ЖЭТФ, 2002, том 121, вып. 1, стр. 14–18 

# АКТИВНАЯ СЛУЧАЙНО-СЛОИСТАЯ СРЕДА КАК ШИРОКОПОЛОСНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

*К. Ю. Блиох*[*]

*Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины*
*61002, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 31 мая 2001 г.

Рассмотрена активная плоско-слоистая среда, в которой чередуются два типа слоев с разными показателями преломления. Толщины слоев предполагаются случайными и большими по сравнению с длинами распространяющихся волн. Волна, распространяющаяся перпендикулярно слоям в такой среде, обнаруживает экспоненциальный рост на масштабах многих толщин слоев. В отличие от известного случая периодической активной плоско-слоистой среды, одинаково усиливаются волны любых частот в широком диапазоне, а не определенных резонансных. В качестве примера рассмотрена конвективная неустойчивость волн пространственного заряда в потоке заряженных частиц, движущихся сквозь случайно-слоистую среду. Предполагаемый эффект может рассматриваться как аналог локализации Андерсона, где за счет активности среды выбираются не экспоненциально убывающие, а растущие решения.

PACS: 41.20.Jb, 41.75.-i, 42.25.Bs, 42.25.Dd, 78.66.-w

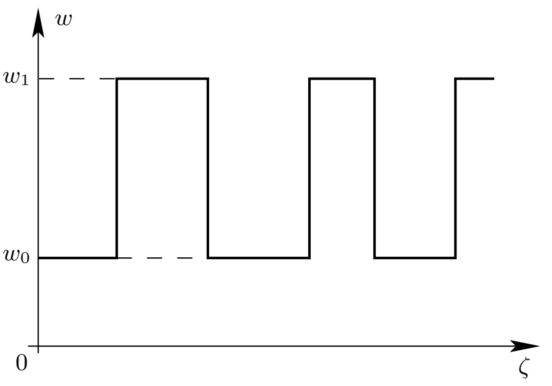
## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение линейного осциллятора с переменной собственной частотой является базовой моделью для многих физических задач. Это и механические осцилляторы или электромагнитные контуры с меняющимися во времени параметрами, и квантовые частицы во внешнем потенциале, и, наконец, линейные волны, распространяющиеся в неоднородной среде. Физики и математики достаточно подробно изучили поведение решений уравнения линейного осциллятора при различных характерных зависимостях его собственной частоты от независимой переменной. При этом один математический результат соответствует различным физическим явлениям в зависимости от того, моделью какой физической системы является уравнение осциллятора. Вследствие этого, а также разницы научного языка различных областей физики, результат, полученный в одной области, может долгие годы оставаться невостребованным в другой.

Так, казалось бы, очевидные параллели между локализацией Андерсона (квантовомеханическая частица в случайном потенциале) и параметрической неустойчивостью осциллятора со случайными вариациями собственной частоты появляются только сейчас [1], в то время как пионерская работа Андерсона [2] относится к 1958 году. Ясно, что стационарное уравнение Шредингера в первом случае является тем же уравнением гармонического осциллятора, а энергия частицы минус потенциал играет роль квадрата собственной частоты. Уравнение осциллятора со случайными вариациями собственной частоты допускает два решения: экспоненциально растущее и экспоненциально затухающее. Разница в том, что проблема локализации Андерсона формулируется в виде граничной задачи, а параметрическая неустойчивость описывается начальной задачей Коши. В первом случае экспоненциально растущее решение отбрасывается, как неудовлетворяющее граничным условиям (волновая функция должна быть ограничена), а во втором, наоборот, пренебрегают экспоненциально малым затухающим решением на фоне растущего. Однако ясно, что математически мы имеем дело с проявлениями одного и того же эффекта.

Мы рассмотрим распространение электромагнитной волны в активной плоско-слоистой среде, составленной из двух типов чередующихся слоев со случайными толщинами. Эта система описывается

[*]E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com




Зависимость собственной частоты $w$ от независимой переменной $\zeta$ в уравнении осциллятора, описывающем волны в случайно-слоистой среде. Участки $w = w_0$ соответствуют слоям одного типа, а участки $w = w_1$ — другого

уравнением осциллятора со случайными скачками собственной частоты (см. рисунок). Подобная задача уже рассматривалась [3, 4] для аналогичной оптически пассивной среды. В результате был обнаружен эффект экспоненциального затухания волны, распространяющейся в глубь среды (т. е. отражения волны, падающей на такую среду), и отмечена параллель с локализацией Андерсона. В этой задаче экспоненциально растущих решений не наблюдается, поскольку они не удовлетворяют закону сохранения энергии (среда пассивна). Математически такая же задача была рассмотрена в работе [5] для осциллятора с аналогичным параметрическим воздействием. Там исследовались параметрическая неустойчивость системы и экспоненциально растущие решения. Но полученные разными способами формулы для декремента затухания в [3, 4] и инкремента неустойчивости в [5] в точности совпали — авторы имели дело с двумя разными решениями одного и того же линейного уравнения.

В настоящей работе мы совместим идеи работ [3, 4] и [5]. Действительно, если среда будет активной, то экспоненциально растущие решения будут иметь право на существование — волна может черпать энергию из среды. Примерами активных сред могут быть различные среды с пучками. В таких средах многократно рассматривались задачи с периодическими неоднородностями (см. [6–9] и ссылки там) и отмечалось существование растущих решений, соответствующих затухающим в случае пассивной среды. При этом в периодически неоднородных средах экспоненциально растущие решения соответствуют параметрическим резонансам осциллятора, и в результате в периодической активной слоистой среде будут нарастать только волны определенных частот, для которых выполняются резонансные условия. Особенностью активной слоистой среды со случайными толщинами является то, что в ней усиливаются волны широкого диапазона частот, и коэффициент усиления в этом диапазоне зависит только от относительных показателей преломления и толщин слоев. В результате, если отношения показателей преломления различных слоев не зависят от частоты, падающие волны одинаково усиливаются вне зависимости от их частоты. Таким образом, такая среда может использоваться как широкополосный усилитель или генератор (в случае установления обратной связи).

## 2. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим уравнение классического гармонического осциллятора:

$$f'' + w^2(\zeta) f = 0, \tag{1}$$

где штрихи обозначают производную по независимой переменной $\zeta$. Энергия системы записывается в виде

$$E = \frac{1}{2}\left(f'^2 + w^2 f^2\right). \tag{2}$$

Решением (1) при постоянной частоте является функция

$$f = a\cos(w\zeta + \varphi), \tag{3}$$

где $a$ и $\varphi$ — соответственно амплитуда и фаза решения, задаваемые начальными условиями задачи. Подставляя (3) в (2), получим

$$E = \frac{1}{2}a^2 w^2. \tag{4}$$

Пусть функция $w(\zeta)$ имеет вид, показанный на рисунке. На участках, где величина $w$ постоянна, решения определяются формулой (3) со своими значениями $a$ и $\varphi$. При мгновенных скачках можно сшивать решения вида (3), пользуясь условиями непрерывности $f$ и $f'$. Тогда при скачке от $w = w_0$ до $w = w_1$ изменение энергии (2) будет равно

$$E - E_0 = \frac{f^2}{2}(w_1^2 - w_0^2), \tag{5}$$

где $E_0$ — значения энергии перед скачком. Используя (3) и (4), выражение (5) можно переписать в виде

$$E = E_0\left(1 + \frac{w_1^2 - w_0^2}{w_0^2}\cos^2\varphi_0\right), \tag{6}$$

где $\varphi_0$ — значение фазы решения в момент скачка $w$. Аналогично записывается и изменение энергии при обратном скачке: от $w_1$ к $w_0$.

Используя (6) и учитывая, что энергия системы не меняется при постоянном значении $w$, получим выражение для энергии осциллятора после $2N$ скачков:

$$E_N = E_0 \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \frac{w_1^2 - w_0^2}{w_0^2} \cos^2 \varphi_i\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{w_0^2 - w_1^2}{w_1^2} \cos^2 \varphi_i'\right), \quad (7)$$

где $\varphi_i$ и $\varphi_i'$ — фазы решений (3) в моменты скачков $w$ соответственно от $w_0$ к $w_1$ и обратно. Значение энергии (7) существенно зависит от фаз решения в моменты скачков. Однако, если мы рассматриваем ансамбль систем со случайными фазами или одну систему со случайными скачками параметра в течение достаточно долгого времени, то по фазам можно провести усреднение. (Считать фазы решений в моменты скачков случайными можно, когда характерный разброс величин интервалов между скачками больше или порядка характерного периода колебаний $w^{-1}$ (приближение сильного беспорядка [3]).)

Как мы увидим ниже, энергия экспоненциально растет с $N$, поэтому усреднять по фазам надо логарифм энергии. Из (7) в результате усреднения по $\varphi_i$ и $\varphi_i'$ имеем

$$\left\langle \ln \frac{E_N}{E_0} \right\rangle = 2N \ln \frac{(w_0 + w_1)^2}{4w_0 w_1}, \quad (8)$$

где мы использовали, что

$$\left\langle \ln\left(1 + \alpha \cos^2 x\right)\right\rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(1 + \alpha \cos^2 x\right) dx = \\ = 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1+\alpha}}{2}.$$

Из (8) видно, что усредненный по фазам логарифм энергии линейно растет с ростом $N$. Таким образом, энергия растет примерно экспоненциально на интервалах, много больших расстояния между скачками:

$$E \approx E_0 \exp(\lambda \zeta).$$

Инкремент $\lambda$ определяется выражением

$$\lambda = \frac{2}{T} \ln \frac{(w_0 + w_1)^2}{4w_0 w_1} > 0, \quad (9)$$

где $T = \zeta/N$ — средний период одного цикла изменения от $w = w_0$ к $w = w_1$ и обратно. Кроме величины $T$ инкремент $\lambda$ зависит только от отношения $w_1/w_0$. В случае волн в слоистой среде это отношение определяется отношением показателей преломления слоев.

Формула (9), в частности, описывает затухание волн в случайно-слоистой пассивной среде. Величина $\lambda$ является в этом случае декрементом затухания или константой локализации. Она была вычислена другими методами в работах [3, 4]. Приведенный выше вывод формулы (9) следует идее работы [5]. В указанных работах можно найти анализ этой формулы, области ее применимости и результаты численного моделирования.

## 3. ПРИМЕР

Рассмотрим волны пространственного заряда в потоке заряженных частиц, распространяющихся сквозь слоистую среду. Случай периодической слоистой среды и неустойчивость волн пространственного заряда в такой среде исследован в работах [7, 9]. Исходной системой являются линеаризованные по малым возмущениям электрического поля пространственного заряда, скорости и плотности частиц уравнения Максвелла, уравнение непрерывности и уравнение движения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial x} = 4\pi e n, \\ &\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_0 v + n v_0) = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} E. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $x$ — координата, перпендикулярная слоям, вдоль которой движутся частицы (мы рассматриваем одномерный случай), $n_0$ и $v_0$ — невозмущенные постоянные значения соответственно плотности и скорости частиц, $n$ и $v$ — их переменные возмущения, $e$ и $m$ — соответственно заряд и масса одной частицы, $E$ — напряженность электрического поля, $D = \varepsilon(x)E$ — электрическая индукция. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x)$ постоянна и вещественна в каждом слое и в целом по среде представляет собой функцию, подобную изображенной на рисунке, со значениями $\varepsilon_0$ и $\varepsilon_1$ в чередующихся слоях. В однородной среде волны пространственного заряда имеют следующую дисперсию:

$$k = \pm \frac{\omega_p}{v_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{\omega}{v_0}, \quad (11)$$

где $\omega$ и $k$ — соответственно частота и волновое число волны, а

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}}$$

— плазменная частота частиц пучка.

Учитывая, что рассматриваемая задача однородна по времени, а волновое число имеет постоянное слагаемое $\omega/v_0$, будем искать решения уравнений (10) в виде

$$q(x,t) = \tilde{q}(x) \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v_0}x - \omega t\right)\right],$$

где $q(x,t)$ — какая-либо из рассматриваемых переменных величин. В результате система (10) сводится к уравнению

$$\tilde{D}'' + \frac{\omega_p^2}{\varepsilon(x) v_0^2}\,\tilde{D} = 0. \qquad (12)$$

При пересечении волной границы раздела двух слоев непрерывными должны быть величины $\tilde{D}$ и $\tilde{n} \sim \tilde{D}'$ [7]. Очевидна полная аналогия уравнения (12) с рассмотренным выше уравнением (1). Следовательно (ср. с (9)) решения уравнения (12) с длиной волны меньшей или порядка неопределенности толщины слоя будут обладать экспоненциальным ростом (или затуханием) с инкрементом

$$\lambda = \frac{1}{L} \ln \frac{\left(\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}\,\right)^2}{4\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} > 0, \qquad (13)$$

где $L$ — средний период слоистой среды (отношение ее толщины к числу пар слоев). Выражения (9) и (13) различаются множителем 2, потому что энергия пропорциональна квадрату амплитуды решения. Величина $\lambda$ не зависит от частоты волны $\omega$, а содержит только параметры слоистой среды.

Чтобы определить, характеризует ли появление эффективного собственного значения (13) у величины $\tilde{D}$ неустойчивость или затухание волны, вернемся к исходным переменным. Тогда эффективное волновое число рассматриваемых колебаний можно записать в виде

$$k_{eff} = \pm i\lambda + \frac{\omega}{v_0} + \chi(\varepsilon, \omega_p, v_0), \qquad (14)$$

где $\chi$ — некоторая вещественная функция, явный вид которой не существен. Воспользуемся теперь известным критерием Бриггса [10, 11], согласно которому, если при изменении $\operatorname{Im}\omega$ от $+\infty$ до 0 значение $\operatorname{Im} k(\omega)$ меняет знак, то имеет место усиление колебаний. Волновое число (14) с $\operatorname{Im} k_{eff} = -i\lambda$ (при $\operatorname{Im}\omega = 0$) удовлетворяет этому условию благодаря наличию слагаемого $\omega/v_0$, отвечающего за перенос колебаний движущимся потоком частиц. Именно кинетическая энергия этого движения, как и в других случаях пучковых неустойчивостей, обеспечивает активность рассматриваемой системы.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Выше была рассмотрена слоистая среда со случайными толщинами чередующихся слоев двух типов и нормальное к слоям распространение линейных волн в ней. Математической моделью такой системы служит уравнение осциллятора со случайными скачками собственной частоты между двумя заданными значениями. Эта система обладает действительным эффективным собственным значением в масштабах многих слоев. Ему отвечают затухающие решения в случае пассивной среды [3, 4] или в задаче андерсоновской локализации квантовой частицы [2] и растущие решения в случае параметрического воздействия на механическую систему [5] или активной слоистой среды.

Последний случай рассмотрен в данной работе. Показано, что активная случайно-слоистая среда может использоваться как широкополосный усилитель, благодаря тому, что инкремент нарастания волн не зависит от их частоты. Характерные длины волн при этом должны быть меньше характерного разброса толщин слоев. В рассмотренном примере неустойчивости волны пространственного заряда это приводит к условию

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}\, v_0}{\omega_p} < \delta L,$$

где $\delta L \leq L$ — характерное отклонение толщины слоя от среднего значения для слоев одного типа. В противном случае нужно использовать приближение слабого беспорядка, приводящее к другой зависимости коэффициента усиления от частоты [3]. Ситуация, отвечающая приближению слабого беспорядка, и переход к случаю периодической пассивной слоистой среды рассмотрены также в [12].

Ввиду математической идентичности задачи для приведенных выше примеров пассивных и активных сред результаты, полученные при анализе константы локализации в пассивных средах, можно переносить на свойства инкремента неустойчивости в соответствующих случаях активных сред.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 00-002292).

## ЛИТЕРАТУРА


**1**. L. Tessieri and F. M. Izrailev, Phys. Rev. E **62**, 3, 3090 (2000).

**2**. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

**3**. V. Baluni and J. Willemsen, Phys. Rev. A **31**, 5, 3358 (1985).

**4**. M. V. Berry and S. Klein, Eur. J. Phys. **18**, 222 (1997).

**5**. К. Ю. Блиох, О. В. Усатенко, Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика» **9**, 2, 92 (2001).

**6**. Я. Б. Файнберг, П. В. Блиох, ЖТФ **26**, 530 (1956).

**7**. V. M. Yakovenko, Sol. St. Comm. **39**, 847 (1981).

**8**. К. Ю. Блиох, Радиофиз. и радиоастрон. **3**, 231 (1998).

**9**. Ф. Г. Басс, А. А. Булгаков, А. П. Тетервов, *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками*, Наука, Москва (1989).

**10**. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), § 63.

**11**. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, УФН **104**, 185 (1971).

**12**. Е. В. Замятин, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, РИАН, Харьков (1989).