ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 6 (12), стр. 1375–1395

ТЕОРИЯ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ В СИЛЬНОМ СЛУЧАЙНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ВЫСШИХ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю. П. Мельников[*]

Рыбинская государственная авиационная технологическая академия
152934, Рыбинск, Ярославская обл., Россия

Поступила в редакцию 16 января 2001 г.

С использованием разложения функции распределения в ряд по сферическим гармоникам от углов импульса решается кинетическое уравнение с мелкомасштабным столкновительным интегралом для частиц, распространяющихся в сильном случайном и регулярном магнитных полях [29]. С помощью методов квантовой теории углового момента [41] получены и решены в стационарном случае уравнения для высших мультипольных моментов функции распределения в пространстве углов импульса для случая распространения галактических космических лучей в межпланетном пространстве. Наблюдаемые амплитуды и фазы гармоник суточной вариации можно объяснить, используя результаты измерений межпланетного магнитного поля на космическом аппарате *Ulysses* [12–14] и других спутниках [45, 46], а также с помощью пересоединения межпланетного и межзвездного магнитных полей. Уточняется пространственная структура конвекционного и диффузионного потоков галактических космических лучей. Получены формулы, учитывающие изменение наклона земной оси относительно направления на Солнце, что дает годовые изменения вклада в гармоники суточных вариаций. Получено уравнение диффузии с учетом второй гармоники, проанализирован ее вклад в относительную концентрацию частиц космических лучей в сферически-симметричном случае.

PACS: 47.75.+f, 52.25.Dg, 96.40.Cd, 96.40.Kk

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение заряженных частиц в магнитных полях обычно исследуют в диффузионном приближении, учитывая только первый мультипольный момент функции распределения в пространстве углов импульса. Однако при наличии сильных изменений градиента концентрации частиц N, транспортного пробега Λ, напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и скорости магнитного поля $\mathbf{u}$ необходимо учитывать высшие мультипольные моменты функции распределения. Учет высших моментов функции распределения важен при исследовании распространения заряженных частиц в турбулентной среде, в частности, в турбулентной плазме с сильной перемежаемостью, в межпланетной и межзвездной средах, в сдвиговых течениях, в ударных волнах и в других плазменных структурах при нарушении условий диффузионного приближения [1–9].

Исследования межпланетной плазмы, проведенные на космическом аппарате *Ulysses* на средних и высоких широтах, показали, что строение гелиомагнитосферы и параметры солнечного ветра на этих гелиоширотах в минимуме солнечной активности отличаются от общепринятых до этого представлений [10–16]. Такое отличие возможно и в максимуме солнечной активности. Таким образом, возникает необходимость в непрерывном определении параметров и конфигурации гелиомагнитосферы. Для определения параметров гелиомагнитосферы в околоземном пространстве можно использовать экспериментальные данные по гармоникам суточных вариаций интенсивности космических лучей, применяя соответствующую теорию, изложению основных положений которой посвящена настоящая работа.

В данной работе рассматриваются условия образования высших моментов функции распределения

[*]E-mail: rgata@ryb.adm.yar.ru

галактических космических лучей в межпланетном магнитном поле и их связь с гармониками суточных вариаций.

Экспериментальные исследования показывают наличие в суточных вариациях интенсивности космических лучей в околоземном пространстве как первой, так и более высоких гармоник [3, 5–9, 17–24]. Наблюдаемые суточные вариации имеют относительную амплитуду порядка 1%, полусуточные вариации — порядка 0.1%, 8- и 6-часовые вариации имеют относительные амплитуды порядка 0.03% и 0.01% для энергий космических лучей $E \gtrsim 10$ ГэВ. Эти гармоники связаны с высшими мультипольными моментами функции распределения $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в пространстве углов импульса, где $\mathbf{r}$ — координата, $\mathbf{p}$ — импульс частицы, t — время.

В работах [8, 9] были проанализированы экспериментальные данные для второй гармоники суточных вариаций на основе метода приемных векторов. Было показано, что вклад n-ой сферической гармоники функции распределения в компоненту суточной вариации с номером m, пропорционален модулю $|Z_n^m|$ соответствующей комплексной компоненты приемного вектора. Были проанализированы также вклад второй гармоники в первую и модуляция гармоник при переходе в географическую систему координат с учетом наклона земной оси. Так как амплитуды первой и второй гармоник близки, то вклад второй гармоники в первую может быть существенным.

В работах [7, 9] был предложен экранировочный механизм образования второй гармоники в суточных вариациях, связанный с разложением по питч-углу интенсивности замагниченных космических лучей в слое регулярного магнитного поля. Достоинством этого механизма является правильное описание излома в спектре второй гармоники, возникающего при совпадении ларморовского радиуса частицы и полутолщины слоя регулярного магнитного поля. В работе [21] было указано на возникновение второй гармоники в питч-угловом распределении частиц космических лучей в результате адиабатической фокусировки при распространении частиц в регулярной составляющей межпланетного магнитного поля.

Кроме того, рядом авторов был предложен градиентный механизм образования полусуточной вариации космических лучей [9, 17], связанный с градиентом концентрации космических лучей $N(\mathbf{r}, p, t)$, симметричным относительно плоскости гелиоэкватора. Было показано, что этот механизм дает жесткий энергетический спектр и поэтому приводит к совпадению с экспериментальными данными для гармоник суточных вариаций галактических космических лучей умеренных энергий.

Первоначально исследование второй сферической гармоники с использованием кинетического уравнения было проведено в работах [9, 17]. Столкновительный интеграл, использованный в этих работах, имеет модельный характер, так как используется приближение преобразования феноменологического сечения рассеяния из системы координат, движущейся со скоростью магнитного поля, в неподвижную систему координат.

На основе последовательной теории диффузии космических лучей [1, 4, 25–29] с использованием столкновительного интеграла в малоугловом приближении были исследованы [30, 31] уравнения для второй гармоники и, на их основе, полусуточной вариации. Было показано, что при небольших градиентах u, N, Λ амплитуда второй гармоники функции распределения оказывается порядка u^2/v^2, что значительно меньше экспериментального значения ($\mathbf{u}$ — скорость солнечного ветра, $\mathbf{v}$ — скорость частиц). Амплитуда второй гармоники суточной вариации порядка 0.1% может наблюдаться при наличии сильных пространственных градиентов концентрации $N(\mathbf{r}, p, t)$, а рассмотренные в этих работах радиальные градиенты N малы. Большой вклад во вторую гармонику могут дать большие перпендикулярные градиенты концентрации N, которые наблюдались экспериментально в [32–34].

В работах [35–37] был предложен пробочный механизм образования второй гармоники для объяснения возникновения полусуточной вариации интенсивности космических лучей с максимумом вдоль регулярного магнитного поля [18].

Весьма интересны приведенные в [18] частотные спектры максимумов второй гармоники, полученные при экспериментальном наблюдении на нейтронных мониторах. В спектрах видны два максимума на фоне большого количества беспорядочных максимумов. Максимум на 3 ч LT направлен перпендикулярно регулярному магнитному полю $\mathbf{H}_0$, а максимум на 9 ч LT направлен параллельно $\mathbf{H}_0$ и связан с прохождением ударных волн в околоземном пространстве.

Экспериментальные результаты по спектру второй суточной гармоники, зависимости энергии излома спектра гармоники от цикла солнечной активности, статистические свойства времени максимума и амплитуды второй гармоники с 1965 по 1992 г. были опубликованы в [19, 20]. По этим экспериментальным данным время максимума второй гармоники не зависит от цикла солнечной активности и равно 3 ч

LT, средняя амплитуда — 0.05–0.1%, энергия излома спектра — порядка 40 ГэВ в минимуме солнечной активности и порядка 125 ГэВ в максимуме солнечной активности. При энергии меньше энергии излома показатель энергетического спектра второй гармоники оказывается порядка 0.7, а при большей энергии показатель спектра — порядка −0.4.

С помощью численного решения уравнения Фоккера–Планка были проанализированы амплитуды и фазы второй и третьей гармоник суточной вариации интенсивности космических лучей [21]. Использовалось диффузионное приближение, поэтому как и в других работах, использующих это приближение, получен растущий с увеличением жесткости спектр второй гармоники.

Экспериментальные исследования по третьей суточной гармонике были первоначально проведены в [38, 39] и далее в [22–24]. Было получено время максимума около 6 ч LT, из-за геометрии прибора и сноса частиц в геомагнитном поле время максимума может сдвигаться до 8–9 ч LT. Наблюдения были проведены на нейтронных мониторах. Для объяснения возникновения третьей гармоники был предложен механизм «конуса потерь».

Четвертая гармоника суточных вариаций, согласно экспериментальным наблюдениям [24], имеет амплитуду порядка 0.014% для $E \sim 10$ ГэВ, время максимума примерно 3 ч LT и пропорциональна $p^{1/2}$ при энергиях меньших 100 ГэВ. При больших энергиях амплитуда четвертой гармоники равна нулю. Также в [24] даны амплитуды первой, второй, третьей гармоник для частиц с $E \sim 10$ ГэВ, соответственно, 0.5%, 0.1%, 0.04%.

На основании работ [7–24] можно утверждать, что характерными спектральными особенностями высших гармоник суточной вариации является их пропорциональность $p^{0.5-1}$ для энергий E, меньших некоторой энергии обрезания $E_c \sim 50$–130 ГэВ. При бо́льших энергиях амплитуды второй гармоники плавно, а третьей и четвертой резко уменьшаются. Заметим также, что часто используемое при вычислении высших гармоник диффузионное приближение совместно с итерационной процедурой [9, 17, 30, 31] дает спектр гармоник при энергиях, меньших энергии обрезания E_c.

В данной работе, в отличие от предыдущих, вычисляются высшие моменты функции распределения — со второго по четвертый. При этом используется кинетическое уравнение последовательной теории диффузии космических лучей [1, 4, 25–27] с мелкомасштабным интегралом столкновений, в котором учитываются высшие приближения по случайному магнитному полю [28, 29]. Это дает возможность использовать произвольную, а не только квадратичную, зависимость транспортного пробега Λ от модуля импульса p. Сравнивая теоретические и экспериментальные результаты, мы показали, что высшие моменты функции распределения космических лучей определяются, в основном, градиентами различных порядков от потока космических лучей вдоль регулярного магнитного поля, связанных с конфигурацией регулярного межпланетного магнитного поля и с характеристиками случайного магнитного поля и скорости солнечного ветра.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для получения уравнений для мультипольных моментов функции распределения будем использовать кинетическое уравнение с мелкомасштабным интегралом столкновений, которое запишем в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{p}{R_0}(\mathbf{h}_0\cdot\mathbf{d})\right\}F(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \\ = \frac{1}{2}\left(d_\alpha\frac{p^2}{\Lambda|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}d_\alpha\right)F(\mathbf{r},\mathbf{p},t). \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0}, \quad R_0 = \frac{cp}{e}H_0$$

и для удобства дальнейших вычислений введен оператор

$$\mathbf{d} = (\mathbf{v}-\mathbf{u})\times\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\,.$$

По повторяющимся греческим тензорным индексам проводится суммирование. Если транспортный пробег $\Lambda(p)$ брать пропорциональным p^2, то уравнение (1) учитывает низшие порядки по случайному полю. Как следует из формулы для мелкомасштабного интеграла столкновений StF [29, 40], при учете высших порядков по случайному полю коэффициент диффузии в импульсном пространстве зависит от собственных чисел оператора квадрата момента $\hat{\mathbf{L}}^2$ сложным образом, однако разложением по сферическим гармоникам $Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ [41] от углов импульса $\mathbf{p}$ все же можно пользоваться. Далее предполагаем, что выражение для StF, входящего в (1), справедливо при $\Lambda \propto p^q$ для $q < 2$. Это является неким учетом высших приближений по случайному полю и дает возможность определить спектр суточных вариаций интенсивности галактических космических лучей при достаточно низких энергиях.

Запишем столкновительный интеграл в правой части (1) в виде

$$\mathrm{StF} = \sum_k \left[\frac{p^2}{2\Lambda} \left\{ d^k \frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|} \right\} \{d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|} \left\{ d^k \frac{p^2}{\Lambda} \right\} \{d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\} +$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\Lambda|\mathbf{v}-\mathbf{u}|} \left\{ d^k d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right\} \right], \quad (2)$$

где d_k — циклические компоненты оператора $\mathbf{d}$,

$$d_k = i\frac{1}{m} L_k + i\sqrt{2} \sum_{nm} C^{1k}_{1n\,1m} u_n \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\}_m, \quad (3)$$

d^k — комплексно-сопряженные циклические компоненты $\mathbf{d}$ [38], $C^{ln}_{pm\,qk}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [41], L_k — циклические компоненты оператора момента, m — масса частицы. В (2) и далее оператор $\mathbf{d}$ действует только на функции, стоящие вместе с ним в одних фигурных скобках. Суммирование по повторяющимся латинским индексам, соответствующим циклическим компонентам, обозначается знаком $\sum$. Первое слагаемое в правой части (2) описывает динамическое трение в импульсном пространстве, второе слагаемое связано с высшими приближениями по случайному полю, третье слагаемое связано в основном с диффузией частиц в импульсном пространстве.

Функцию распределения представим в виде ряда по сферическим гармоникам в пространстве углов импульса:

$$F(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \sum_\ell F_\ell(\mathbf{r},\mathbf{p},t) =$$
$$= \sum_\ell F^*_{\ell m}(\mathbf{r},p,t) Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi),$$

где $F_{\ell m}$ — мультипольные моменты функции распределения. Формулы, полученные ниже, будут применяться для исследования распространения галактических космических лучей с энергиями $E \gtrsim 10$ ГэВ. Поэтому, учитывая экспериментальные данные по гармоникам суточных вариаций интенсивности космических лучей и скорости солнечного ветра, будем удерживать члены порядка $(u^2/v^2)F_{00}$, $(u/v)F_{00}$, F_{00}, $(u/v)F_{1m}$, F_{1m}, F_{2m}, F_{3m}, F_{4m}, т.е. отбросим все члены, содержащие произведения $(u/v)F_{\ell m}$ при $\ell \geq 2$ [3–9]. Для частиц меньших энергий применяется другая система приближений (см. [1]).

Действуя оператором d_k на функцию распределения $F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, получим

$$\{d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\} = i\frac{1}{m} \sum_{\ell m} \sqrt{\ell(\ell+1)} \times$$
$$\times C^{\ell\, m+k}_{\ell m\, 1k} Y_{\ell\, m+k}(\vartheta,\varphi) F^*_{\ell m} +$$
$$+ i\sqrt{2} \sum_{\ell m q n} C^{1k}_{1n\,1m} u_n \left\{ \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \times \right.$$
$$\times (-1)^m C^{\ell q}_{\ell-1\, q+m\, 1\, -m} \Phi_{\ell q} Y_{\ell-1\, q+m}(\vartheta,\varphi) -$$
$$- \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (-1)^m C^{\ell q}_{\ell+1\, q+m\, 1\, -m} \times$$
$$\left. \times \Psi_{\ell q} Y_{\ell+1\, q+m}(\vartheta,\varphi) \right\}, \quad (4)$$

где

$$\Psi_{\ell m} = \frac{d}{dp} F^*_{\ell m} - \frac{\ell}{p} F^*_{\ell m}, \quad \Phi_{\ell m} = \frac{d}{dp} F^*_{\ell m} + \frac{\ell+1}{p} F^*_{\ell m}.$$

Преобразуем член $\{d_\alpha d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$ в (2). Используя d^k, получим выражения для слагаемых в $\{d_\alpha d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$:

$$i\frac{1}{m} \left\{ \sum_k L^k d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right\} =$$
$$= -\frac{1}{m^2} \sum_k \ell(\ell+1) F^*_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{m} \sum_{\ell m n r} (\ell-1) \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} C^{\ell m}_{1n\,\ell-1\, r} u_n \times$$
$$\times \Phi_{\ell m} Y_{\ell-1\, r}(\vartheta,\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{m} \sum_{\ell m n r} (\ell+2) \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} C^{\ell m}_{1n\,\ell+1\, r} u_n \times$$
$$\times \Psi_{\ell m} Y_{\ell+1\, r}(\vartheta,\varphi). \quad (5)$$

Действуя вторым операторным слагаемым в (3) на (4), получим:

$$\sqrt{2} \sum_{\ell m n q k} C^{1k}_{1n\,1q} u^n \times$$
$$\times \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\}^q \frac{1}{m} \sqrt{\ell(\ell{+}1)}\, C^{\ell\, m+k}_{\ell m\, 1k} F^*_{\ell m} Y_{\ell\, m+k}(\vartheta,\varphi) \right\} =$$
$$= -\sum_{\ell m n k} (\ell+1) \sqrt{\frac{\ell}{2\ell-1}} C^{\ell-1\, k}_{1n\,\ell m} u^n \times$$
$$\times \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{F^*_{\ell m}}{m} \right) + \frac{\ell+1}{pm} F^*_{\ell m} \right] Y_{\ell-1\, k}(\vartheta,\varphi) -$$

$$
-\sum_{\ell mnk} \ell \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+3}}\, C^{\ell+1\,k}_{1n\,\ell m} u^n \times
\times \left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{\ell m}}{m}\right) - \frac{\ell}{pm} F^*_{\ell m}\right] Y_{\ell+1\,k}(\vartheta,\varphi). \quad (6)
$$

При выводе (5) и (6) использовались формулы

$$
\sum_{pqr} (-1)^{p+r} C^{1r}_{1n\,1p} C^{\ell m}_{\ell-1\,q\,1-p} C^{\ell-1\,s}_{\ell-1\,q\,1-r} = -\sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell}}\, C^{\ell m}_{1n\,\ell-1\,s},
$$

$$
\sum_{pqr} (-1)^{p+q} C^{1p}_{1n\,1q} C^{\ell m}_{\ell+1\,r\,1-q} C^{\ell+1\,s}_{\ell+1\,r\,1-p} = \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+2}}\, C^{\ell m}_{1n\,\ell+1\,s},
$$

$$
\sum_{pqs} C^{1p}_{1n\,1q} C^{\ell s}_{\ell m\,1p} C^{\ell s}_{\ell-1\,m+p-q\,1q} = -\sqrt{\frac{(\ell+2)(2\ell+1)}{2\ell(2\ell-1)}}\, C^{\ell-1\,m+p-q}_{1n\,\ell m},
$$

$$
\sum_{pqs} C^{1p}_{1n\,1q} C^{\ell s}_{\ell m\,1p} C^{\ell s}_{\ell+1\,m+p-q\,1q} = \sqrt{\frac{\ell(2\ell+1)}{2(\ell+1)(2\ell+3)}}\, C^{\ell+1\,m+p-q}_{1n\,\ell m},
$$

полученные из соотношений работы [41]. Учитывая в (5) и (6) только члены вида $(u^2/v^2)F_{00}$, $(u/v)F_{00}$, F_{00}, $(u/v)F_{1m}$, F_{1m}, F_{2m}, F_{3m}, F_{4m}, оставляем в (5) в первом слагаемом только члены с $\ell > 0$, а в третьем слагаемом — только члены с $\ell = 0, 1$. Сумма (6) с учетом перечисленных выше приближений запишется в виде

$$
\sqrt{2} \sum_{\ell mnqk} C^{1k}_{1n\,1q} u^n \times
\times \left\{ \left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right\}^q \frac{1}{m} \sqrt{\ell(\ell+1)}\, C^{\ell\,m+k}_{\ell m\,1k} F^*_{\ell m} Y_{\ell\,m+k}(\vartheta,\varphi) \right\} =
= -\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \sum_m u_m \left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{1m}}{m}\right) + \frac{2}{pm} F^*_{1m}\right] -
- \sqrt{\frac{2}{5}} \sum_{mnk} C^{2k}_{1m\,1n} u^n \left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{1m}}{m}\right) - \frac{1}{pm} F^*_{1m}\right] \times
\times Y_{2k}(\vartheta,\varphi). \quad (7)
$$

Предпоследнее слагаемое из суммы $\{d_\alpha d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$ преобразуется к виду:

$$
2 \sum_{\ell mnqkrs} C^{1k}_{1r\,1s} u^r \times
\times \left\{ \left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right\}^s C^{1k}_{1n\,1q} u_n \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (-1)^q C^{\ell m}_{\ell-1\,q+m\,1-q} \times \Phi_{\ell m} Y_{\ell-1\,q+m}(\vartheta,\varphi) \right\} =
= \sum_{\ell mnpqr} \sqrt{\ell(\ell-1)} \frac{1}{2\ell-1} C^{\ell-1\,r}_{\ell-2\,q\,1p} C^{\ell-1\,r}_{\ell m\,1n} u^n u_p \times
\times \left[\frac{d}{dp}\Phi_{\ell m} + \frac{\ell}{p}\Phi_{\ell m}\right] Y_{\ell-2\,q}(\vartheta,\varphi) -
- \sum_{\ell mnpqr} \left(\frac{\ell}{2\ell+1} C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n} C^{\ell+1\,r}_{\ell q\,1p} +
+ \frac{\ell}{2\ell+1} C^{\ell\,r}_{\ell q\,1n} C^{\ell r}_{\ell q\,1p} - 2\ell C^{\ell-1\,r}_{\ell\,m\,1n} C^{\ell-1\,r}_{\ell\,q\,1p} \right) \times
\times u^n u_p \left[\frac{d}{dp}\Phi_{\ell m} - \frac{\ell-1}{p}\Phi_{\ell m}\right] Y_{\ell q}(\vartheta,\varphi). \quad (8)
$$

При получении этого соотношения использовались формулы

$$
\sum_{aps} (-1)^s C^{1a}_{1n\,1p} C^{1a}_{1q\,1s} C^{\ell m}_{\ell-1\,m+s\,1-s} C^{\ell-1\,m+s}_{\ell-2\,m+s-p\,1p} =
= -3\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)} \sum_{kt} C^{kt}_{\ell m\,1n} C^{kt}_{\ell-2\,m+s-p\,1q} \times
\times \begin{Bmatrix} \ell-1 & \ell-2 & 1 \\ \ell & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} =
= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}} \sum_r C^{\ell-1\,r}_{\ell m\,1n} C^{\ell-1\,r}_{\ell-2\,m+s-p\,1q},
$$

$$
\sum_{aps} (-1)^s C^{1a}_{1n\,1p} C^{1a}_{1q\,1s} C^{\ell m}_{\ell-1\,m+s\,1-s} C^{\ell-1\,m+s}_{\ell\,m+s-p\,1p} =
= -3\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)} \times
\times \sum_{k=\ell+1,\ell,\ell-1;r} C^{kr}_{\ell m\,1n} C^{kr}_{\ell\,m+s-p\,1q} \begin{Bmatrix} \ell-1 & \ell & 1 \\ \ell & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} =
= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell-1}{2\ell+1}} \sum_r C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n} C^{\ell+1\,r}_{\ell\,m+s-p\,1q} -
- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell-1}{2\ell+1}} \sum_r C^{\ell r}_{\ell m\,1n} C^{\ell r}_{\ell-2\,m+s-p\,1q} +
\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)} \sum_r C^{\ell-1\,r}_{\ell m\,1n} C^{\ell-1\,r}_{\ell-2\,m+s-p\,1q},
$$

где $\left\{\begin{matrix} \ell-1 & \ell & 1 \\ \ell & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}$ — $9j$-символы [41], полученные из соотношений в [41]. Также используем формулы для $6j$-символов, коэффициентов Рака, формулы для $9j$-символов, коэффициентов Фано [41]. Оставляя в (8) только члены вида $(u^2/v^2)F_{00}$ получим, что вклад (8) в столкновительный интеграл равен 0.

Преобразуем последнее слагаемое из суммы $\{d_\alpha d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$:

$$-2\sum_{\ell mnqkrs} C^{1k}_{1r\,1s}u^r\left\{\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right\}^s\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}(-1)^q C^{1k}_{1n\,1q}C^{\ell m}_{\ell+1\,q+m\,1\,-q}u_n\Psi_{\ell m}\times\right.$$
$$\left.\times\, Y_{\ell+1\,q+m}(\vartheta,\varphi)\right\} = \sum_{\ell mnpqr}\sqrt{(\ell+1)(\ell+2)}\frac{1}{2\ell+3}C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell+1\,r}_{\ell+1\,q\,1p}\times$$
$$\times\, u^n u_p\left[\frac{d}{dp}\Psi_{\ell m}-\frac{\ell+1}{p}\Psi_{\ell m}\right]Y_{\ell+2\,q}(\vartheta,\varphi)+\sum_{\ell mnpqr}(\ell+1)\times$$
$$\times\left\{\frac{2}{(2\ell+1)(2\ell+3)}C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell+1\,r}_{\ell q\,1p}+\frac{1}{2\ell+1}C^{\ell r}_{\ell m\,1m}C^{\ell r}_{\ell q\,1p}+\frac{1}{2\ell+1}C^{\ell-1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell-1\,r}_{\ell q\,1p}\right\}\times$$
$$\times\, u^n u_p\left[\frac{d}{dp}\Psi_{\ell m}+\frac{\ell+2}{p}\Psi_{\ell m}\right]Y_{\ell q}(\vartheta,\varphi), \qquad (9)$$

используя соотношения

$$\sum_{aps}(-1)^s C^{1a}_{1n\,1p}C^{1a}_{1q\,1s}C^{\ell m}_{\ell+1\,m+s\,1\,-s}C^{\ell+1\,m+s}_{\ell\,m+s-p\,1p}=$$
$$=-3\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)}\sum_{k=\ell+1,\ell,\ell-1;r}C^{kr}_{\ell m\,1n}C^{kr}_{\ell\,m+s-p\,1q}\left\{\begin{matrix}\ell+1 & \ell & 1\\ \ell & k & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\}=$$
$$=-\sqrt{\frac{1}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}\sum_r C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell+1\,r}_{\ell\,m+s-p\,1q}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell+3}{2\ell+1}}\sum_r C^{\ell r}_{\ell m\,1n}C^{\ell r}_{\ell\,m+s-p\,1q}-$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell+3}{2\ell+1}}\sum_r C^{\ell-1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell-1\,r}_{\ell\,m+s-p\,1q},$$

$$\sum_{aps}(-1)^s C^{1a}_{1n\,1p}C^{1a}_{1q\,1s}C^{\ell m}_{\ell+1\,m+s\,1\,-s}C^{\ell+1\,m+s}_{\ell+2\,m+s-p\,1p}=$$
$$=-3\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}\sum_{k=\ell+1,\ell,\ell-1;r}C^{kr}_{\ell m\,1n}C^{kr}_{\ell+2\,m+s-p\,1q}\left\{\begin{matrix}\ell+1 & \ell+2 & 1\\ \ell & k & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\ell-1}{2\ell+1}}\sum_r C^{\ell+1\,r}_{\ell m\,1n}C^{\ell+1\,r}_{\ell+2\,m+s-p\,1q},$$

полученные из формул [41]. Выражение (9) пропорционально u^2/v^2, поэтому оставляем в (9) только члены вида $(u^2/v^2)F_{00}$. В результате получим

$$-2\sum_{\ell mnqkrs} C^{1k}_{1r\,1s}u^r \left\{\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right\}^s \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \times \right.$$
$$\times(-1)^q C^{1k}_{1n\,1q} C^{\ell m}_{\ell+1\,q+m\,1-q} u_n \Psi_{\ell m}\times$$
$$\left.\times\, Y_{\ell+1\,q+m}(\vartheta,\varphi)\right\} = \frac{2}{3}u^2\left[\frac{d}{dp}\Psi_{00}+\frac{2}{p}\Psi_{00}\right]Y_{00}-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{15}}\sum_{snq} C^{2s}_{1n\,1q}u^n u^q\left[\frac{d}{dp}\Psi_{00}-\frac{1}{p}\Psi_{00}\right]\times$$
$$\times\, Y_{2s}(\vartheta,\varphi). \quad (10)$$

Используя (4)–(10), получим окончательное выражение для $\{d_\alpha d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$:

$$\sum_k\{d^k d_k F\} = -\frac{1}{m^2}\sum_{\ell m}\ell(\ell+1)F^*_{\ell m}Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{m}\frac{dF_{00}}{dp}\sum_n u^n Y_{1n}(\vartheta,\varphi)-$$
$$-3\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{m}\sum_{nms}C^{2s}_{1n\,1m}u^n\Psi_{1m}Y_{2s}(\vartheta,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\sum_m u_m\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{1m}}{m}\right)+\frac{2F^*_{1m}}{pm}\right]-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\sum_{nms}C^{2s}_{1n\,1m}u^n\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{1m}}{m}\right)-\frac{F^*_{1m}}{pm}\right]Y_{2s}(\vartheta,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}u^2\left[\frac{d}{dp}\Psi_{00}+\frac{2}{p}\Psi_{00}\right]-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{15}}\sum_{nms}C^{2s}_{1n\,1m}u^n u^m\left[\frac{d}{dp}\Psi_{00}-\frac{1}{p}\Psi_{00}\right]Y_{2s}(\vartheta,\varphi)-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\sum_{nms}C^{2s}_{1n\,1m}u^n\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{F^*_{1m}}{m}\right)-\frac{1}{pm}F^*_{1m}\right]\times$$
$$\times\, Y_{2s}(\vartheta,\varphi). \quad (11)$$

Далее находим член

$$\left\{d_\alpha\frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}\right\}\{d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$$

в (2). Выражение $\{d_\alpha|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^{-1}\}$ умножается на $\{d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$ (4), поэтому учитываем в $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^{-1}$ только первые два члена разложения по u/v. Используя (3), получим

$$\left\{d^k\frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}\right\} = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{2}{pv}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{nm}(-1)^k C^{1m}_{1n\,1-k}u^n Y_{1m}(\vartheta,\varphi) - i\frac{2\sqrt{2}}{3p}\frac{v^2}{c^2}\times$$
$$\times\sum_{nm}C^{1k}_{1n\,1m}u^n u^m - i\frac{4\sqrt{\pi}}{3pv^2}\left(3-2\frac{v^2}{c^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{nmpq}C^{1k}_{1n\,1p}C^{1m}_{2q\,1p}u^n u^m Y_{2q}(\vartheta,\varphi).$$

В полученном выражении учитываем только члены первого порядка по u/v, в результате имеем

$$\left\{d^k\frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}\right\} = -i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{2}{pv}\frac{v^2}{c^2}\times$$
$$\times\sum_{nm}(-1)^m C^{1k}_{1n\,1m}u^n Y_{1\,-m}(\vartheta,\varphi). \quad (12)$$

Умножая (12) на $\{d_\alpha F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\}$ и учитывая только члены $(u^2/v^2)F_{00}, (u/v)F_{00}, F_{00}, (u/v)F_{1m}, F_{1m}, F_{2m}$, получим

$$\sum_k\left\{d^k\frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}\right\}\{d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\} =$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\frac{1}{mE}\sum_m u_m F^*_{1m}-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{mE}\sum_{mnq}C^{2q}_{1n\,1m}u^n F^*_{1m}Y_{2q}(\vartheta,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\frac{u^2}{E}\frac{dF_{00}}{dp}-\sqrt{\frac{2}{15}}\frac{1}{E}\frac{dF_{00}}{dp}\times$$
$$\times\sum_{mnq}C^{2q}_{1n\,1m}u^n u^m Y_{2q}(\vartheta,\varphi). \quad (13)$$

При выводе (13) использовались формулы

$$\sum_{abc}(-1)^c C^{1a}_{1n\,1c}C^{1b}_{1m\,1a}C^{2q}_{1\,-c\,1b} = -\frac{1}{2}C^{2q}_{1n\,1m},$$

$$\sum_{abp}(-1)^b C^{1a}_{1n\,1b}C^{1a}_{1m\,1p}C^{2q}_{1\,-b\,1p} = -\frac{1}{2}(-1)^m C^{2q}_{1n\,1m},$$

полученные с помощью соотношений для сумм произведений коэффициентов Клебша–Гордана из [41].

Слагаемое, связанное с зависимостью транспортного пробега Λ от p, отличной от квадратичной, преобразуем к виду

$$\sum_k\left\{d^k\frac{p^2}{\Lambda}\right\}\{d_k F(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\} =$$
$$=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{m}\sum_m u_m F^*_{1m}+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}u^2\frac{dF_{00}}{dp}-\right.$$

$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{1}{m}\sum_{mnq} C^{2q}_{1n\,1m} u^n F^*_{1m} Y_{2q}(\vartheta,\varphi) - $$
$$-\sqrt{\frac{2}{15}}\,\frac{dF_{00}}{dp}\sum_{mnq} C^{2q}_{1n\,1m} u^n u^m Y_{2q}(\vartheta,\varphi)\Bigg] \times$$
$$\times\left\{\frac{d}{dp}\,\frac{p^2}{\Lambda}\right\}. \quad (14)$$

Левая часть уравнения (1) при разложении по сферическим гармоникам с учетом формул дифференцирования из [41] запишется в виде:

$$\sum_{\ell m} \frac{\partial}{\partial t} F^*_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) +$$
$$+ v\sum_{\ell mnq}\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+3}}\, C^{\ell+1}_{\ell m\,1q} \nabla^q F^*_{\ell m} Y_{\ell+1\,n}(\vartheta,\varphi) -$$
$$- v\sum_{\ell mnq}\sqrt{\frac{\ell}{2\ell-1}}\, C^{\ell-1}_{\ell m\,1q} \nabla^q F^*_{\ell m} Y_{\ell-1\,n}(\vartheta,\varphi) -$$
$$- i\frac{v}{R_0}\sum_{\ell mnq}\sqrt{\ell(\ell+1)}\, C^{\ell\,m+k}_{\ell m\,1k} h^k_0 F^*_{\ell m} Y_{\ell\,m+k}(\vartheta,\varphi) +$$
$$+ \frac{p}{R_0}\sum_{\ell mnq}\sqrt{\frac{\ell}{2\ell-1}}\, C^{\ell-1\,n}_{\ell m\,1q}\Phi_{\ell m}[\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0]^q Y_{\ell-1\,n}(\vartheta,\varphi) -$$
$$- \frac{p}{R_0}\sum_{\ell mnq}\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+3}}\, C^{\ell+1\,n}_{\ell m\,1q}\Psi_{\ell m}[\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0]^q \times$$
$$\times Y_{\ell+1\,n}(\vartheta,\varphi), \quad (15)$$

где

$$[\mathbf{q}\times\mathbf{h}_0]^k = i\sqrt{2}\sum_{mn} C^{1k}_{1n\,1m} q^m h^n_0, \quad \nabla^m = \left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right\}^m.$$

Подставляя полученные выражения (11), (12), (14), (15) в выражение для StF (2) и в (1), получим уравнение (1) с учетом разложения по сферическим гармоникам функции распределения. Умножая это уравнение последовательно на первые пять сферических функций $Y_{\ell m(\vartheta,\varphi)}$ и интегрируя по телесному углу, найдем уравнения для первых пяти моментов функции распределения.

Первые два уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} F^*_{00} + v\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_m \nabla_m F^*_{1m} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}\,R_0}\sum_m [\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0]_m\left[p\frac{d}{dp}F^*_{1m} + 2F^*_{1m}\right] +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}\,\Lambda}\sum_m u_m\left[p\frac{d}{dp}F^*_{1m} + F^*_{1m} + \frac{\Lambda}{p}\left\{\frac{d}{dp}\,\frac{p^2}{\Lambda}\right\}F^*_{1m}\right] +$$
$$+\frac{u^2}{3v\Lambda}\left[p^2\frac{d^2}{dp^2}F_{00} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)p\frac{d}{dp}F_{00} +\right.$$
$$\left.+\Lambda\frac{d}{dp}F_{00}\left\{\frac{d}{dp}\,\frac{p^2}{\Lambda}\right\}\right], \quad (16)$$

$$\frac{\Lambda}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}F^*_{1k} + \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}\nabla^k F_{00} +$$
$$+\sqrt{\frac{2}{5}}\Lambda\sum_{mn} C^{2m}_{1k\,1n}\nabla^n F^*_{2m} +$$
$$+\frac{\Lambda}{R_0}[\mathbf{h}_0\times\mathbf{F}_1]^k - \frac{\Lambda}{\sqrt{3}\,vR_0}[\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0]^k\frac{d}{dp}F_{00} =$$
$$= -F^*_{1k} - \frac{1}{\sqrt{3}\,v}u^k p\frac{d}{dp}F_{00}. \quad (17)$$

Подобная система уравнений для первых двух моментов функции распределения при произвольной зависимости Λ от p получена в [1, 25] без учета второй гармоники, а также в [30], [31] с учетом второй гармоники, но при квадратичной зависимости Λ от p.

В последовательной теории диффузии космических лучей [1, 30, 31] вместо первых трех моментов функции распределения часто употребляют величины $N(\mathbf{r},p,t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{r},p,t)$, $M_m(\mathbf{r},p,t)$, их связь с коэффициентами $F_{\ell m}$ дается разложением:

$$F(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{N(\mathbf{r},p,t)}{4\pi} +$$
$$+\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sum_m \frac{J^*_m(\mathbf{r},p,t)}{v} Y_{1m}(\vartheta,\varphi) +$$
$$+\sqrt{\frac{3}{10\pi}}\sum_m \frac{M^*_m(\mathbf{r},p,t)}{v^2} Y_{2m}(\vartheta,\varphi).$$

Уравнения для второго, третьего и четвертого моментов функции распределения имеют вид:

$$\frac{\Lambda}{3v}\,\frac{\partial}{\partial t}F^*_{2k} + F^*_{2k} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn} C^{2k}_{2m\,1n}F^*_{2m}h^n_0 =$$
$$= -\frac{\Lambda}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\sum_{mn} C^{2k}_{1n\,1m}\nabla^n F^*_{1m} +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{15}}\Lambda\sum_{mn} C^{2k}_{1n\,3m}\nabla^n F^*_{3m} +$$

$$+\frac{\Lambda}{3vR_0}\sqrt{\frac{2}{5}}\sum_{mn}C^{2k}_{1m\,1n}[\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0]^n\left[p\frac{d}{dp}F^*_{1m}-F^*_{1m}\right]-$$
$$-\frac{\Lambda}{3v}\sqrt{\frac{2}{5}}\sum_{mn}C^{2k}_{1m\,1n}\times$$
$$\times u^n\left[2p\frac{d}{dp}F^*_{1m}-F^*_{1m}+\frac{\Lambda}{2p}\left\{\frac{d}{dp}\frac{p^2}{\Lambda}\right\}F^*_{1m}\right]-$$
$$-\frac{\Lambda}{3v^2}\frac{1}{\sqrt{30}}\sum_{mn}C^{2k}_{1n\,1m}u^nu^m\times$$
$$\times\left[p^2\frac{d^2F_{00}}{dp^2}+\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)p\frac{dF_{00}}{dp}+\right.$$
$$\left.+\Lambda\frac{dF_{00}}{dp}\left\{\frac{d}{dp}\frac{p^2}{\Lambda}\right\}\right],\quad(18)$$

$$\frac{\Lambda}{6v}\frac{\partial F^*_{3k}}{\partial t}+F^*_{3k}-i\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn}C^{3k}_{3m\,1n}F^*_{3m}h^n_0=$$
$$=-\frac{\Lambda}{6}\sqrt{\frac{3}{7}}\sum_{mn}C^{3k}_{1n\,2m}\nabla^nF^*_{2m}+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{7}}\Lambda\sum_{mn}C^{3k}_{1n\,4m}\nabla^nF^*_{4m},\quad(19)$$

$$\frac{\Lambda}{10v}\frac{\partial F^*_{4k}}{\partial t}+F^*_{4k}-i\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn}C^{4k}_{4m\,1n}h^n_0F^*_{4m}=$$
$$=-\frac{\Lambda}{15}\sum_{mn}C^{4k}_{3m\,1n}\nabla^nF^*_{3m}+$$
$$+\frac{\Lambda}{6\sqrt{5}}\sum_{mn}C^{4k}_{5m\,1n}\nabla^nF^*_{5m}.\quad(20)$$

Уравнения для второго, третьего и четвертого моментов (18)–(20) получены в пренебрежении членами вида $(u/v)F_{\ell m}$ при $\ell\geq 2$. Это означает, что отношение R_0/Λ не должно быть очень малым, $R_0/\Lambda\gtrsim 0.1$, что выполняется при распространении галактических космических лучей в межпланетном пространстве [42].

3. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ГАРМОНИКИ СУТОЧНОЙ ВАРИАЦИИ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для удобства решения уравнений для мультипольных моментов функции распределения удобно перейти к потокам: полному $\mathbf{j}(\mathbf{r},p,t)$ и диффузионному $\mathbf{i}(\mathbf{r},p,t)$, имеющим размерность плотности числа частиц в фазовом пространстве

$$j^k=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,F^*_{1k}=i^k-\frac{u^k}{v}\frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}.$$

Тогда уравнение для концентрации частиц $N(\mathbf{r},p,t)$ запишется в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+v\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}=\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{h}_0}{R_0}\cdot\left\{p\frac{d}{dp}\mathbf{i}+2\mathbf{i}\right\}+$$
$$+\frac{\mathbf{u}}{\Lambda}\cdot\left[p\frac{d}{dp}\mathbf{i}+\mathbf{i}+\mathbf{i}\frac{\Lambda}{p}\left\{\frac{d}{dp}\frac{p^2}{\Lambda}\right\}\right],\quad(21)$$

аналогичном уравнениям в [1, 25]. Заметим, что, несмотря на то что уравнение (21) не содержит в явном виде высшие моменты функции распределения, связанные со второй и более высокими гармониками в импульсном пространстве, эти высшие моменты входят в уравнение (21) неявным образом через диффузионный поток $\mathbf{i}(\mathbf{r},p,t)$.

В уравнении (17) пренебрегаем членом $\partial\mathbf{j}/\partial t$, считая, что характерное время изменения потока галактических космических лучей за время наблюдения велико, $\tau\gg\Lambda/v$. Введем плотность второй гармоники

$$f^m=\sqrt{\frac{10\pi}{3}}\,F^m_2.$$

Тогда уравнение для потока преобразуется к виду

$$i^k+\frac{\Lambda}{R_0}[\mathbf{h}_0\times\mathbf{i}]^k=$$
$$=-\frac{\Lambda}{3}\nabla^kN-\frac{2\Lambda}{5}\sum_{mn}C^{2m}_{1k\,1n}\nabla^nf^m.\quad(22)$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{i}$, получим:

$$i^k=-\frac{\Lambda}{3}\left(1+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{q^k+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}h^k_0(\mathbf{h}_0\cdot\mathbf{q})-\frac{\Lambda}{R_0}[\mathbf{h}_0\times\mathbf{q}]^k\right\},\quad(23)$$

где

$$q^k=\nabla^kN+\frac{6}{5}\sum_{mn}C^{2m}_{1k\,1n}\nabla^nf^m.\quad(24)$$

В выражении для потока (23), (24) будем учитывать и второй момент f^m, так как из экспериментальных наблюдений при энергиях галактических космических лучей 50–100 ГэВ следует, что относительные величины первой и второй гармоник бывают близки [8]. Через второй момент и выражения для потока (23), (24) в уравнение для $N(\mathbf{r},p,t)$ (21) входят более высокие моменты функции распределения.

Уравнения для высших моментов: второго, третьего и четвертого, будем рассматривать в системе координат с осью $z\parallel\mathbf{h}_0$. Это связано с громоздкостью формул в произвольной системе координат (см. приложение 5 в [40]), а также с тем, что зависимость от углов вектора $\mathbf{h}_0$ удобно выразить через D-функции Вигнера [41].

В уравнении для второго момента (18) будем пренебрегать членами $\partial F_2^k/\partial t$, F_3^m, а в правой части уравнения (18) оставим только первое слагаемое с $\nabla_n F_{1m}$. Это слагаемое, как следует из экспериментальных данных по измерению транспортного пробега Λ, скорости солнечного ветра $\mathbf{u}$, ларморовского радиуса R_0 в регулярной составляющей межпланетного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ для частиц с энергиями 10–100 ГэВ, будет давать максимальный вклад. Таким образом, уравнение (18) запишется в виде:

$$f^k - i\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn} C_{2n\,1m}^{2k} f^n h_0^m = -\frac{\Lambda}{3}\sum_{mn} C_{1m\,1n}^{2k}\nabla^m j^n. \quad (25)$$

Его решение имеет вид:

$$f^k = -\frac{\Lambda}{3}\left\{1 - ik\frac{\Lambda}{3}\,\frac{h_0}{R_0}\right\}^{-1}\sum_{mn} C_{1m\,1n}^{2k}\nabla^m j^n. \quad (26)$$

Используя это решение, можно найти полный член, связанный со вторым моментом функции распределения

$$F_2(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \sum_m F_2^m(\mathbf{r},p,t) Y_{2m}(\vartheta,\varphi).$$

Для определения слагаемых, входящих в F_2, направим ось x перпендикулярно $\mathbf{h}_0$ и параллельно плоскости гелиоэкватора, ось y — перпендикулярно $\mathbf{h}_0$ в сторону Северного полюса. Для второго момента F_2 получим

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = -\frac{\Lambda}{16\pi}\lambda_1\left[\left(I_1 + \frac{2\Lambda}{3R_0}h_0 I_2\right)\cos(2\varphi) - \right.\\ \left. -\left(\frac{2\Lambda}{3R_0}h_0 I_1 - I_2\right)\sin(2\varphi)\right]\times \\ \times\left[1-\cos(2\vartheta)\right] + \frac{\Lambda}{8\pi}\lambda_2\left[\left(-I_3 - \frac{\Lambda}{3R_0}h_0 I_4\right)\cos\varphi - \right.\\ \left. -\left(I_4 + \frac{\Lambda}{3R_0}h_0 I_3\right)\sin\varphi\right]\times \\ \times\sin(2\vartheta) - \frac{\Lambda}{48\pi}I_0\left[1 + 3\cos(2\vartheta)\right], \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \left(1 + \frac{4}{9}\,\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}, \quad \lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{9}\,\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}, \\ &I_1 = \frac{\partial}{\partial x}j_x - \frac{\partial}{\partial y}j_y, \quad I_2 = \frac{\partial}{\partial x}j_y + \frac{\partial}{\partial y}j_x, \\ &I_3 = \frac{\partial}{\partial x}j_z + \frac{\partial}{\partial z}j_x, \quad I_4 = \frac{\partial}{\partial y}j_z + \frac{\partial}{\partial z}j_y, \\ &I_0 = 3\frac{\partial}{\partial z}j_z - \operatorname{div}\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (28)$$

где полагалось $h_0 \equiv h_{0z} = 1$.

Углы ϑ и φ — полярный и азимутальный углы сферической системы координат. Видно, что вкладом второй гармоники (27) в $N(\mathbf{r},p,t)$ можно пренебречь. Очень удобно анализировать наблюдения суточных гармоник от регистраторов, принимающих излучение в плоскости гелиоэкватора. Если пренебрегать наклоном оси вращения Земли к плоскости гелиоэкватора и годовыми колебаниями наклона этой оси к плоскости гелиоэкватора, для анализа подходят наблюдения на мезонных телескопах в направлении на юг под углом 30° и (несколько хуже) в вертикальном направлении [8, 43].

Из экспериментальных данных следует, что $R_0/\Lambda \approx 0.1$ [42, 44], поэтому, считая, что нет аномально больших токов и градиентов N, R_0, Λ, u в нулевом приближении по R_0/Λ, относительная величина второго момента

$$\delta_2(\vartheta) = \frac{F_2}{F_0} = -\frac{3}{4}\,\frac{\Lambda}{N}\,\frac{\partial}{\partial z}j_z\cos(2\vartheta). \quad (29)$$

При получении этой формулы использовалась оценка

$$\operatorname{div}\mathbf{j} \approx \frac{u}{v}\,\frac{j}{R_0} \ll \frac{\partial}{\partial z}j_z,$$

следующая из уравнения (21). Предполагается достаточно большим градиент потока $\partial j_z/\partial z$, связанный, например, с расхождением магнитных силовых линий.

Учитывая конвекционный поток, можно выразить j_z через амплитуду первой гармоники,

$$j_z = \frac{1}{3}\delta_1 N,$$

и для частиц с $E = 10$ ГэВ положить

$$j_z \approx -0.002N\frac{1\ \text{а.е.}}{z}, \quad \Lambda \approx 1\ \text{а.е.},$$

используя [1, 3–9]. Такое предположение, как будет показано ниже, дает значения амплитуд второй, третьей и четвертой гармоник суточной вариации галактических космических лучей, а также фаз второй и третьей гармоник, совпадающие с экспериментом. Из экспериментальных данных [45–47] следует, что азимутальная компонента регулярного межпланетного магнитного поля пропорциональна $1/r^{1.2}$, а радиальная компонента пропорциональна $1/r^2$, где r — радиальное расстояние до Солнца. Учитывая замагниченность частиц, будем считать, что поток космических лучей, параллельный регулярному магнитному полю и направленный к Солнцу, в первом приближении образуется как проекция азимутального потока. Также считаем, что радиальные потоки — диффузионный и конвекционный — компенсируются [4]. Тогда получим оценку (29) $\delta_2 \approx 0.2\%$, а также максимум $\delta_2(\vartheta)$, приходящийся на 3 ч LT, перпендикулярный направлению регулярного магнитного поля, что совпадает с экспериментальными результатами [5, 18–23].

В работах [3, 18] показано, что кроме максимума $\delta_2(\vartheta)$ на 3 ч LT, соответствующего $\partial j_z/\partial z > 0$ в (29), в эксперименте наблюдается максимум на 9 ч LT, связанный с ударными волнами, которому соответствует $\partial j_z/\partial z < 0$ в (29). Изменение знака $\partial j_z/\partial z$ может быть связано как с изменением направления потока космических лучей, так и с изменением градиента тока, что возможно при прохождении Земли через области ударных волн или магнитных пробок.

В работе [43] на основе экспериментальных данных для частиц космических лучей с энергией порядка 50 ГэВ показано, что за период 1971–75 г.г. максимумы j_z приходятся на 6-й ($j_z < 0$) и 12-й месяцы ($j_z > 0$), на эти же месяцы приходятся максимумы второй гармоники с неизменным временем максимума 3 ч LT. Из (29) следует, что неизменность времени максимума $\delta_2(\vartheta)$ связана с изменением направления уменьшения плотности потока космических лучей. Учитывая замагниченность частиц космических лучей, можно предположить, что с одной стороны Солнца, вблизи плоскости гелиоэкватора, магнитные силовые линии в среднем сходились к плоскости гелиоэкватора, а с другой стороны Солнца расходились в период 1971–75 г.г.

Полученная для второй гармоники формула (29) позволяет более подробно определить усредненный механизм образования второй гармоники замагниченных частиц космических лучей. При движении их в регулярной составляющей межпланетного магнитного поля сохраняется адиабатический инвариант $\mathbf{p}_\perp^2/H_0$. Если считать, что силовые линии регулярного межпланетного магнитного поля расходятся с удалением от Солнца, то при движении частиц к Солнцу увеличивается число частиц с питч-углами $\pi/2$ и максимум $\delta_2(\vartheta)$ приходится на 3 ч LT, а при движении частиц от Солнца уменьшается число частиц с питч-углами $\pi/2$ и максимум $\delta_2(\vartheta)$ приходится на 9 ч LT.

В уравнении для третьего момента $F_3^m(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ (19) будем пренебрегать членами $\partial F_{3m}^*/\partial t$ и F_{4m}, которые меньше члена F_3^m, что следует из экспериментальных результатов [24]. Тогда уравнение (19) запишется в виде:

$$F_3^k - i\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn} C_{3m\,1n}^{3k} F_3^m h_0^k = -\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{\Lambda}{6}\sum_{mn} C_{1n\,2m}^{3k}\nabla^n F_2^m.$$

В системе координат с $\mathbf{h}_0 \parallel z$ решение этого уравнения имеет вид

$$F_3^k = -\frac{1}{\sqrt{70\pi}}\,\frac{\Lambda}{2}\left\{1 - ik\frac{\Lambda}{6}\,\frac{h_0}{R_0}\right\}^{-1} \times \sum_{mn} C_{1n\,2m}^{3k}\nabla^n f^m. \quad (30)$$

Подставляя сюда f^m из (26), определим F_3^k через градиенты тока $\mathbf{j}$ и градиенты Λ и R_0. Используя полученные F_3^k, определим полный член, связанный с третьей сферической гармоникой:

$$F_3(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_m F_3^m(\mathbf{r}, p, t) Y_{3m}(\vartheta, \varphi).$$

Учитывая, что для галактических космических лучей в межпланетном пространстве $\operatorname{div}\mathbf{j} \approx uj/vR_0$, полагая $\varphi = 0$, т. е. считая регистраторы направленными в плоскости гелиоэкватора, получим с точностью до членов второго порядка по R_0/Λ:

$$F_3(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{3}{16}R_0\left[\frac{R_0}{\Lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda I_0) + \frac{1}{6}h_0\frac{\partial}{\partial y}(\Lambda I_0) + 6\frac{R_0}{\Lambda}\,\frac{\partial}{\partial z}(R_0 I_4) + \frac{\partial}{\partial z}(R_0 I_3)\right]\sin(3\vartheta) + \frac{\Lambda}{192\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}(\Lambda I_0)\cos(3\vartheta).$$

Для частиц с $E = 10$ ГэВ можно пренебречь членами, пропорциональными R_0/Λ и R_0^2/Λ^2. Тогда относительная величина третьего момента запишется в виде:

$$\delta_3(\vartheta) = \frac{F_3}{F_0} = \frac{\Lambda}{16N}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z}j_z\right)\cos(3\vartheta). \quad (31)$$

Подставляя сюда

$$j_z \approx -0.0002N\frac{1\ \text{а.е.}}{z},$$

найдем $\vartheta_{max} = \pi/3$ и время максимума 5 ч LT, что совпадает, в основном, с экспериментальными данными [21–24]. Относительная амплитуда третьей гармоники для частиц с энергией $E = 10$ ГэВ — порядка $\delta_3 \approx 0.025\%$, что несколько меньше приведенной в [21–24], но, учитывая большой разброс экспериментальных данных, согласие с этими результатами можно считать удовлетворительным.

В уравнении (20) для четвертого момента пренебрегаем членом $\partial F^*_{4m}/\partial t$ и членами F_5^m, которые, по-видимому, меньше F_4^m [24]. Тогда из (20) получим

$$F_4^k - i\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\Lambda}{R_0}\sum_{mn} C^{4k}_{4m\,1n}F_4^m h_0^n = = -\frac{\Lambda}{15}\sum_{mn} C^{4k}_{3m\,1n}\nabla^n F_3^m. \quad (32)$$

В системе координат с $\mathbf{h}_0 \parallel z$ решение этого уравнения имеет вид:

$$F_4^k = -\frac{\Lambda}{15}\left\{1 - ik\frac{\Lambda}{10}\frac{h_0}{R_0}\right\}^{-1}\sum_{mn} C^{4k}_{3m\,1n}\nabla^n F_3^m. \quad (33)$$

Подставляя сюда F_3^m из (30) и f^m из (26) получим выражение для F_4^k через поток $\mathbf{j}$. Отсюда можно найти полное слагаемое, связанное с четвертой сферической гармоникой:

$$F_4(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \sum_m F_4^m(\mathbf{r},\mathbf{p},t)Y_{4m}(\vartheta,\varphi).$$

В первом приближении по R_0/Λ при $\varphi = 0$ получим

$$\begin{aligned} F_4(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{9}{1340\pi}\Lambda\Bigg\{\frac{\partial}{\partial y}\left(R_0\frac{\partial}{\partial x}\Lambda\frac{\partial j_z}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(R_0\frac{\partial}{\partial y}\Lambda\frac{\partial j_z}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z}\Bigg[\frac{\Lambda}{3}\Bigg(\frac{\partial}{\partial y}R_0\left(\frac{\partial}{\partial x}j_z + \frac{\partial}{\partial z}j_x\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}R_0\left(\frac{\partial}{\partial y}j_z + \frac{\partial}{\partial z}j_y\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\cos(4\vartheta). \quad (34) \end{aligned}$$

Относительная величина четвертого момента в нулевом приближении по R_0/Λ имеет вид

$$\delta_4(\vartheta) = \frac{F_4}{F_0} = = -\frac{3\Lambda}{335N}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\right)\cos(4\vartheta). \quad (35)$$

Относительную амплитуду четвертой гармоники для частиц с $E = 10$ ГэВ для потока

$$j_z \approx -0.002N\frac{1\ \text{а.е.}}{z}$$

можно оценить как $\delta_4 \approx 0.01\%$. Это совпадает с экспериментальными данными [24]. Фаза четвертой гармоники, оцениваемая по формуле (35), соответствует максимуму $\delta_4(\vartheta)$ на 0 ч LT. Такой максимум в эксперименте не наблюдается [24]. Максимум $\delta_4(\vartheta)$ на 3 ч LT, наблюдаемый в [24], достигается при

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial}{\partial z}j_z\right)\right) < 0. \quad (36)$$

Это соответствует потоку

$$j_z \approx +0.002N\frac{1\ \text{а.е.}}{z},$$

текущему от Солнца. Такие потоки описаны в [43].

Фазы высших гармоник $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$, совпадающие с экспериментальными данными [21–24], т. е. на 3 ч, 5 ч, 3 ч LT, получаются при следующем значении потока, определенном с использованием пакета *MATHCAD*:

$$j_z = \left(0.12\left(\frac{1\ \text{а.е.}}{z}\right)^2 - -0.44\left(\frac{1\ \text{а.е.}}{z}\right)^{1.2}\right)0.01N. \quad (37)$$

В этом случае $\delta_1 \approx 1\%$, что несколько больше экспериментального значения, а амплитуды остальных гармоник равны $\delta_2 \approx 0.2\%$, $\delta_3 \approx 0.03\%$, $\delta_4 \approx 0.01\%$, что близко к результатам [21–24]. Первое положительное слагаемое в (37) является, в основном, проекцией конвекционного потока, направленного по радиусу от Солнца и параллельного скорости солнечного ветра. В него вносит вклад также диффузионная радиальная составляющая, направленная к Солнцу. Второе отрицательное слагаемое образуется проекцией азимутального диффузионного потока частиц, направленного вдоль силовых линий регулярного межпланетного магнитного поля к Солнцу, степень z в этом слагаемом связана с радиальной зависимостью азимутальной составляющей регулярного межпланетного магнитного поля [45–47]. Данное разделение потоков на конвекционный и диффузионный является приближенным, вклад перекрестных слагаемых пропорционален амплитуде второй гармоники.

Такая структура солнечного ветра и магнитного поля гелиомагнитосферы согласуется с представлениями, развитыми в [16] на основе прямых измерений параметров межпланетной плазмы и магнитного поля космическим аппаратом *Ulysses* [10–15].

При выборе потока частиц в виде (37) получим, что в градиент третьего порядка по z потока j_z и в $\delta_4(\vartheta)$ основной вклад будет вносить первое слагаемое и давать правильное время максимума $\delta_4(\vartheta)$ на 3 ч LT. А в градиенты меньших порядков по z потока j_z и в $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$ основной вклад будет вносить второе слагаемое и давать правильное время максимума $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$ соответственно на 3 ч LT и 5 ч LT.

Таким образом, из механизма образования гармоник $\delta_3(\vartheta)$ и $\delta_4(\vartheta)$ видно, что при $\cos(3\vartheta)$ в (31) и $\cos(4\vartheta)$ в (35) могут стоять множители как больше нуля, которым соответствуют максимумы на 1 ч LT и 3 ч LT, так и меньше нуля, которым соответствуют максимумы $\delta_3(\vartheta)$ и $\delta_4(\vartheta)$ на 5 ч LT и 0 ч LT. Два максимума $\delta_3(\vartheta)$ экспериментально обнаружены в [22]. Максимумы третьей гармоники, как наблюдалось на нейтронных мониторах [22], приходятся на 5 ч LT в период высокой солнечной активности и на 1 ч LT в период низкой солнечной активности. Можно предположить, что в период высокой солнечной активности поток космических лучей, протекающий в плоскости гелиоэкватора и дающий вклад в третью гармонику, направлен к Солнцу, а в период низкой солнечной активности — преимущественно от Солнца.

Заметим, что холловский ток, перпендикулярный $\mathbf{h}_0$, в данном приближении не дает вклада в $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$, хотя имеет значительную величину [40].

В настоящей работе, в отличие от работ [30, 31], посвященных изучению второй гармоники, причиной возникновения $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$ в основном считается изменение геометрии регулярного межпланетного магнитного поля и связанная с этим адиабатическая фокусировка потока частиц космических лучей [21].

В данной работе ток j_z считается заданным, т. е. полагается, что причины его возникновения могут находиться вне области рассмотрения гармоник $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$. Это отличается от механизма образования второй гармоники, рассмотренного в [30, 31], где в $\delta_2(\vartheta)$ подставляется поток $\mathbf{j}$, полученный из уравнения для первой и нулевой гармоник функции распределения. В работах [30, 31] образование $\delta_2(\vartheta)$ связано с пространственными производными от нулевого до второго порядков от величин u, Λ, $N(\mathbf{r}, p, t)$, умножаемых на отношение u/v, при этом суммарная степень градиентов и отношения u/v равна двум. Из-за малости этих величин δ_2, полученная в этих работах, имеет величину порядка u^2/v^2 и значительно меньше экспериментального значения.

При получении формул (29), (31), (35) для гармоник $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$ в уравнении для соответствующего мультипольного момента не учитывался более высокий мультипольный момент функции распределения. Это является итерационной процедурой, основанной на малости амплитуд второй, третьей и четвертой гармоник суточной вариации относительно амплитуды первой. Из опытных данных следует, что амплитуда каждой последующей высшей гармоники в 2–5 раз меньше амплитуды предыдущей [24].

В данной работе уравнения для мультипольных моментов используются несколько шире, чем в [30, 31], так как низшие моменты функции распределения в уравнениях для высших моментов могут быть заданы, например, из эксперимента.

Рассмотрим спектральные энергетические зависимости гармоник суточных вариаций. Используем для этого экспериментальные данные за 1971–75 г.г. и за более ранние периоды [22–24, 48]. Учитывая экспериментальные данные по первой гармонике суточных вариаций [49], будем полагать $j_z/N \propto \mathrm{const}$, которая не зависит от p. Тогда из (31) следует

$$\delta_2 \propto \Lambda(p) \propto p^{0.5-2},$$

что приближенно совпадает с предыдущими представлениями о спектре второй гармоники [9, 48] и близко к экспериментальным данным для энергий частиц космических лучей при $E < E_{cr}$, где E_{cr} — некоторая критическая энергия, при которой происходит излом спектра второй гармоники (степень импульса p становится отрицательной). Для механизма экранировки E_{cr} — это энергия частицы космических лучей, при которой ее ларморовский радиус становится равным половине толщины слоя регулярного межпланетного магнитного поля вблизи плоскости гелиоэкватора. Этот механизм хорошо описывает спектр δ_2 для частиц как с $E < E_{cr}$, так и с $E > E_{cr}$.

Для третьей и четвертой гармоник суточной вариации интенсивности космических лучей, используя (31), (35) и полагая $j_z/N \propto \mathrm{const}$, найдем

$$\delta_3 \propto \Lambda^2(p) \propto p^{1-4}, \quad \delta_4 \propto \Lambda^3(p) \propto p^{2-6} \qquad (38)$$

при $E < E_{cr}$. Спектр получается более жестким по сравнению с экспериментальными данными, согласно которым $\delta_3 \propto p$, $\delta_4 \propto p^{0.5}$, при $E < E_{cr}$ [21–24]. Отличие спектров δ_2, δ_3, δ_4 (38) от экспериментальных результатов и неприменимость данного рассмотрения для δ_2, δ_3, δ_4 при $E > E_{cr}$ связано с применением здесь аналогов диффузионного приближения для высших гармоник, которое заключается в пренебрежении высшей гармоникой в уравнении для данной гармоники. Применимость малоуглового приближения, даже с учетом высших приближений по случайному магнитному полю в столкновительном интеграле, также не вполне ясна.

При $E > E_{cr}$ ларморовский диаметр становится больше толщины слоя регулярного межпланетного магнитного поля и амплитуды гармоник δ_2, δ_3, δ_4 резко уменьшаются.

Приведенные в этом разделе формулы для гармоник $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$ можно уточнить, использовав градиенты R_0, Λ, $\mathbf{j}$. Однако отсутствие четко определенных экспериментальных данных по градиентам R_0, Λ, $\mathbf{j}$ не позволяет использовать дополнительные уточняющие члены в формулах для $\delta_2(\vartheta)$, $\delta_3(\vartheta)$, $\delta_4(\vartheta)$.

Учет в кинетическом уравнении (1) произвольной зависимости $\Lambda \propto p^{\mu}$, $\mu < 2$ дает дополнительные члены в уравнении для F_{2m} (18), а через него и в уравнениях для F_{3m}, F_{4m} (19)–(20). Однако из-за малости $u/v \sim 10^{-3}$ и $R_0/\Lambda \sim 10^{-1}$ в уравнении (18) можно не учитывать эти дополнительные слагаемые. Это означает, что уравнение для F_{2m} без двух последних членов и уравнения для F_{3m}, F_{4m} (19)–(20) справедливы для зависимости Λ от p^{μ} с показателем $\mu < 2$.

4. ГОДОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ГАРМОНИК СУТОЧНЫХ ВАРИАЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С НАКЛОНОМ ЗЕМНОЙ ОСИ

Проведем учет наклона земной оси по отношению к плоскости гелиоэкватора и годовых изменений фазы и амплитуды гармоник суточной вариации интенсивности галактических космических лучей, связанных с годовым изменением угла наклона земной оси по отношению к направлению на Солнце, лежащему в плоскости нейтральной поверхности усредненного крупномасштабного межпланетного магнитного поля, которая считается совпадающей с плоскостью гелиоэкватора. Это означает, что мы не учитываем в мультипольных моментах члены порядка 10^{-2}. Учет таких членов необходимо проводить, по-видимому, одновременно с учетом других уточняющих условий, например отклонения направления крупномасштабного межпланетного магнитного поля от усредненного и т. д.

Математически задача сводится к выделению в каждом мультипольном моменте $F_{\ell m}$ множителей, зависящих только от направления вектора $\mathbf{h}_0$.

Системы координат, применяемые в данной работе, совпадают с приведенными в [3]. Примененные в данном разделе формулы преобразования единым образом, более просто, чем в [3, 8], описывают преобразования мультипольных моментов со второго по четвертый. Все вычисления проводятся аналитически, что позволяет более аккуратно оценить влияние физических параметров на каждом этапе вычислений, а также легко использовать результаты вычислений при измененных физических параметрах и функции распределения.

Будем условно считать $\mathbf{h}_0$ направленным от Солнца, случай противоположного направления $\mathbf{h}_0$ легко получается из рассмотренного. При повороте системы координат функции $F_{\ell m}$ преобразуются с помощью D-функций Вигнера [41]:

$$F''_{\ell m}(\mathbf{r}'', p'', t) = \sum_k F^k_{\ell}(\mathbf{r}, p, t) D^{\ell *}_{km}(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (39)$$

где $F''_{\ell m}(\mathbf{r}'', p'' t)$ — мультипольные моменты функции распределения, умноженные на $Y_{\ell m}(\vartheta'', \varphi'')$ в повернутой системе координат, α, β, γ — углы Эйлера [41]. Поворот системы координат будем производить по схеме A (см. [41]). Переход из системы координат с осью $z \parallel \mathbf{h}_0$ в географическую систему координат x'', y'', z'', связанную с Землей, удобно проводить в два приема, аналогично [3]. Предполагается, что регулярное межпланетное магнитное поле направлено под углом ϑ_0 к направлению на Северный полюс мира и под углом φ_0 к направлению от Солнца в плоскости гелиоэкватора.

Первоначально проводим преобразование из системы координат с осью $z \parallel \mathbf{h}_0$ (ось x направлена в сторону Южного полюса, а ось y лежит в плоскости гелиоэкватора) в систему координат с осью z', направленной на Северный полюс параллельно оси вращения Солнца и осью x', направленной по радиусу от Солнца в плоскости гелиоэкватора.

Вторым поворотом проводим преобразование в систему координат с осью z'', совпадающей с осью вращения Земли, т. е. наклоненной под углом $\delta = 23.5^\circ$ к оси z'. Ось x'' направлена в сторону от Солнца. Ось y'' направлена перпендикулярно к направлению на Солнце.

Матрица результирующего сложного поворота имеет вид:

$$D^{\ell *}_{mn}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ = \sum_k D^{\ell *}_{mk}(0, -\vartheta_0, -\varphi_0) D^{\ell *}_{kn}(\Phi, \delta, -\Phi), \qquad (40)$$

где ϑ_0, φ_0 — полярный и азимутальный углы, определяющие направление вектора $\mathbf{h}_0$ в системе координат x', y', z', угол Φ определяет направление оси поворота координатной оси z' на угол δ, $\Phi = -2\pi t/T$,

T — номер месяца. С учетом этих определений и формул из [41] углы α, β, γ определяются с помощью соотношений

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}\alpha=\cos\vartheta_0\operatorname{ctg}(\Phi-\varphi_0)-\operatorname{ctg}\delta\frac{\sin\vartheta_0}{\sin(\Phi-\varphi_0)},\\ \cos\beta=\cos\delta\cos\vartheta_0+\sin\delta\sin\vartheta_0\cos(\Phi-\varphi_0),\\ \operatorname{ctg}(\gamma+\Phi)=\cos\delta\operatorname{ctg}(\Phi-\varphi_0)-\\ -\operatorname{ctg}\vartheta_0\frac{\sin\delta}{\sin(\Phi-\varphi_0)}.\end{gathered}\qquad(41)$$

Функция $D^{\ell *}_{mn}(\alpha,\beta,\gamma)$ представляется в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых зависит только от одного угла Эйлера [41]:

$$D^{\ell *}_{mn}(\alpha,\beta,\gamma)=\exp(im\alpha)d^{\ell}_{mn}(\beta)\exp(in\gamma),\qquad(42)$$

где $d^{\ell}_{mn}(\beta)$ — вещественные функции, явный вид которых приведен в [41] и в приложении 9 в [40].

Обратные преобразования мультипольных моментов $F''_{\ell m}(\mathbf{r}'',p'',t)$ из географической системы координат в систему координат с $z\parallel\mathbf{h}_0$ даются формулой (39) с использованием обратных D-функций Вигнера:

$$\left[D^{\ell *}_{mn}(\alpha,\beta,\gamma)\right]^{-1}=D^{\ell}_{nm}(\alpha,\beta,\gamma).\qquad(43)$$

Переход к обратным преобразованиям в данной методике значительно проще, чем при использовании декартовой системы координат [3, 9]. Ясно, что последовательное исследование гармоник суточной вариации интенсивности космических лучей должно проводиться с помощью определения из экспериментальных данных мультипольных моментов $F''_{\ell m}$ в системе координат x'', y'', z'' и пересчета их в систему координат $z\parallel\mathbf{h}_0$ с использованием обратных D-функций Вигнера (43).

Решение кинетического уравнения в системе координат с осью $z\parallel\mathbf{h}_0$ совместно с формулой преобразования (39) и с использованием D-функций Вигнера $D^{\ell *}_{mk}(0,-\vartheta_0,-\varphi_0)$ дают решения кинетического уравнения (1) с произвольным направлением регулярного межпланетного магнитного поля $\mathbf{h}_0(\vartheta_0,\varphi_0)$.

Приведенные выше формулы позволяют найти годовые изменения амплитуды и фазы второй, третьей и четвертой гармоник суточной вариации интенсивности галактических космических лучей, связанные с наклоном земной оси к плоскости гелиоэкватора. Для этого будем считать, что $\mathbf{h}_0$ направлен под углами $\vartheta_0=\pi/2$ и $\varphi_0=-\pi/4$ в системе координат x', y', z', связанной с Солнцем.

Вторую гармонику суточных вариаций в системе координат с $z\parallel\mathbf{h}_0$ можно представить в виде (29):

$$F_2=F_{20}Y_{20}(\vartheta,\varphi),$$

где

$$F_{20}=-a_2\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{5\pi}}N,\quad a_2=\frac{3}{4}\frac{\Lambda}{N}\frac{\partial j_z}{\partial z},\quad a_2>0,$$

a_2 — относительная амплитуда второй гармоники. Не зависящий от углов постоянный член, возникающий при таком представлении, дает малый вклад в изотропную составляющую, им пренебрегаем. В географической системе координат x'', y'', z'' вторая гармоника суточных вариаций имеет вид

$$\begin{gathered}F''_2(\vartheta'',\varphi'')=-a_2\frac{N}{4\pi}\left[\sin^2\beta_0\sin^2\vartheta''\cos2(\varphi''+\gamma_0)-\right.\\ -4\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\vartheta''\cos\vartheta''\times\\ \left.\times\cos(\varphi''+\gamma_0)+f_2\right],\end{gathered}\qquad(44)$$

где f_2 — член, не зависящий от угла φ'' и, таким образом, не дающий вклада в гармоники суточных вариаций. Второе слагаемое в (44) дает вклад в первую гармонику суточных вариаций. Углы β_0 и γ_0 имеют вид (см. (П8.18), (П8.19) в [40]):

$$\begin{gathered}\beta_0=-\frac{\pi}{2}+\sin\delta\cos\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right),\\ \gamma_0=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cos\delta\sin^2\delta\sin\left(2\left(\Phi+\frac{\pi}{4}\right)\right).\end{gathered}\qquad(45)$$

Третью гармонику суточных вариаций в системе координат с $z\parallel\mathbf{h}_0$ можно представить в виде (31):

$$F_3=-a_3\frac{N}{4\pi}\cos(3\vartheta)\approx F_{30}Y_{30}(\vartheta,\varphi),\qquad(46)$$

где

$$F_{30}=-a_3\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{7\pi}}N,\quad a_3=-\frac{1}{16}\frac{\Lambda}{N}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial j_z}{\partial z}\right),$$

$$a_3>0.$$

Вкладом этой третьей гармоники в первую будем пренебрегать. Используя формулы преобразования мультипольных моментов $F_{\ell k}(\mathbf{r},p,t)$ (39), находим выражение для третьей гармоники в географической системе координат:

$$\begin{gathered}F''_3(\vartheta'',\varphi'')=\\ =-a_3\frac{N}{4\pi}\left[-\sin^3\beta_0\sin^3\vartheta''\cos\left(3(\varphi''+\gamma_0)\right)+\right.\\ +6\sin^2\beta_0\cos\beta_0\sin^2\vartheta''\cos\vartheta''\cos\left(2(\varphi''+\gamma_0)\right)+\\ +\frac{3}{5}\sin\beta_0(1-5\cos^2\beta_0)(5\cos^2\vartheta''-1)\times\\ \left.\times\sin\vartheta''\cos(\varphi''+\gamma_0)+f_3\right],\end{gathered}\qquad(47)$$

где f_3 — член, не зависящий от угла φ'', т. е. дающий малый вклад в изотропную составляющую, которым пренебрегаем. Второе слагаемое дает вклад во вторую гармонику, а третье — в первую гармонику.

Четвертую гармонику в системе координат с осью $z \parallel \mathbf{h}_0$ можно записать в виде (35):

$$F_4 = a_4 \frac{N}{4\pi} \cos(4\vartheta) \approx F_{40} Y_{40}(\vartheta, \varphi), \qquad (48)$$

где $a_4 > 0$ и учтены приближения, заданные в разд. 3,

$$F_{40} = a_4 \frac{32}{105\sqrt{\pi}} N,$$

$$a_4 = -\frac{3}{335} \frac{\Lambda}{N} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\Lambda \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \right).$$

Такое представление четвертой гармоники дает вклад во вторую гармонику порядка $0.1 a_4 N$ и в изотропную составляющую порядка $0.05 a_4 N$. Этими вкладами пренебрегаем, так как точность измерения второй гармоники невелика [18–24].

Пользуясь формулами перехода к географической системе координат (39), (40), находим:

$$\begin{aligned} F_4''(\vartheta'', \varphi'') = a_4 \frac{N}{4\pi} \Big[& \sin^4 \beta_0 \sin^4 \vartheta'' \times \\ & \times \cos(4(\varphi'' + \gamma_0)) - 8 \sin^3 \beta_0 \cos \beta_0 \sin^3 \vartheta'' \cos \vartheta'' \times \\ & \times \cos(2(\varphi'' + \gamma_0)) - \frac{4}{7} \sin^2 \beta_0 (1 - 7\cos^2 \beta_0) \times \\ & \times (7\cos^2 \vartheta'' - 1) \sin^2 \vartheta'' \cos(2(\varphi'' + \gamma_0)) + \\ & + \frac{8}{7} \sin \beta_0 \cos \beta_0 (3 - 7\cos^2 \beta_0)(7\cos^2 \vartheta'' - 3) \times \\ & \times \sin \vartheta'' \cos \vartheta'' \cos(\varphi'' + \gamma_0) + f_4 \Big], \end{aligned} \qquad (49)$$

где член f_4 дает малый вклад в изотропную составляющую N, поэтому этим слагаемым пренебрегаем. Второе, третье и четвертое слагаемые в (49) дают вклад в третью, вторую и первую гармоники.

Из формул для второй, третьей и четвертой гармоник (44), (47), (49) видно, что высшая гармоника суточных вариаций в системе координат с $z \parallel \mathbf{h}_0$ вследствие наклона земной оси к плоскости гелиоэкватора дает вклад в низшие гармоники суточных вариаций, а изменение наклона земной оси по отношению к направлению на Солнце дает годовые изменения вклада в гармоники.

Особенно велик вклад второй гармоники в первую — порядка a_2. Учитывая близость амплитуд первой и второй гармоник, этот вклад может быть заметен [8, 27]. Кроме того, происходит изменение фазы суточных гармоник на величину $m'' \cdot 0.15$ ч (m'' — номер гармоники) с периодом 0.5 года и модуляция суточных гармоник по амплитуде с периодом 1 год.

Также происходит изменение знака слагаемых, дающих вклад в некоторые низшие гармоники с периодом 1 год. Модуляция самих высших гармоник, возникающая из-за изменения угла между земной осью и направлением на Солнце, достаточно мала и составляет 1/5 и менее амплитуды высшей гармоники.

5. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ С УЧЕТОМ ВТОРОГО МОМЕНТА

Представляет большой интерес получить уравнение диффузии для концентрации частиц $N(\mathbf{r}, p, t)$ с учетом второго мультипольного момента в разложении функции распределения $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в ряд по углам импульса. Это сделано в [1, 42] с учетом малости анизотропной добавки к функции распределения. Однако методика усреднения, использованная в этих работах, в основном применима для рассмотрения малоэнергичных частиц, для которых ларморовский радиус в регулярном магнитном поле мал по сравнению с корреляционной длиной случайного магнитного поля, $R_0 \ll L_c$, а движение частицы является одномерным. Здесь будет рассмотрен случай $R_0 > L_c$ и учет второй гармоники будет соответствовать учету в уравнении диффузии следующих членов по параметру $\Lambda/\Delta L_1$, где ΔL_1 — характерный масштаб изменения параметров системы, при $R_0 \to \infty$ или по параметру $R_0/\Delta L_1$ при $R_0 < \Lambda$.

Для получения уравнения диффузии, учитывающего вторую гармонику, удобно воспользоваться уравнением (21). Заметим, однако, что в правой и левой частях уравнения (21) стоят члены разного порядка малости. Если не учитывать член $\partial N/\partial t$, то в левой части уравнения слагаемое

$$v \operatorname{div} \mathbf{j} \sim \frac{cj}{1 \text{ а.е.}},$$

что связано с расходимостью силовых линий $\mathbf{H}_0$ в плоскости гелиоэкватора и с замагниченностью частиц, хотя суммарный член

$$v \operatorname{div} \mathbf{j} \sim \frac{uj}{R_0},$$

как следует из (21). Таким образом, в правой части уравнения (21) стоят члены порядка 10^{-2}–10^{-3} от наибольших членов в левой части этого уравнения.

Поэтому подставим в член $v\operatorname{div}\mathbf{j}$ диффузионный ток $\mathbf{i}$ с учетом второй гармоники из формул (23), (24), а в правую часть уравнения (21) подставим диффузионный ток $\mathbf{i}$ без учета второй гармоники, т. е. отбросим второй член в формуле для q^k (24).

Можно показать, что при этом не нарушается закон сохранения числа частиц. Для этого воспользуемся методикой [1, 50], распространив ее на случай произвольной зависимости Λ от p. Подставив в правую часть (21) диффузионный ток $\mathbf{i}$ без учета второй гармоники и воспользовавшись соотношением

$$p\frac{\partial}{\partial p}\chi_{km} = -\chi_{km}\frac{p^2}{\Lambda}p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Lambda}{p^2}\right) + \\ + 2\chi_{km}\left(1+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{p^2}{\Lambda}p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Lambda}{p^2}\right)\right) - \\ -\frac{\Lambda}{3}\left(1+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}\left[2\frac{\Lambda^2}{R_0^2}h_{0k}h_{0m}\left(1+\frac{p^2}{\Lambda}p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Lambda}{p^2}\right)\right) - \right. \\ \left. -\frac{\Lambda}{R_0}\varepsilon_{knm}h_{0n} - \frac{p}{\Lambda}p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Lambda}{p^2}\right)\varepsilon_{knm}h_{0n}\right], \quad (50)$$

где ε_{knm} — единичный полностью антисимметричный тензор Леви–Чивита, а

$$\chi_{km} = -\frac{\Lambda}{3}\left(1+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1}\times \\ \times\left(\delta_{km}+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}h_{0k}h_{0m}+\frac{\Lambda}{R_0}\varepsilon_{kmn}h_{0n}\right), \quad (51)$$

представим правую часть (21) в виде:

$$-\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)N - \frac{p}{3}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial}{\partial p}N = \\ = -\frac{1}{3p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^3\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)N\right). \quad (52)$$

Подставляя эту правую часть в (21), умножая получившееся уравнение на p^2 и интегрируя его по всему импульсному пространству, получим

$$\frac{\partial N^*}{\partial t} + v\operatorname{div}\mathbf{j}^* = -\frac{1}{3}\left[p^3\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)N^*\bigg|_{p=\infty} - \right. \\ \left. - p^3\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)N^*\bigg|_{p=0}\right], \quad (53)$$

где

$$N^*(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty dp\,p^2N(\mathbf{r},p,t),$$

$$\mathbf{j}^*(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty dp\,p^2\mathbf{j}(\mathbf{r},p,t).$$

Учитывая данные по спектрам космических лучей, находим, что правая часть (53) равна нулю независимо от значения тока, подставляемого в левую часть уравнения (53). Видно, что на асимптотический спектр концентрации космических лучей $N\propto p^{-\gamma}$ накладывается ограничение $\gamma>3$.

Подставляем в $v\operatorname{div}\mathbf{j}$ выражение для тока, учитывающее вторую гармонику по формулам (23), (24). Далее подставляем в (21) выражение для второй гармоники через первую (26).

Таким образом, получим уравнение диффузии, которое в системе координат с $z\parallel\mathbf{h}_0$ имеет вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}v\chi_{\alpha\beta}\frac{\partial N}{\partial x_\beta} + \mathbf{u}\cdot\frac{\partial N}{\partial\mathbf{r}} - \operatorname{div}\mathbf{u}\frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p} = \\ = \left[-\frac{2}{5}v\sum_{mpq}C^{2m}_{1q\,1p}\frac{\partial}{\partial x_p^*}\left(1+\frac{\Lambda^2}{R_0^2}\right)^{-1} - \right. \\ -\frac{2}{5}v\sum_{mq}C^{2m}_{1q\,10}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(1+\frac{R_0^2}{\Lambda^2}\right)^{-1} + \\ \left. + i\frac{2}{5}v\sum_{mpn}C^{2m}_{1q\,1n}\frac{\partial}{\partial x_n^*}\frac{n\Lambda}{\Lambda/R_0+R_0/\Lambda}\right]\frac{\partial}{\partial x_q^*}b_m, \quad (54)$$

где b_m определяется по формуле

$$b_m = \frac{\Lambda}{3}\left(1-im\frac{\Lambda}{3R_0}\right)^{-1}\sum_{qn}C^{2m}_{1q\,1n}\nabla^q j^n,$$

в которой не учитывается второй момент тока. Это позволяет получить замкнутую систему уравнений относительно $N(\mathbf{r},p,t)$. Исследуем решение этого уравнения в простом сферически-симметричном случае для частиц космических лучей достаточно больших энергий.

Согласно [5–9, 51, 52] сильное регулярное магнитное поле с волнистой нулевой поверхностью имеет вид близкий к сферически-симметричному. Толщина нулевой поверхности, по-видимому, также мала. Поэтому для частиц космических лучей с $E\gtrsim 100$ ГэВ основной вклад в изменение концентрации космических лучей $N(\mathbf{r},p,t)$ создают области гелиомагнитосферы на достаточно больших широтах, где структура межпланетного магнитного поля для частиц больших энергий сферически-симметрична [12, 16]. Такое приближение имеет еще больший смысл в период максимума солнечной активности [8], когда межпланетное магнитное поле имеет более «растрепанный» вид.

Положим $H_0=0$ и будем считать, что $\Lambda=\text{const}$ и $u=\text{const}$ в области модуляции. Перейдем от коэффициентов Клебша–Гордана к $3jm$-символам по формулам [41]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_3+m_2+2j_1} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} C^{j_3 m_3}_{j_1\, -m_1\, j_2\, -m_2}.$$

Будем использовать соотношение для суммы, содержащей произведение $3jm$-символов [41]:

$$\sum_k (-1)^{q-k} \begin{pmatrix} a & b & q \\ \alpha & \beta & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & c \\ k & \delta & \gamma \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{2a} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi}(2x+1) \times \\ \times \begin{pmatrix} a & b & x \\ \alpha & \gamma & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \xi & \delta & \beta \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{Bmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{Bmatrix}, \quad (55)$$

где $\begin{Bmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{Bmatrix}$ — $6jm$-символ [41]. Представим правую часть (54) в виде

$$\frac{4}{45} v\Lambda^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{j},$$

где Δ — оператор Лапласа. Полностью уравнение диффузии (54) для $N(\mathbf{r}, p, t)$ для сферически-симметричного случая запишется в виде:

$$\frac{3}{v}\frac{\partial N}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} - \frac{2\Lambda}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{3u}{v}\frac{\partial N}{\partial r} - \\ - \frac{2up}{vr}\frac{\partial N}{\partial p} = \frac{4}{45}\Lambda^3 \frac{\partial^4 N}{\partial r^4} + \frac{16}{45 r}\Lambda^3 \frac{\partial^3 N}{\partial r^3}. \quad (56)$$

Будем решать стационарную задачу и положим

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad N \propto p^{-\gamma}, \quad \gamma = 4.5.$$

Допустим, что на границе области модуляции на расстоянии r_0 от Солнца концентрация космических лучей равна N_0. Введем

$$y' = \tau - \tau_0, \quad \tau = \frac{3ur}{v\Lambda}, \quad \tau_0 = \frac{3ur_0}{v\Lambda}.$$

Представим отношение N/N_0 в виде:

$$\frac{N}{N_0} = 1 + q_1 y' + q_2 y'^2 + q_3 y'^3 + q_4 y'^4. \quad (57)$$

Подставляя это выражение в (56) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y', запишем решение (56), учитывая, что $u/v \ll 1$. Выписывая только первые три члена разложения (57), получим:

$$\frac{N}{N_0} = 1 + \frac{2\gamma}{3}(\tau - \tau_0) \times \\ \times \left[2 - \tau_0 + \frac{\tau_0}{3}\left(1 + \frac{2\gamma}{3}\right) + \frac{16u^2}{3v^2}\right]^{-1} + \\ + \frac{\gamma}{3}\left(1 + \frac{2\gamma}{3}\right)(\tau - \tau_0)^2 \times \\ \times \left[2 - \tau_0 + \frac{\tau_0}{3}\left(1 + \frac{2\gamma}{3}\right) + \frac{16u^2}{3v^2}\right]^{-1} \times \\ \times \left(3 - \frac{\gamma - 3}{6}\tau_0 + \frac{6u^2}{v^2}\right)^{-1}. \quad (58)$$

Видно, что для космических лучей с энергией $E \gtrsim 100$ ГэВ имеем $\tau \ll 1$, следовательно, нет необходимости выписывать следующие члены разложения.

Учет второй гармоники приводит к увеличению относительной концентрации космических лучей на величину порядка относительной величины второй гармоники, которая при сферически-симметричной области модуляции и $\Lambda = \mathrm{const}$ имеет значение порядка u^2/v^2 [30, 31].

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе из кинетического уравнения с мелкомасштабным интегралом столкновений, учитывающего высшие приближения по случайному полю, используя методы квантовой теории углового момента, получены и решены в стационарном случае уравнения для высших мультипольных моментов функции распределения в пространстве углов импульса. Конечные формулы для относительных величин высших моментов получены в итерационном приближении, где параметром малости служит отношение амплитуды высшей гармоники к амплитуде предыдущей низшей гармоники. Из экспериментальных данных [21–24] видно, что величина этого отношения порядка $1/5$–$1/2$.

Показано, что экспериментально наблюдаемые высшие гармоники суточных вариаций галактических космических лучей можно объяснить изменением суммарной плотности двух потоков космических лучей. Во-первых, направленного к Солнцу диффузионного потока космических лучей, изменяющегося из-за адиабатической фокусировки в расходящихся силовых линиях регулярного межпланетного магнитного поля. Этот поток дает основной вклад во вторую и третью гармоники суточных вариаций и может образовываться вне рассматриваемой области. Во-вторых, радиального конвективного потока космических лучей, направленного от Солнца и дающего основной вклад в четвертую гармонику суточных вариаций.

Радиальные потоки при этом компенсируются, а результирующий азимутальный поток дает суточную вариацию с направлением на 18 ч LT. Эта картина во многом качественная, так как условия диффузионного приближения в околоземном пространстве для галактических космических лучей нарушаются. Такая картина согласуется с предыдущими представлениями и со структурой потоков, получаемой из экспериментальных данных по спектру, амплитуде, фазе и долгопериодным изменениям первой гармоники суточной вариации галактических космических лучей с циклом солнечной активности [3, 4, 8, 9].

Показано, что для галактических космических лучей часто применимо приближение замагниченности в регулярном магнитном поле. А радиальные зависимости радиальной и азимутальной составляющих регулярного межпланетного магнитного поля и приближенная сферически-симметричная структура скорости солнечного ветра согласуются с полученными экспериментально гармониками суточных вариаций. Относительная стабильность наблюдаемых амплитуд и фаз высших гармоник и сильная чувствительность вычисляемых по формулам (29), (31), (35) гармоник к относительным амплитудам и радиальным зависимостям потоков галактических космических лучей свидетельствуют о некоторой стационарности потоков космических лучей в гелиомагнитосфере и наличии турбулентной зоны в переходной области между гелиомагнитосферой и межзвездной средой [53]. Достаточно большой радиальный конвективный поток космических лучей вблизи орбиты Земли свидетельствует о приблизительном выполнении условий диффузионного приближения в радиальном направлении, т. е. о малости поперечной относительно регулярного поля диффузии, которая может быть связана с анизотропией и волокнистой структурой случайного межпланетного магнитного поля [3, 54].

Для периода минимальной солнечной активности 1971–75 гг. в [43] представлены вариации мюонной интенсивности на глубине 0 м в.э., связанные с вариациями интенсивности космических лучей с энергией порядка 50 ГэВ. Там же показано, что в этот период максимумы j_z приходятся на 6-й ($j_z < 0$) и 12-й месяцы ($j_z > 0$), на эти же месяцы приходятся максимумы второй гармоники с неизменным временем максимума 3 ч LT. Неизменность времени максимума $\delta_2(\theta)$ соответствует изменению направления уменьшения плотности потока космических лучей. Считая частицы космических лучей замагниченными, можно предположить, что с одной стороны Солнца, вблизи плоскости гелиоэкватора, магнитные силовые линии в среднем сходились к плоскости гелиоэкватора, а с другой стороны — расходились, для масштабов порядка 0.4 а.е. Причиной этого может быть взаимодействие гелиомагнитосферы и магнитного поля Галактики и пересоединение магнитных силовых линий межпланетного и межзвездного магнитных полей [53].

Максимумы третьей гармоники, полученные из наблюдений на нейтронных мониторах [22], применимых на поперечных относительно регулярного поля масштабах порядка 0.05 а.е., приходятся на 5 ч LT в период высокой солнечной активности и на 1 ч LT в период низкой солнечной активности. Таким образом, можно предположить, что в период высокой солнечной активности поток космических лучей, дающий основной вклад в третью гармонику, был направлен к Солнцу, т. е. основной вклад в третью гармонику давало второе слагаемое в (37). А в период низкой солнечной активности поток космических лучей был направлен преимущественно от Солнца, т. е. основной вклад в третью гармонику давало первое слагаемое в (37). Это может быть связано с изменением геометрии регулярного магнитного поля.

Правильное время максимума четвертой гармоники суточных вариаций галактических космических лучей и значение амплитуды, близкое к экспериментальному, будет давать радиальная составляющая конвекционного тока космических лучей, направленная от Солнца.

Как видно из формул для второго, третьего и четвертого моментов функции распределения (44), (47), (49), записанных в географической системе координат, высший момент функции распределения в системе координат с $z \parallel \mathbf{h}_0$ вследствие наклона земной оси к плоскости гелиоэкватора дает вклад в низшие моменты функции распределения в географической системе координат. Изменение наклона земной оси по отношению к направлению на Солнце дает годовые изменения вклада в моменты функции распределения и гармоники суточных вариаций. Учитывая малость угла между осью вращения Земли и направлением, перпендикулярным к плоскости эклиптики (угол $\delta = 23.5°$), можно выделить основной характер вклада в моменты функции распределения в географической системе координат. Происходит изменение фазы суточных гармоник на величину порядка 0.4 ч с периодом 0.5 года и их незначительная модуляция по амплитуде с периодом 1 год. Происходит изменение знака слагаемых, дающих вклад в некоторые низшие гармоники с периодом 1 год. Достаточно большой вклад в первую гармонику дает вторая гармоника. Модуляция самих высших гармоник, возникающая из-за годового изменения угла между земной осью и направлением на Солнце, достаточно мала и составляет примерно $1/5$ и менее от амплитуды высшей гармоники.

В данной работе получено уравнение диффузии, использующее решение уравнения для второго момента функции распределения в системе координат с $z \parallel \mathbf{h}_0$. Полученное уравнение диффузии решено для стационарного режима в сферически-симметричном случае при $H_0 = 0$. Такое приближение применимо для космических лучей с энергией больше 100 ГэВ в период максимума солнечной активности. Учет второго момента функции распределения в сферически-симметричном случае приводит к увеличению относительной концентрации частиц на величину порядка относительной величины амплитуды второй гармоники. Величина последней имеет порядок u^2/v^2 при $\Lambda = \mathrm{const}$ и сферически-симметричной области модуляции.

Автор благодарит А. З. Долгинова, Д. А. Варшаловича, И. Н. Топтыгина за обсуждение некоторых вопросов данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-02-17553).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Топтыгин, *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*, Наука, Москва (1983).
2. А. М. Быков, И. Н. Топтыгин, УФН **163**, 19 (1993).
3. Г. Ф. Крымский, А. И. Кузьмин, П. А. Кривошапкин и др., *Космические лучи и солнечный ветер*, Наука, Новосибирск (1981).
4. Л. И. Дорман, *Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей*, Наука, Москва (1975).
5. J. G. Ables, K. G. Mc Cracen, and U. R. Rao, in *Proc. 9th ICCR*, London (1965), Vol. 1, p. 208.
6. A. I. Kusmin, G. F. Krymsky, A. M. Altukhov et al., in *Proc. 9th ICCR*, London (1965), Vol. 1, p. 501.
7. П. А. Кривошапкин, Г. Ф. Крымский, А. И. Кузьмин, Г. В. Скрипин, Геомагн. и аэрономия **9**, 228 (1969).
8. А. И. Кузьмин, *Вариации космических лучей и солнечная активность*, Наука, Москва (1968).
9. *Распределение галактических космических лучей и динамика структурных образований в солнечном ветре*, под ред. А. И. Кузьмина, Якутский филиал СО АН СССР, Якутск (1973).
10. J. L. Phillips, S. J. Bame, A. Barnes et al. , Geophys. Res. Lett. **22**, 3301 (1995).
11. J. L. Phillips, S. J. Bame, A. Barnes et al. , Geophys. Res. Lett. **22**, 3305 (1995).
12. E. J. Smith and A. Balogh, Geophys. Res. Lett. **22**, 3317 (1995).
13. E. J. Smith and R. G. Marsden, Geophys. Res. Lett. **22**, 3297 (1995).
14. E. J. Smith, R. G. Marsden, and D. E. Page, Science **268**, 1005 (1995).
15. J. L. Phillips, S. J. Bame, W. C. Feldman et al., Science **268**, 1030 (1995).
16. И. С. Веселовский, О. А. Панасенко, Изв. РАН, сер. физ. **62**, 1819 (1998).
17. J. J. Quenbi and B. Lietti, Planet. Space Sci. **16**, 1209 (1969).
18. R. P. Kane, J. Geophys. Res. **80**, 470 (1975).
19. H. S. Ahluwalia and M. M. Fikani, J. Geophys. Res. **101**, 11075 (1996).
20. H. S. Ahluwalia and M. M. Fikani, J. Geophys. Res. **101**, 11087 (1996).
21. J. W. Bieber, M. A. Pomerantz, and G. H. Tsao, in *Proc. 22th ICRC*, Bangalore (1983), Vol. 3, p. 289.
22. T. Kanno, Y. Ishida, and T. Saito, in *Proc. 14th ICRC*, München (1975), Vol. 4, p. 1231.
23. K. Nagashima, Z. Fujii, K. Fujimoto et. al., in *Proc. 15th ICRC*, Plovdiv (1977), Vol. 4, p. 72.
24. K. Nagashima, J. Kondo, Z. Fuyii, and K. Fujimoto, in *Proc. 15th ICRC*, Plovdiv (1977), Vol. 4, p. 78.
25. A. Z. Dolginov and I. N. Toptygin, Icarus **3**, 54 (1968).
26. L. I. Dorman and M. E. Katz, Space Sci. Rev. **20**, 529 (1977).
27. Ю. П. Мельников, Геомагн. и аэрономия **24**, 371 (1984).

28. Ю. П. Мельников, Геомагн. и аэрономия **33**, 18 (1993).

29. Ю. П. Мельников, ЖЭТФ **109**, 1599 (1996).

30. Л. И. Дорман, М. Е. Кац, Ю. И. Федоров, в кн. *IX Ленинградский семинар по космофизике, Ленинград, 1977*, ЛИЯФ, Ленинград (1978), с. 338.

31. Л. И. Дорман, М. Е. Кац, Ю. И. Федоров, Изв. АН СССР, сер. физ. **43**, 2558 (1979).

32. Л. И. Дорман, С. Фишер, Космич. лучи №8, 88 (1967).

33. Л. И. Дорман, А. А. Лузов, В. П. Мамрукова, ДАН СССР **172**, 833 (1967).

34. E. Antonucci and D. Marocci, J. Geophys. Res. **81**, 4627 (1976).

35. П. А. Кривошапкин, Г. Ф. Крымский, А. И. Кузьмин, Г. В. Скрипин, в кн. *Распределение галактических космических лучей и динамика структурных образований в солнечном ветре*, под ред. А. И. Кузьмина, Якутский филиал СО АН СССР, Якутск (1973), с. 105.

36. S. M. Komoldinov, V. P. Mamrukova, A. M. Altukhov et al., in *Proc. 14th ICRC*, München (1975), Vol. 3, p. 1102.

37. С. М. Комолдинов, Дисс... канд. физ.-матем. наук, НИЯФ МГУ, Москва (1983).

38. K. Nagashima, K. Fujimoto, Z. Fujii, H. Ueno, and J. Kondo, in *Rept. Ionosph. Space Res. in Japan*, Japan (1972), Vol. 26, p. 1.

39. K. Nagashima, K. Fujimoto, Z. Fujii, H. Ueno, and J. Kondo, in *Rept. Ionosph. Space Res. in Japan*, Japan (1972), Vol. 26, №1/2, p. 31.

40. Ю. П. Мельников, Дисс... канд. физ.-матем. наук, ЛПИ, Ленинград (1989).

41. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).

42. Л. И. Дорман, В. Н. Малышкин, Н. П. Миловидова, Изв. АН СССР, сер. физ. **43**, 2566 (1979).

43. Г. Ф. Крымский, А. И. Кузьмин, П. А. Кривошапкин и др. , Изв. АН СССР, сер. физ. **40**, 604 (1976).

44. Л. И. Дорман, Космич. лучи №13, 5 (1972).

45. А. Д. Чертков, *Солнечный ветер и внутреннее строение Солнца*, Наука, Москва (1985).

46. K. W. Behannon, in *Physics of Solar Planetary Environments, Proc. of Intern. Symp. on Solar-Terr. Physics*, Colombia, Boulder (1976), Vol. 1, p. 332.

47. R. L. Rosenberg, M. G. Kivelson, R. J. Coleman, Jr., and E. J. Smith, J. Geophys. Res. **83**, 4165 (1978).

48. П. А. Кривошапкин, Г. Ф. Крымский, А. И. Кузьмин, Г. В. Скрипин, в кн. *Распределение галактических космических лучей и динамика структурных образований в солнечном ветре*, под ред. А. И. Кузьмина, Якутский филиал СО АН СССР, Якутск (1973), с. 43.

49. А. И. Гаврильев, И. П. Кармадонов, П. А. Кривошапкин и др., Изв. АН СССР, сер. физ. **42**, 1018 (1978).

50. Л. И. Дорман, М. Е. Кац, Ю. И. Федоров, Б. А. Шахов, ЖЭТФ **79**, 1267 (1980).

51. E. J. Smith, B. T. Tsurutani, and R. L. Rosenberg, EOS Trans. Amer. Geophys. Union. **24**, 997 (1976).

52. H. Alfven, Rev. Geophys. Space Phys. **15**, 271 (1977).

53. Г. Ф. Крымский, П. А. Кривошапкин, В. П. Мамрукова, Г. В. Скрипин, Геомагн. и аэрономия **21**, 923 (1981).

54. К. Г. Иванов, Геомагн. и аэрономия **38**, 1 (1998).