ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 1, стр. 31–34

ЭФФЕКТ ДИФРАКЦИОННОГО ТРЕНИЯ

А. Ю. Лавренов[*]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 сентября 2001 г.

Рассмотрен эффект радиационного трения, возникающего при движении экрана со щелью перпендикулярно световому потоку. Показано, что этот эффект обусловлен дифракцией света; его величина мала, но его учет может быть необходим в прецизионных измерениях, таких как, например, обнаружение гравитационных волн. Проанализирован эффект для разных типов щелей и в разных моделях дифракции.

PACS: 42.25.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние несколько десятилетий произошло заметное развитие теории физических измерений. Разработанные методы позволили исследовать новые физические явления, большей частью основанные на квантовой физике, и ставить ранее недоступные эксперименты, такие, например, как обнаружение гравитационных волн. Для иллюстрации сложности поставленных задач можно привести следующий пример: для регистрации гравитационных волн необходимо зафиксировать смещение одного из зеркал интерферометра на расстояние порядка 10^{-16} см [1]. При большой точности измерений приходится учитывать эффекты, которые ранее могли не рассматриваться из-за своей малости. Одним из таких эффектов стал эффект дифракционного трения, введенный при анализе гейзенберговского микроскопа [2], где он существенно ограничивает чувствительность измерительной схемы. Суть этого эффекта заключается в следующем. Пусть на двигающийся экран с вырезанной дифракционной щелью падает пучок фотонов. В результате дифракции на щели, а также вследствие эффекта Доплера, у фотонов появляется дополнительный импульс, переносимый в направлении движения щели. По закону сохранения импульса, равный по величине, но противоположно направленный импульс передается экрану, что и приводит к трению. Этот эффект близок световому трению Робертсона–Пойнтинга [3, 4] для астрономических объектов, его наличие является следствием электромагнитной теории Максвелла.

В работе [2] были указаны только основные принципы этого эффекта. Дальнейшие обсуждения показали, что необходимо более строгое его рассмотрение. Настоящая статья посвящена детальному описанию этого эффекта. В разд. 2 приводится вывод основного уравнения для силы дифракционного трения. В разд. 3 проводится исследование эффекта для разных типов щелей, а также в двух моделях дифракции, которые по-разному описывают интенсивность излучения при больших углах дифракции.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Выберем лабораторную систему отсчета, неподвижную относительно наблюдателя (величины, относящиеся к ней, отмечены штрихами). В качестве модели возьмем идеальный проводник — плоский и тонкий экран, лежащий в плоскости $z' = 0$, с вырезанной длинной узкой щелью вдоль оси y', шириной в несколько длин волн падающего света (см. рисунок). В такой постановке задачи дифракционные эффекты не зависят от y', и нахождение интенсивности сводится к плоской задаче дифракции. Падающий перпендикулярно экрану плоский пучок фотонов зададим частотой ω_0'. Для регистрации импульса вокруг щели мысленно расположим серию фотодетекторов, измеряющих энергию попадающих на них фотонов. Известно, что импульс и энергия фотонов связаны соотношением: $p = E/c$ (c — скорость

[*]E-mail: anton@solst.phys.msu.su

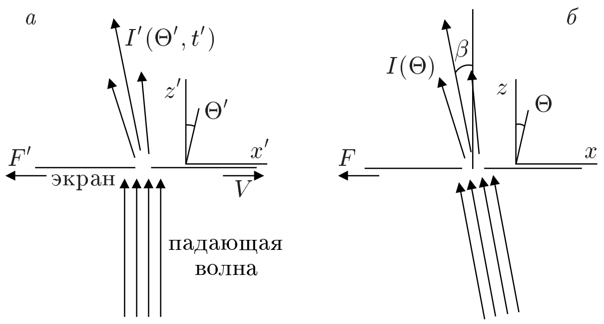

Схема распространения световой волны в лабораторной системе отсчета (a) и в системе отсчета, где щель неподвижна ($б$)

света). С учетом этого общий импульс, переданный экрану со стороны светового потока, равен

$$dp_x = -\frac{1}{c}\int \sin\Theta dE, \quad (1)$$

где Θ — наименьший угол с нормалью к экрану, а интеграл берется по произвольной поверхности, ограничивающей щель. Энергия светового потока dE, попадающего на детектор за промежуток времени dt, в видимом со стороны щели телесном угле $d\Omega$ определяется интенсивностью световой волны, проходящей через щель, $I(\Theta,\omega) = I(\Theta)\delta(\omega-\omega_0)$, с помощью соотношения

$$dE = I(\Theta,\omega) S\cos\Theta dt d\omega d\Omega. \quad (2)$$

Здесь S — площадь щели, $S\cos\Theta$ — видимая площадь щели со стороны детектора. Дальнейший анализ удобно проводить для случая, когда детекторы расположены на большом расстоянии позади щели, так чтобы рассматривать щель как «точечный» источник с заданным угловым распределением интенсивности $I(\Theta)$. В этом приближении световые волны от источников света, распределенных по поверхности щели (как в модели дифракции Гюйгенса–Френеля), до произвольно выбранного детектора распространяются параллельно.

Пусть теперь щель движется со скоростью $V \ll c$. В этом приближении в дальнейших расчетах будут опускаться члены порядка V^2/c^2. Будем искать действующую на экран силу, пропорциональную V. Это упрощает выкладки: при переходе в другую систему координат не учитываются множители, содержащие $\sqrt{1-v^2/c^2}$, для преобразований волнового вектора, а также релятивистское изменение ширины щели и детекторов.

В лабораторной системе координат вокруг щели возникает изменяющаяся со временем дифракционная картина, поэтому удобно перейти в систему отсчета, где щель неподвижна. В этой системе отсчета волна на экран падает под небольшим углом $\beta \approx V/c$; распределение поля будем характеризовать интенсивностью $I(\Theta,\beta)$. Сила, действующая на экран:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = -K\int I(\Theta,\beta)\cos\Theta(\sin\Theta+\beta)d\Theta. \quad (3)$$

Здесь $K = S\Delta\phi/c$, $\Delta\phi$ — угловой размер детекторов вдоль оси y. Второе слагаемое в скобках под знаком интеграла — это первоначальный импульс фотонов, который передался бы поглощающему сплошному экрану:

$$F_x^{initio} = -\frac{\beta W}{c},$$

где

$$W = K\int I(\Theta,\beta)\cos\Theta d\Theta$$

— мощность продифрагировавшего света. Фотоны, не участвующие в дифракции, не создают силы трения, поэтому рассматриваемый эффект был назван дифракционным трением. Рассмотрим, что происходит с выражением (3) при переходе в лабораторную систему отсчета.

В лабораторной системе отсчета по разным угловым направлениям изменяется частота (энергия) фотонов в соответствии с эффектом Доплера: $d\omega' = d\omega(1+\beta\sin\Theta)$. Поэтому действующая на экран сила выражается через угловое распределение интенсивности в системе отсчета, где щель неподвижна, в виде

$$F'_x = -K\int I(\Theta,\beta)(\sin\Theta+\beta+\beta\sin^2\Theta)\cos\Theta d\Theta. \quad (4)$$

Это выражение включает в себя только силу, создаваемую прошедшей через щель волной, и его необходимо дополнить силой, создаваемой волной, отраженной от поверхности экрана (рассматривается случай идеального отражения). Согласно [5], если дифракцию анализировать как излучение от краев экрана, то ее интенсивность получается одинаковой в полуплоскостях до и после экрана, поэтому величина трения удваивается:

$$F_x'^{full} = 2F'_x.$$

Ниже будет проанализирован коэффициент дифракционного трения (m — масса экрана),

$$\sigma = -\frac{F_x'^{full}}{mV} = \frac{W}{mc^2}\delta, \quad (5)$$

через вспомогательный коэффициент δ, зависящий только от распределения дифракционной картины:

$$\delta = 2\frac{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{I(\Theta,\beta)(1+\sin^2\Theta) + I'_\beta(\Theta,\beta)\sin\Theta\right\}_{\beta=0}\cos\Theta d\Theta}{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\Theta)\cos\Theta d\Theta}. \tag{6}$$

Так как дифракционное рассеяние волны мало, то для расчета мощности продифрагировавшей волны позади экрана (величина в знаменателе) можно ограничиться небольшими углами дифракции, при этом зависимость от β несущественна.

В следующем разделе вычисляется коэффициент δ для разных типов щелей в двух моделях дифракции.

3. ТРЕНИЕ ДЛЯ РАЗНЫХ ТИПОВ ЩЕЛЕЙ И В РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ДИФРАКЦИИ

Для нахождения интенсивности прошедшей через щель световой волны зададим поляризацию векторного потенциала поля $\mathbf{A}$ вдоль оси y, $I \propto A_y^2$. Это необходимо, потому что в некоторых случаях [5] выбор поляризации влияет на распределение интенсивности.

3.1. Дифракция Френеля

Самой простой дифракционной моделью является дифракция Френеля [5], в которой поле в точке наблюдения рассматривается как суперпозиция полей точечных источников, распределенных по поверхности щели (шириной a). Интенсивность на большом расстоянии от щели, таком что $a^2/\omega_0 r \ll 1$ (приближение Фраунгофера), пропорциональна фурье-образу от коэффициента пропускания щели $T(x)$:

$$I(\Theta,\beta) \propto \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{ikx(\sin\Theta+\beta)}dx\right|^2. \tag{7}$$

Она не зависит ни от свойств, ни от толщины материала экрана.

Рассмотрим щель с гауссовым распределением коэффициента пропускания (как в гейзенберговском микроскопе [2]),

$$T(x) = e^{-x^2/2a^2}, \quad I \sim e^{-k_0^2a^2(\sin\Theta+\beta)^2}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Поле быстро уменьшается, следовательно, можно ограничиться малыми углами, положив $\sin\Theta \propto \Theta$. Коэффициент

$$\delta \approx \frac{\sqrt{2}}{(k_0a)^2} \tag{8}$$

пропорционален квадрату дифракционного угла.

Иначе ведет себя щель с резкими границами, где

$$T(x) = \begin{cases} 1, & -a \le x \le a, \\ 0, & x < -a, \quad x > a. \end{cases}$$

В этом случае

$$I \propto \frac{\sin^2[k_0a(\sin\Theta+\beta)]}{(\sin\Theta+\beta)^2}.$$

Для узкой щели, $k_0a \ll 1$, значение $\delta = 2.7$. Для широкой щели, $k_0a \gg 1$, численный расчет показал следующую зависимость:

$$\delta = \frac{\xi_F}{k_0a}, \tag{9}$$

где параметр $\xi_F(k_0a)$ осциллирует в диапазоне значений от 0.6 до 1.9 с периодом π.

3.2. Дифракция Зоммерфельда

Более точно выражение для распределения интенсивности можно получить, если представить экран состоящим из двух бесконечно тонких клиньев, расположенных друг от друга на расстоянии a. Для одного идеально проводящего клина Зоммерфельдом была точно решена задача дифракции [5]; суперпозиция с решением для второго клина приводит к выражению

$$I \propto \frac{\sin^2[k_0a(\sin\Theta+\beta)]}{\sin^2[(\Theta+\beta)/2]} + \frac{\cos^2[k_0a(\sin\Theta+\beta)]}{\cos^2[(\Theta-\beta)/2]}.$$

Для узкой щели, $k_0 a \ll 1$, значение $\delta \approx 2$. Для широкой щели численный расчет привел к выражению, аналогичному для теории Френеля:

$$\delta = \frac{\xi_Z}{k_0 a}, \qquad (10)$$

где параметр $\xi_Z(k_0 a)$ осциллирует в диапазоне значений от 2.1 до 2.2 с периодом π. Расхождение с теорией Френеля довольно значительное. Это говорит о том, что при расчете коэффициента дифракционного трения нельзя ограничиваться приближенными моделями дифракции.

Более точное выражение интенсивности [5] для широкой щели учитывает эффекты взаимной дифракции от краев экрана, но содержит поправки к ξ порядка $(k_0 a)^{-1/2}$, что для нашего рассмотрения не является существенным. Для узкой щели при $k_0 a \ll 1$ имеем $I \propto \cos^2\Theta$. В этом случае $\delta = 1.2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для возможного практического применения, а также для численной оценки рассмотрим дифракционную решетку. Совокупную интенсивность от нескольких щелей можно получить, если умножить интенсивность от одной щели (используем более точную теорию Зоммерфельда) на фактор решетки

$$\frac{\sin^2(N k_0 d \sin\Theta)}{\sin^2(k_0 d \sin\Theta)},$$

где d — период решетки, N — число щелей. Численный анализ показал, что коэффициент δ для $N \gg 1$ в зависимости от ширины щели a колеблется около значения 2 и практически не зависит от d и N. Минимальное значение $\delta \approx 0.1$ достигается при ширине щели, такой что $k_0 a \approx 8.2$, максимальное значение $\delta \approx 3.1$ — при $k_0 a \approx 11.2$. С увеличением $k_0 a$ амплитуда колебаний монотонно уменьшается. В результате, в среднем коэффициент дифракционного трения

$$\sigma \approx \frac{2W}{mc^2}$$

составляет величину, которую необходимо учитывать при анализе движения дифракционной решетки в световом потоке в прецизионных измерениях. Для экрана массой $m = 10^{-6}$ г и лазера, создающего дифракционную картину мощностью $W = 1$ Вт, коэффициент дифракционного трения $\sigma \sim 10^{-8}$ c^{-1}. Из этой оценки следует, что учет эффекта дифракционного трения при движении дифракционной решетки в световом потоке становится существенно необходимым, если длительность прецизионного измерения составляет несколько месяцев и более.

Я благодарю С. П. Вятчанина и К. А. Постнова, без которых данная статья была бы невозможна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Грищук, В. М. Липунов, К. А. Постнов, М. Е. Прохоров, Б. С. Сатьяпракаш, УФН **171**, 1 (2001).
2. S. P. Vyatchanin and A. Yu. Lavrenov, Phys. Lett. A **238**, 38 (1997).
3. J. H. Poynting, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **202**, 525 (1903).
4. H. P. Robertson, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 423 (1937).
5. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, *Теория дифракции*, Мир, Москва (1964).