, что и на рис. 1. Сплошная линия — действительная часть, штриховая — мнимая часть

Рассмотрим случайное расположение слоев с ε_1 и ε_2. Графики расчета $n_{eff}(L)$ и $Y_{eff}(L)$ как функции толщины образца представлены на рис. 5. Как видно, $n_{eff}(L)$ самоусредняется, а $Y_{eff}(L)$ нет. При усреднении $Y_{eff}(L)$ и $n_{eff}(L)$ по ансамблю получаются зависимости, представленные на рис. 6, причем зависимость $\langle Y_{eff}\rangle$ от толщины образца не похожа на зависимость адмитанса отдельной реализации как функции толщины.

Если есть поглощение и толщина образца увеличивается (добавляются слои) со стороны прошедшей волны, то $Y_{eff}(L)$ самоусредняется. При увеличении толщины величина $T \to 0$, и вся информация о композите содержится только в R, поэтому величина $Y_{eff}(L)$ стремится к входному адмитансу, который не совпадает с $\langle Y_{eff}\rangle$. Это становится очевидным в предельном случае сильного поглощения, так как в этом случае $Y_{eff}(L)$ равен адмитансу первого слоя. В случае любого усреднения по ансамблю информация о том, какой слой первый, а какой второй, теряется. Поэтому любое усреднение по ансамблю никогда не равно наблюдаемому значению.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных выше результатов следует, что введение эффективной диэлектрической и магнитной проницаемостей для описания одномерных сред возможно только в квазистатическом пределе $d \ll L \ll \lambda$, когда работают статические формулы смешения, например при нормальном падении $\varepsilon_{eff} = \langle\varepsilon\rangle$, $\mu_{eff} = \langle\mu\rangle$. Попытка учесть поправки, связанные с запаздыванием излучения на масштабе неоднородности, приводит к невозможности определить собственно материальные параметры — полученные ε_{eff} и μ_{eff} зависят от толщины образца L, описывая, таким образом, не материал, а образец. При этом отклонение ε_{eff} и μ_{eff} образца от значений, полученных Рытовым [3, 4] для $L = \infty$, может достигать сотен процентов даже при малом значении $k_0 d$. Это обусловлено многомасштабностью уравнений Максвелла.

Для получения предела, не зависящего от свойств окружающего пространства, недостаточно условия $d \ll \lambda$. Необходимо выполнение неравенства

$$L \ll \lambda. \tag{11}$$

Иными словами, переход к безграничной системе в динамическом случае не имеет смысла. Эта ситуация аналогична той, которая возникает в квантовой механике при решении задачи о надбарьерном рассеянии частицы. В этом случае решение задачи с П-образным потенциалом не стремится к решению задачи с потенциалом-«ступенькой». Как известно, в статике решение бесконечной задачи с точностью до d/L является решением и конечной задачи. Для получения решения бесконечной задачи в статике предельный переход в общем случае должен осуществляться в следующем порядке: устремляем λ к бесконечности, а затем увеличиваем толщину образца.

Различие в поведении одномерной системы на нулевой частоте и на конечной частоте, по всей видимости, связано с тем, что в поперечном направлении размер системы много больше длины волны и условие (11) не выполняется (см. задачу о дифракции на бесконечном проводе [25]).

Отметим также важность отличия волнового числа от предсказанного теорией Рытова. Его величина стремится к рытовскому значению, но отличие от предельного значения оказывается существенным при любом L, так как

$$\lim_{L\to\infty}\left(k_{eff}(L)L - k_{eff}^{Ryt}L\right) \neq 0.$$

Авторы выражают признательность А. М. Дыхне и С. А. Рыбаку за обсуждение работы. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 00-15-96570 и 01-02-17962).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Градескул, В. Д. Фрелихер, УФН **160**, 239 (1990).

2. G. Ya. Slepyan, A. V. Gurevich, and S. A. Maximenko, Phys. Rev. E **51**, 2443 (1995).

3. P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*, Academ. Press, London (1995)

4. Л. Д. Ландау, Е. М Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, третье издание, Наука, Москва (1992).

5. Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, Москва (1984).

6. A. N. Lagarkov and A. P. Vinogradov, *Advances in Complex Electromagnetic Materials*, ed. by A. Priou, A. Sihvola, S. Tretyakov, A. Vinogradov, NATO ASI Series 3: High Technology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997), Vol. 28, p. 117.

7. J. E. Sipe and J. van Kranendonk, Phys. Rev. A **9**, 1806 (1974).

8. R. Landauer, in *AIP Conference Proc.*, №40, ed. by J. C. Garland and D. B. Tanner, AIP, New York (1978).

9. A. P. Vinogradov and A. V. Aivazian, Phys. Rev. E **60**, 987 (1999).

10. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Berlin (1928).

11. A. Reuss, *Berechnung der Fliebgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitatsbedingung für Rinkristalle*, ZAMM (1929).

12. С. М. Рытов, ЖЭТФ **29**, 605 (1955).

13. С. М. Рытов, Акуст. ж. **2**, 71 (1956).

14. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Изд-во АН СССР, Москва (1957).

15. P. Yeh, A. Yariv, and Chi-Shain Hong, J. Opt. Soc. Amer. **67**, 423 (1977).

16. B. Djafari Rouhani and J. Sapriel, Phys. Rev. B **34**, 7114 (1986).

17. E. Akcakaya and G. W. Farnell, J. Appl. Phys. **64**, 4469 (1988).

18. Е. М. Кикарин, Д. В. Петров, Кристаллография **34**, 1072 (1989).

19. И. В. Семченко, Кристаллография **35**, 1047 (1990).

20. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электродинамические свойства плазмы и плазменноподобных сред*, Госатомиздат, Москва (1961).

21. А. А. Брандт, *Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах*, Физматгиз, Москва (1963), с. 403.

22. A. N. Lagarkov, S. M. Matytsin, K. N. Rozanov, and A. K. Sarychev, J. Appl. Phys. **84**, 3806 (1998).

23. G. Francsechetti, Acta Frequenza **36**, 757 (1967).

24. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Наука, Москва (1970).

25. Р. Б. Ваганов, Б. З. Каценеленбаум, *Основы теории дифракции*, Наука, Москва (1982).