ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 5 (11), стр. 1213–1226

СЛАБАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Е. А. Кузнецов [*]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 2001 г.

Изучается слабая турбулентность магнитогидродинамических волн в сильно замагниченной плазме, когда давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля. В этой ситуации основным нелинейным механизмом является резонансное рассеяние быстрых магнитозвуковых и альфвеновских волн на медленных магнитозвуковых волнах. При этом первые выступают по отношению к последним в качестве высокочастотных (ВЧ) волн, благодаря чему дополнительно сохраняется полное число ВЧ волн (адиабатический инвариант). В режиме слабой турбулентности данный интеграл движения порождает колмогоровский спектр с постоянным потоком числа ВЧ волн в длинноволновую область. В коротковолновой области реализуется колмогоровский спектр с постоянным потоком энергии. Найдена точная угловая зависимость турбулентных спектров для углов распространения, близких к направлению среднего магнитного поля.

PACS: 52.35.Bj, 52.35.Ra

1. ВВЕДЕНИЕ

Центральное место в теории турбулентности занимает понятие спектра турбулентности — распределения энергии по масштабам. Задача об определении спектра турбулентности является трудной и в настоящее время нерешенной проблемой. Важным результатом в этой области явились работы Колмогорова [1] и Обухова [2] об автомодельном характере спектра развитой гидродинамической турбулентности. В семидесятых годах, в основном благодаря усилиям Захарова, идеи Колмогорова–Обухова нашли свое плодотворное применение в теории слабой волновой турбулентности (см. монографию [3], а также первые работы на эту тему [4–6]). Волновая турбулентность оказалась в некотором смысле проще, чем гидродинамическая. Наличие у волн дисперсии приводит к тому, что существует область интенсивностей волн, в которой их взаимодействие можно считать слабым. Если в начальный момент времени фазы волн распределены случайно, то нелинейное взаимодействие в меру своей слабости обеспечивает слабую корреляцию фаз взаимодействующих волн. По этой причине волны могут быть описаны в терминах парных корреляционных функций, фурье-образ которых с точностью до множителя совпадает с числом волн n_k (числами заполнения) с определенным волновым вектором $\mathbf{k}$. В свою очередь числа заполнения n_k подчиняются кинетическим уравнениям для волн. Колмогоровские спектры в этой теории возникают как стационарные масштабно-инвариантные решения кинетических уравнений, обращающих в нуль столкновительный член. Эти спектры, в отличие от термодинамически равновесных, относятся к решениям потокового типа. Они реализуют постоянный поток по масштабам того или иного интеграла движения — энергии, числа частиц и т. д. Важно отметить, что если для развитой гидродинамической турбулентности понятие инерционного интервала (области, где влиянием накачки и затуханием можно пренебречь) представляет собой предположение, а именно, гипотезу о локальности (взаимодействия), то для слабой волновой турбулентности локальность спектров устанавливается явно.

Основная масса работ, посвященных изучению колмогоровских спектров слабой турбулентности относится к изотропным средам (подробную библио-

[*] E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

графию см. в [3]). Влияние анизотропии, например магнитного поля в плазме, изучено в меньшей мере. Первый пример колмогоровских спектров для анизотропных сред, относящихся к слабой турбулентности замагниченных ионно-звуковых волн, был рассмотрен автором в 1972 г. [7]. Для этого случая было получено, что столкновительный член в кинетическом уравнении инвариантен относительно двух независимых растяжений (вдоль и поперек магнитного поля), что позволило построить анизотропные колмогоровские спектры со степенной зависимостью от продольных (k_z) и поперечных ($k_\perp$) компонент волнового вектора. Это, в свою очередь, дало возможность, используя обобщения преобразований Захарова, определить не только колмогоровские индексы, но и найти точную угловую зависимость спектров. Впоследствии идеи этой работы использовались для нахождения спектров турбулентности дрейфовых волн и волн Россби (см., например, [8, 9]).

Настоящая работа посвящена исследованию слабой турбулентности магнитогидродинамических (МГД) волн в сильно замагниченной плазме, когда (тепловое) давление плазмы nT мало по сравнению с давлением магнитного поля $H^2/8\pi$:

$$\beta = \frac{8\pi nT}{H^2} \ll 1.$$

В этой ситуации, в отличие, например, от [4, 7], спектры турбулентности определяются из решения трех связанных кинетических уравнений для альфвеновских, быстрых и медленных магнитозвуковых волн.

При $\beta \ll 1$ основным нелинейным взаимодействием МГД волн является рассеяние альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн на медленных магнитозвуковых волнах (разд. 2). В этих процессах, которые представляют собой распады одной волны на две другие и обратные к ним процессы слияния, альфвеновские и быстрые магнитозвуковые волны выступают по отношению к медленным магнитозвуковым волнам как высокочастотные волны. При этом в каждом акте рассеяния изменение частоты первых волн (мы будем далее называть их A-волнами) мало благодаря малости β, и по этой причине данный процесс подобен рассеянию Мандельштама–Бриллюэна электромагнитных волн на акустических фононах. Вследствие разделения временных масштабов — деления волн на ВЧ и НЧ волны — распадное взаимодействие сохраняет помимо энергии адиабатический инвариант — полное число ВЧ волн. Этим, однако, аналогия с рассеянием Мандельштама–Бриллюэна не исчерпывается. Оказывается, что матричный элемент этого взаимодействия максимален при максимальном значении продольной компоненты импульса, переданного A-волнами медленным магнитозвуковым волнам. Этот результат, в частности, может быть получен из выражения для инкремента распадной неустойчивости монохроматической альфвеновской волны, найденного в 1962 г. Галеевым и Ораевским [10]. Напомним, что в случае рассеяния Мандельштама–Бриллюэна, матричный элемент пропорционален квадратному корню из переданного импульса, что обеспечивает максимальность рассеяния электромагнитных волн назад. Из-за такого поведения амплитуды рассеяния A-волн естественно предположить, что стационарное распределение волн по углам сильно анизотропно и сосредоточено в k-пространстве вдоль магнитного поля. При этих предположениях кинетические уравнения обладают дополнительной симметрией — инвариантностью относительно двух независимых растяжений вдоль и поперек магнитного поля, что дает возможность воспользоваться преобразованиями из работы [7].

Благодаря этим двум свойствам кинетических уравнений в области прозрачности удается найти два масштабно-инвариантных (по продольным и поперечным волновым векторам) колмогоровских спектра, отвечающих постоянному потоку энергии, направленному в коротковолновую область масштабов (прямой каскад) и постоянному потоку числа A-волн, направленному в область малых k (обратный каскад).

Настоящая работа основана на давних результатах автора [11], опубликованных в виде препринта на русском языке и неизвестных по этой причине за рубежом. Однако оказалось, что российскому читателю они также мало известны. Несмотря на более чем двадцатипятилетнюю историю, никто не повторил эти результаты. Правда надо отметить, что недавно вопрос о спектрах МГД турбулентности в другом предельном случае $\beta \gg 1$ рассматривался в работах [12]. Этот предел существенно отличается от рассматриваемого в настоящей работе. Во-первых, при $\beta \gg 1$ плазму можно считать несжимаемой жидкостью, а во-вторых, в этом пределе нет существенной разницы между альфвеновскими и медленными магнитозвуковыми волнами: последние имеют тот же закон дисперсии, что и альфвеновские волны, отличаясь только поляризацией. Подобное вырождение существенно изменяет характер нелинейного взаимодействия. Несмотря на это, в такой ситуации также возможны два типа колмогоровских спектров, имеющие такие же зависимости от волновых чисел, что и полученные в настоящей работе. Однако физическое объяснение существования двух спектров при $\beta \gg 1$ иное.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе вводится каноническое описание идеальной магнитной гидродинамики, следуя оригинальной работе Захарова и автора [13] и недавнему обзору [14]. В третьем разделе с использованием гамильтоновского подхода выводятся усредненные уравнения, описывающие взаимодействие A-волн с медленными магнитозвуковыми волнами. Показано, что со стороны A-волн на медленные движения плазмы оказывается воздействие в виде ВЧ силы. При этом потенциал этой силы отрицателен. Поэтому, в отличие от взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн [15], плазма втягивается в области локализации A-волн, формируя там «горбики» плотности. В этом же разделе исследована устойчивость монохроматической A-волны. Четвертый раздел посвящен колмогоровским спектрам слабой МГД турбулентности.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НОРМАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Рассмотрим уравнения идеальной магнитной гидродинамики для баротропных течений плазмы, когда внутреннюю энергию плазмы ε можно считать зависящей только от плотности ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}], \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость плазмы, w — энтальпия, связанная с давлением $p = p(\rho)$ и внутренней энергией ε соотношениями

$$dw = \frac{dp}{\rho}, \quad w = \frac{\partial}{\partial\rho}\varepsilon(\rho).$$

Сформулируем вариационный принцип для этой системы уравнений.

Прежде всего отметим, что из уравнений (1)–(3) следует, что $\mathbf{H}/\rho$ двигается вместе с «жидкой» линией, другими словами, каждая силовая линия перемещается вместе с частицами, находящимися на ней. Это хорошо известный факт вмороженности магнитного поля (см., например, [16]). Данное обстоятельство позволяет считать, что магнитное поле $\mathbf{H}$ и плотность ρ выступают в качестве обобщенных координат.

Для формулировки вариационного принципа воспользуемся известным выражением для лагранжиана электромагнитного поля и находящихся в нем частиц (жидкости) [17]. Запишем лагранжиан L в МГД приближении, пренебрегая вкладом от электрического поля E по сравнению с магнитным, поскольку $E \sim (v/c)H \ll H$, и учитывая в качестве связей уравнения (1) и (3) и то, что $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$:

$$L = \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \varepsilon(\rho) - \frac{H^2}{8\pi} + \mathbf{S}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right) + \\ + \Phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,\rho\mathbf{v}\right) + \psi\operatorname{div}\,\mathbf{H}.$$

Здесь $\mathbf{S}, \Phi$ и ψ — неопределенные множители Лагранжа. Теперь можно выразить через L функционал действия

$$I = \int L\,dt\,d\mathbf{r},$$

вариация которого по переменным $\mathbf{v}, \rho$ и $\mathbf{H}$ приводит к уравнениям

$$\rho\mathbf{v} = \mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{S} + \rho\nabla\Phi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Big(\mathbf{v}\cdot\nabla\Big)\Phi - \frac{v^2}{2} + w(\rho) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{S} + \nabla\psi = 0. \tag{6}$$

Первое уравнение определяет замену переменных: скорость $\mathbf{v}$ выражается через новые переменные $\mathbf{S}$ и Φ. Следует подчеркнуть, что эта замена переменных неоднозначна: к $\mathbf{S}$ можно добавить вектор $\mathbf{S}_0$, а к Φ — скаляр Φ_0, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}_0 + \rho\nabla\Phi_0 = 0.$$

Два других уравнения, (5) и (6), представляют собой, соответственно, уравнение Бернулли для потенциала Φ и уравнение движения для нового вектора $\mathbf{S}$, содержащее неизвестный потенциал ψ, который задается путем фиксации калибровки вектора $\mathbf{S}$. Так, например, при кулоновской калибровке ($\operatorname{div}\mathbf{S} = 0$) потенциал ψ определяется с точностью до произвольного решения ψ_0 уравнения Лапласа $\Delta\psi_0 = 0$:

$$\psi = \frac{1}{\Delta}\operatorname{div}\,[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}] + \psi_0.$$

В частности, если $\mathbf{v} \to 0$, $\mathbf{H} \to \mathbf{H}_0$, $\rho \to \rho_0$ при $r \to \infty$, то величину ψ_0 удобно выбрать так, чтобы $S \to 0$ при $r \to \infty$. Тогда

$$\psi_0 = -\frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}}{4\pi}.$$

Остается теперь проверить, что система уравнений (4)–(6) не противоречит системе МГД уравнений. Подставляя (4) в уравнение движения (2), после простых преобразований приводим его к виду

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\Phi - \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w(\rho)\right) + \\ + \left[\frac{\mathbf{H}}{\rho} \times \operatorname{rot}\left\{\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}\right\}\right] = 0.$$

В силу (5), (6) это равенство выполняется тождественно. Таким образом, можно говорить, что новая система уравнений (1), (3), (5), (6) эквивалентна системе МГД уравнений. Действительно, в силу (4) любое решение этой системы порождает некое решение системы МГД уравнений. В предположении о единственности задачи Коши для системы (1)–(4) и системы (1), (3), (5), (6) верно и обратное: любому решению системы (1)–(4) можно сопоставить некий класс решений системы (1), (3), (5), (6). Для этого достаточно по набору значений $\mathbf{v}, \mathbf{H}, \rho$ в некоторый момент времени t_0 построить всевозможные наборы величин $\mathbf{S}$ и Φ, удовлетворяющих уравнению (4), и взять их в качестве начальных условий для системы (1), (3), (5), (6).

Далее, зная функцию Лагранжа, определим обобщенные импульсы и построим гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \int\Big(\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}_t + \Phi\rho_t - L\Big)d\mathbf{r} = \\ = \int\left\{\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \psi\ \operatorname{div}\ \mathbf{H}\right\}d\mathbf{r},$$

который по величине совпадает с ее полной энергией. Уравнения движения (1), (3), (5), (6) при этом являются уравнениями Гамильтона:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Phi}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho}, \\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{S}}, \quad \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{H}}, \tag{7}$$

а переменные (ρ, Φ) и $(\mathbf{H}, \mathbf{S})$ являются парами канонически-сопряженных величин.

Замена переменных, определяемая (4), и каноническое описание (7) были введены для магнитной гидродинамики в работе [13]. Преобразование (4) представляет собой аналог представления Клебша в идеальной гидродинамике; соответственно, переменные $\mathbf{H}$ и $\mathbf{S}$ в формуле (4) играют роль переменных Клебша (о переменных Клебша см. [18, 19], а также недавний обзор [14]). Впоследствии к этой же замене пришли авторы работы [20]: вектор скорости и магнитное поле были выражены через скалярные переменные Клебша так, что после простых преобразований это может быть сведено к (4).

Магнитогидродинамические течения, описываемые с помощью (4), как и течения идеальной жидкости, параметризуемые переменными Клебша, представляют собой частный тип течений. Так, для таких МГД течений топологический инвариант зацепления линий магнитного поля и завихренности [21]

$$I = \int(\mathbf{v}\cdot\mathbf{H})d\mathbf{r}$$

тождественно равен нулю.

В 1995 г. Владимировым и Моффаттом [22] для идеальной магнитогидродинамики был найден аналог преобразования Вебера:

$$\mathbf{v} = u_{0k}(\mathbf{a})\nabla a_k + \nabla\Phi + \frac{1}{\rho}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ — лагранжевы маркеры жидких частиц (это отображение, обратное к $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, определяющему траекторию частицы с маркером $\mathbf{a}$), $\mathbf{u}_0(\mathbf{a})$ — новый лагражев инвариант.

Преобразование Вебера (8) представляет собой преобразование общего вида, содержащее, в частности, при $\mathbf{u}_0 = 0$ замену (4), на что не обратили внимание авторы [22]. При этом уравнения движения для потенциалов Φ и $\mathbf{S}$ имеют тот же вид, что и уравнения (5), (6). Если Φ и $\mathbf{S}$ равны нулю при $t = 0$, то $\mathbf{u}_0(\mathbf{a})$ представляет собой начальное значение скорости. Следует отметить, что именно первое слагаемое в (8) обеспечивает ненулевое значение топологического инварианта I (это слагаемое нелинейно, если проводить в (8) разложение по малым амплитудам). Недавно Рубаном [23] (см. также [24]) был выяснен физический смысл нового векторного поля $\mathbf{S}$. Ротор вектора $\mathbf{S}$ может быть выражен через смещение $\mathbf{d}$ между электроном и ионом (если рассматривать их как жидкие частицы) в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t, если изначально их координаты совпадали:

$$\operatorname{rot}\mathbf{S} = \frac{e}{Mc}\mathbf{d}\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0(\mathbf{a})}.$$

Здесь M, e — масса иона и его заряд, а $\rho_0(\mathbf{a})$ — начальное распределение плотности плазмы.

Введение канонических переменных позволяет стандартным образом (с помощью теории возмущений по малым амплитудам волн) классифицировать и исследовать все нелинейные процессы. Для этого необходимо в выражении (8) для скорости и внутренней энергии провести разложение по степеням канонических переменных. Если плазма помещена во внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, то в линейном приближении по амплитуде волн следует удержать линейные члены по Φ и $\mathbf{S}$, пренебрегая первым членом в (8) (как нелинейным). В результате в разложении скорости $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \dots \tag{9}$$

первый порядок запишется в виде

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot}\mathbf{S} + \nabla\Phi.$$

Трем независимым парам ($\operatorname{div}\mathbf{H} = \operatorname{div}\mathbf{S} = 0$) канонически-сопряженных величин соответствуют три типа волн. В линейном приближении, очевидно, эти волны не взаимодействуют между собой. Их законы дисперсии и поляризации могут быть найдены из анализа квадратичного (по степеням канонических переменных) гамильтониана $\mathcal{H}_0$. Трехволновому взаимодействию отвечает кубический по каноническим переменным член. Его величина будет определяться квадратичной по амплитуде волн добавкой к скорости:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot}\mathbf{S} + \frac{1}{\rho_0}\mathbf{h} \times \operatorname{rot}\mathbf{S}.$$

В этом выражении учтены только «волновые» степени свободы и пренебрежено первым слагаемым из выражения (8). Здесь $\mathbf{h}$ и ρ_1 — соответственно, отклонения магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности ρ от своих равновесных значений $\mathbf{H}_0$ и ρ_0. В результате гамильтониан среды будет представлять собой ряд по степеням амплитуд волн:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \dots, \tag{10}$$

где квадратичный гамильтониан равен

$$\mathcal{H}_0 = \int \left\{ \frac{\rho_0 \mathbf{v}_0^2}{2} + \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} + c_s^2 \frac{\rho_1^2}{2\rho_0} \right\} d\mathbf{r},$$

а кубичный гамильтониан равен

$$\mathcal{H}_3 = \int \left\{ \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) + \frac{\rho_1}{2} v_0^2 + q c_s^2 \frac{\rho_1^3}{2\rho_0^2} \right\} dr.$$

В этих формулах квадрат скорости звука c_s^2 и безразмерный коэффициент q появились из разложения внутренней энергии ε по степеням ρ_1:

$$\Delta\varepsilon(\rho) = \frac{\rho_0 c_s^2}{2} \left\{ \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 + q \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^3 + \dots \right\}.$$

Выполним преобразование Фурье по координатам и перейдем к новым переменным $a_j(k)$ ($j = 1, 2, 3$), так что

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(k) &= \mathbf{e}_1(k)\sqrt{2\pi\omega_1}(a_1(k) + a_1^*(-k)) + \\
&+ \quad \mathbf{e}_2(k) \sum_{l=2,3} \lambda_l \sqrt{2\pi\omega_l}(a_l(k) + a_l^*(-k)), \\
\mathbf{S}(k) &= -i\mathbf{e}_1(k)\frac{1}{\sqrt{8\pi\omega_1}}(a_1(k) - a_1^*(-k)) - \\
&- i\mathbf{e}_2(k) \sum_{l=2,3} \lambda_l \frac{1}{\sqrt{8\pi\omega_l}}(a_l(k) - a_l^*(-k)), \\
\rho_1(k) &= \sum_{l=2,3} \left(\frac{\rho_0\omega_l}{2c_s^2}\right)^{1/2} \mu_l (a_k(l) + a_{-k}^*(l)), \\
\Phi(k) &= -i \sum_{l=2,3} \left(\frac{c_s^2}{2\rho_0\omega_l}\right)^{1/2} \mu_l (a_l(k) - a_l^*(-k)).
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\omega_1(k) = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A|,$$

$$\omega_{2,3}(k) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{k^2V_A^2 + k^2c_s^2 + 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_A)kc_s} \pm \pm \sqrt{k^2V_A^2 + k^2c_s^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_A)kc_s} \right|$$

— законы дисперсии, соответственно, альфвеновских ($j = 1$), быстрых ($j = 2$) и медленных ($j = 3$) магнитозвуковых волн; соответствующие им единичные векторы поляризации равны

$$\mathbf{e}_1(k) = \frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{n}_0](\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_0)}{|\mathbf{k}\times\mathbf{n}_0||\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_0|}, \quad \mathbf{e}_2(k) = \frac{\mathbf{k}\times[\mathbf{k}\times\mathbf{n}_0]}{k|\mathbf{k}\times\mathbf{n}_0|},$$

($\mathbf{n}_0 = \mathbf{H}_0/H_0$ — единичный вектор вдоль среднего магнитного поля);

$$\mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{H}_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}$$

— альфвеновская скорость;

$$\lambda_2 = -\mu_3 = -\left(1 - \frac{\omega_3^2 - k^2c_s^2}{\omega_2^2 - k^2c_s^2}\right)^{1/2},$$

$$\lambda_3 = \mu_2 = \left(1 - \frac{\omega_2^2 - k^2c_s^2}{\omega_3^2 - k^2c_s^2}\right)^{-1/2}.$$

Такая замена переменных $a_k(j)$ является каноническим $U-V$-преобразованием, диагонализующим гамильтониан $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_j \int \omega_j(k) a_j(k) a_j^*(k) d\mathbf{k}.$$

При этом амплитуды $a_j(k)$ выступают в качестве нормальных переменных, а уравнения движения в этих переменных имеют канонический вид:

$$\frac{\partial a_j(k)}{\partial t} = -i\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_j^*(k)}.$$

В линейном приближении $a_j(k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial a_j(k)}{\partial t} + i\omega_j(k)a_j(k) = 0\,,$$

т. е. со временем модуль амплитуды $|a_j(k)|$ не изменяется, а фаза линейно растет с ростом t.

Для того чтобы найти выражение гамильтониана взаимодействия в переменных $a_j(k)$, необходимо подставить преобразование (11) в ряд (10). В результате гамильтониан взаимодействия волн в переменных $a_j(k)$ будет представлять собой интегро-степенной ряд по этим переменным. В наинизшем порядке по амплитуде волн главным нелинейным процессом будет процесс резонансного трехволнового взаимодействия, которому соответствует гамильтониан

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2}\int \sum_{lmn}\Big[V^{lmn}_{kk_1k_2} a_l^*(k)a_m(k_1)a_n(k_2) + \text{c.c.}\Big] \times \\ \times\, \delta_{k-k_1-k_2}\, dk dk_1 dk_2. \quad (12)$$

Данный гамильтониан получается после подстановки преобразования (11) в кубичный гамильтониан $\mathcal{H}_3$ и последующего выделения из него резонансных слагаемых. Оставшиеся слагаемые в $\mathcal{H}_3$ являются малыми и могут быть исключены с помощью канонического преобразования (подробнее об этом см. обзор [14]). Отметим, что вычисление матричных элементов $V^{ije}_{kk_1k_2}$ в данной схеме представляет собой чисто алгебраическую процедуру, требующую выполнения преобразования Фурье в интегралах, подстановки (11) и необходимой последующей симметризации по переменным $a_k(i)$, например в (12) — по парам (k_1, m) и (k_2, n).

3. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выражения для законов дисперсии и матричных элементов взаимодействия существенно упрощаются для плазмы с малым значением $\beta = 8\pi nT/H^2$ (отношения теплового давления nT плазмы к давлению магнитного поля $H^2/8\pi$). Условие $\beta \ll 1$ означает, что $V_A \gg c_s$. В этом пределе быстрые магнитозвуковые волны имеют изотропный закон дисперсии $\omega_2 = kV_A$, а их фазовая (и групповая) скорость совпадает с величиной групповой скорости альфвеновских волн. В линейном приближении скорость плазмы в альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волнах определяется выражением

$$\mathbf{v}_{HF} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot}\mathbf{S}.$$

При этом потенциальная часть скорости $\nabla\Phi$ оказывается малой по параметру β. Для медленных магнитозвуковых волн, наоборот, основной вклад вносит потенциальная часть, поэтому скорость оказывается направленной вдоль магнитного поля $\mathbf{H}_0$:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{n}_0\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad (13)$$

а закон дисперсии медленных магнитозвуковых волн становится сильно анизотропным:

$$\omega_3 \equiv \Omega_s = |k_z|c_s. \quad (14)$$

Поперечные компоненты скорости в этих волнах $[\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot}\mathbf{S}]/\rho_0$ скомпенсированы членом $\nabla_\perp\Phi$.

Если плазма бесстолкновительна и сильно неизотермична ($T_e \gg T_i$), то медленные магнитозвуковые волны представляют собой замагниченные ионно-звуковые волны (подробнее об этих волнах см. [7]). В этом случае в (14)

$$c_s = \sqrt{T_e/M}.$$

Что касается нелинейного взаимодействия МГД волн, то для сильно замагниченной плазмы основным является процесс рассеяния альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн на медленных магнитозвуковых волнах (в чем можно убедиться, непосредственно сравнивая вычисленные матричные элементы V^{lmn} из (12)). В этом процессе волны первого типа (названные выше A-волнами) выступают в качестве высокочастотных по отношению к последним (которые мы будем называть просто звуковыми, или S-волнами). Это следует непосредственно из анализа резонансных условий для данного типа распада:

$$\omega_A(k) = \omega_A(k_1) + \Omega_s(k_2), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (15)$$

Качественно легко понять, как устроено это взаимодействие. При распространении пакета A-волн средние характеристики плазмы (плотность и скорость) за счет действия A-волн медленно меняются. Благодаря этому средняя альфвеновская скорость отличается от своего локального значения на величину

$$\Delta V_A = -V_A\rho_{1s}/2\rho_0,$$

где ρ_{1s} — низкочастотная вариация плотности. В результате частоты A-волн приобретают добавку $\Delta\omega_\rho \sim k\Delta V_A$. За счет медленного движения с дрейфовой скоростью среды v_D частота A-волн изменяется на величину $\Delta\omega_D \sim kv_D$ (эффект Доплера). Отношение этих двух частот ($\Delta\omega_D$ и $\Delta\omega_\rho$), однако, оказывается малым по параметру c_s/V_A. Таким образом, основным взаимодействием является рассеяние на низкочастотных флуктуациях плотности. При этом сами низкочастотные характеристики плазмы изменяются благодаря действию со стороны A-волн высокочастотной силы.

Выражение для ВЧ силы проще всего находится, если провести усреднение гамильтониана по высокочастотным колебаниям. В результате усреднения гамильтониан $\mathcal{H}$ приобретает вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \int \left\{ \frac{1}{2\rho_0} \langle [\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{S}]^2 \rangle + \frac{\langle \mathbf{h}^2 \rangle}{8\pi} \right\} d\mathbf{r} + \int \left\{ \frac{\rho_0 \Phi_z^2}{2} + c_s^2 \frac{\rho_{1s}^2}{2\rho_0} \right\} d\mathbf{r},$$

$$\mathcal{H}_{int} = -\int \frac{\rho_{1s}}{2\rho_0^2} \langle [\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{S}]^2 \rangle d\mathbf{r}.$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по высокой частоте. При этом первый интеграл в $\mathcal{H}_0$ соответствует A-волнам, а второй описывает замагниченные звуковые колебания. Вариация гамильтониана взаимодействия по ρ_{1s} задает выражение для ВЧ потенциала:

$$U \equiv M \frac{\delta \mathcal{H}_{int}}{\delta \rho_{1s}} = -\frac{1}{2Mn_0^2} \langle [\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{S}]^2 \rangle. \tag{17}$$

В соответствии с этим уравнение движения для потенциала Φ_s приобретает вид

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + c_s^2 \frac{\rho_{1s}}{\rho_0} = \frac{\langle [\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{S}]^2 \rangle}{2\rho_0^2}. \tag{18}$$

Важно отметить, что ВЧ потенциал (17) отрицателен. Это означает, что в области локализации A-волн, благодаря ВЧ силе, вместо «ямок», как это было при взаимодействии ионного звука и ленгмюровских волн (см. [25]), будут формироваться «горбики» плотности.

Уравнения движения для медленных колебаний замыкаются уравнением непрерывности для ρ_{1s}, которое в соответствии с (13) имеет вид

$$\frac{\partial \rho_{1s}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) имеем

$$\frac{\partial^2 \rho_{1s}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \rho_{1s}}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle [\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{S}]^2 \rangle. \tag{20}$$

Чтобы написать уравнения для A-волн, необходимо явно провести усреднение в гамильтониане взаимодействия $\mathcal{H}_{int}$. Для этого необходимо удержать в $\mathcal{H}_{int}$ члены типа $a_\lambda^* a_{\lambda_1}$, где индекс $\lambda = 1, 2$ нумерует ВЧ волны:

$$H_{int} = -\int \frac{\rho_{1s}(\kappa)}{2\rho_0} \sum_{\lambda\lambda_1} F_{kk_1}^{\lambda\lambda_1} a_\lambda^*(k) a_{\lambda_1}(k_1) \times \delta_{k-k_1-\kappa} d\mathbf{k}\, d\kappa.$$

Здесь

$$F_{kk_1}^{\lambda\lambda_1} = (\omega_\lambda(k)\omega_{\lambda_1}(k_1))^{1/2} \mathbf{n}_\lambda(k) \cdot \mathbf{n}_{\lambda_1}(k_1),$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{k}_\perp}{k_\perp}, \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_0.$$

В результате уравнения для A-волн приобретают вид

$$\frac{\partial a_\lambda(k)}{\partial t} + i\omega_\lambda(k) a_\lambda(k) = -i \frac{\delta H_{int}}{\delta a_\lambda^*(k)}, \quad \lambda = 1, 2. \tag{21}$$

Для изотермической бесстолкновительной плазмы ($T_e \approx T_i$) медленные магнитозвуковые колебания отсутствуют вследствие сильного затухания Ландау на ионах. Соответственно, распадное взаимодействие A-волн (15) сменяется на индуцированное рассеяние A-волн на ионах. В этом случае уравнения (20) заменяются на дрейфовое кинетическое уравнение [26] для медленной вариации функции распределения ионов f_i (ср. с [27])

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} - \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial z} (e\tilde{\varphi} + U) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0 \tag{22}$$

и условие квазинейтральности для медленных движений ($\Omega_k = k_z c_s \ll \omega_{pi}$)

$$\delta n_i = \int f_i d\mathbf{v} = \frac{n_0}{T_e} e\tilde{\varphi} = \frac{\rho_{1s}}{M}, \tag{23}$$

где f_0 — равновесная функция распределений ионов, а $\tilde{\varphi}$ — низкочастотный электростатический потенциал. При этом уравнения движения для A-волн сохраняют свой вид (21), а плотность выражается линейно через ВЧ потенциал посредством функции Грина для системы (22), (23):

$$G_{\kappa\Omega} \equiv \frac{\rho_{1s}(\kappa, \Omega)}{U_{\kappa\Omega}} = -\frac{n_0 \kappa^2}{\omega_{pi}^2} \frac{\epsilon_e \epsilon_i}{\epsilon_e + \epsilon_i}. \tag{24}$$

Здесь $\rho_{1s}(\kappa,\Omega)$ и $U_{\kappa\Omega}$ — фурье-образы НЧ плотности и ВЧ потенциала, $\epsilon_{e,i}$ — парциальные диэлектрические проницаемости электронов и ионов

$$\epsilon_e = \frac{1}{\kappa^2 r_d^2}\,,$$

$$\epsilon_i = \frac{4\pi e^2}{M\kappa^2}\int \frac{\kappa_z(\partial f_0/\partial v_z)}{\Omega-\kappa_z v_z}d\mathbf{v}\,,$$

где $r_d^2 = T_e/4\pi n_0 e^2$ — квадрат дебаевского радиуса.

В сильно неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) функция Грина (24) переходит в

$$G_{\kappa\Omega} = \frac{n_0\kappa_z^2}{\Omega^2-\kappa_z^2 c_s^2},$$

что совпадает с выражением, задаваемым уравнением (20).

Система уравнений (22)–(24) полностью описывает взаимодействие A-волн в сильно замагниченной плазме при произвольном соотношении ионной и электронной температур. При этом, однако, гамильтониан $H_0 + H_{int}$ уже не является сохраняющейся величиной вследствие затухания Ландау на ионах.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Перейдем теперь к анализу полученных уравнений. Начнем с изучения поведения узкого пакета A-волн. Качественное представление об этом процессе можно получить при изучении устойчивости монохроматической A-волны. Для простоты ограничимся анализом устойчивости альфвеновской волны в гидродинамическом пределе. Для бесстолкновительной плазмы последнее значит, что фазовая скорость биений Ω/κ_z A-волн превышает тепловую ионную. В этом случае для медленных звуковых колебаний можно пренебречь затуханием Ландау на ионах и воспользоваться уравнениями (20) или (24). Следует помнить, что в сильно неизотермической плазме звуковые волны являются собственными колебаниями, в то время как в плазме с $T_e \approx T_i$ звук представляет собой вынужденные колебания плотности плазмы. Однако при $\Omega/\kappa_z \gg v_{Ti}$ как в том, так и другом случае применимо гидродинамическое описание.

Далее удобно выразить ρ_{1s} через нормальные переменные $a_3(k) \equiv b_k$:

$$\rho_{1s}(k) = \left(\frac{\rho_0\Omega_k}{2c_s}\right)^{1/2}(b_k + b^*_{-k}).$$

Уравнения для $b(k)$ получаются варьированием полного гамильтониана $H_0 + H_{int}$:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\Omega(k)b_k = -i\frac{\delta H_{int}}{\delta b_k^*}. \qquad (25)$$

В уравнениях (21), (25) монохроматической альфвеновской волне соответствует следующее решение:

$$a_\lambda(k) = \frac{A}{\omega_0^{1/2}}\delta_{\lambda 1}\exp(-i\omega_0 t)\delta_{k-k_0}, \quad b_k = 0,$$

$$\omega_0 = \omega_1(k_0).$$

Амплитуда альфвеновской волны здесь выбрана таким образом, чтобы $W = |A|^2$ совпадала с плотностью энергии колебаний.

Линеаризуя уравнения (22)–(24) на фоне точного решения и полагая для возмущений

$$\delta a_\lambda(k) \propto \exp(-i(\Omega+\omega_0)t)\delta_{k-k_0-\kappa},$$

$$\delta a_\lambda^*(k) \propto \exp(-i(\Omega-\omega_0)t)\delta_{k-k_0+\kappa},$$

получаем следующее дисперсионное соотношение для Ω

$$\frac{WG}{4Mn_0^2\omega_0}\sum_\lambda\left\{\frac{|F^{1\lambda}_{k_0,k_0+\kappa}|^2}{\Omega+\omega_0-\omega_\lambda(k_0+\kappa)} + \frac{|F^{1\lambda}_{k_0,k_0-\kappa}|^2}{-\Omega+\omega_0-\omega_\lambda(k_0-\kappa)}\right\} = 1\,. \qquad (26)$$

Приведем результаты исследования дисперсионного уравнения (26) в разных случаях в зависимости от плотности энергии колебаний W и соотношения между температурами.

При $T_e \gg T_i$ и достаточно малых амплитудах имеет место распадная неустойчивость с возбуждением ионного звука [10]. Для этой неустойчивости частота Ω выражается через значение матричного элемента распадного взаимодействия

$$V^{\lambda\lambda_1}_{kk_1k_2} = \left(\frac{\Omega(k_2)}{8\rho_0 c_s^2}\right)^{1/2} F^{\lambda\lambda_1}_{kk_1} \qquad (27)$$

и величину W:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[\omega_0-\omega_\lambda(k_0-\kappa)+\Omega(\kappa)\right] \pm \left\{\frac{1}{4}\left[\omega_0-\omega_\lambda(k_0-\kappa)-\Omega(\kappa)\right]^2 - \frac{W}{\omega_0}|V^{1\lambda}_{k_0,k_0-\kappa,\kappa}|^2\right\}^{1/2}. \qquad (28)$$

Отсюда следует, что неустойчивость имеет место вблизи резонансной поверхности

$$\omega_0 = \omega_\lambda(k_0 - \kappa) + \Omega(\kappa) \tag{29}$$

с максимумом инкремента

$$\Gamma = \left[\frac{W}{8nT}\,\frac{\Omega_\kappa}{\omega_0}|F^{1\ \lambda}_{k_0,k_0-\kappa}|^2\right]^{1/2}. \tag{30}$$

Ширина инкремента по частоте оказывается порядка максимального значения инкремента (30).

Поскольку матричный элемент пропорционален корню из частоты медленного звука, максимальное значение инкремента на резонансной поверхности (29) достигается при максимальном значении $|\kappa_z|$. При распаде на альфвеновскую и медленную звуковую волны имеем

$$\max|\kappa_z| \approx 2|k_{0z}|,$$

так что вторичная альфвеновская волна распространяется в противоположном направлении к возбуждающей альфвеновской волне. Такой характер распадной неустойчивости типичен для рассеяния Мандельштама–Бриллюэна, матричный элемент которого пропорционален квадратному корню из переданного звуку импульса света при рассеянии. Такая зависимость обеспечивает максимальное рассеяние света назад.

Не представляет труда исследовать распадную неустойчивость и для всех остальных каналов распада $A \to A + S$. Инкременты во всех этих случаях имеют тот же порядок, что и инкремент, определяемый выражением (30):

$$\Gamma \sim (\omega_0 \Omega_s W/nT)^{1/2}.$$

Эта неустойчивость имеет место при $W/nT < \beta^{1/2}$. С увеличением W/nT распадная неустойчивость перестраивается. При $W/nT > \beta^{1/2}$ в дисперсионном уравнении (26) можно пренебречь величиной Ω_s^2 по сравнению с Ω^2. Тогда неустойчивые волновые векторы лежат на поверхности

$$\omega_1(k_0) = \omega_\lambda(k_0 - \kappa).$$

Такая неустойчивость носит название модифицированной распадной [15, 28]. Для случая взаимодействия альфвеновских волн и медленного звука эта неустойчивость имеет инкремент, максимальный при $\kappa_z = 2k_{0z}$:

$$\Gamma \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 \left(\frac{W}{\rho_0 V_A^2}\right)^{1/3}. \tag{31}$$

Величина этого инкремента не зависит от температуры, поэтому такая неустойчивость имеет место также при $W/nT > 1$ вплоть до величины β^{-1}, когда перестает выполняться основное приближение — приближение адиабатичности ($\Gamma \sim \omega_0$).

Для других каналов неустойчивость с ростом W/nT имеет тот же характер: при $W/nT > \beta^{1/2}$ инкремент максимален в области $\kappa \sim k_0$ и по порядку величины совпадает с инкрементом, определяемым выражением (31).

Распадная неустойчивость (30) для произвольного канала $A \to A + S$, как легко видеть, относится к конвективному типу неустойчивостей. Возбуждаемые волны, согласно (28), имеют групповые скорости, сильно отличные от групповой скорости возбуждающей волны. Поэтому для пакета волн с размером L эта неустойчивость будет существенна только в случае достаточно большой длины, когда коэффициент усиления G превышает значение кулоновского логарифма Λ:

$$G = \Gamma L/V_A \approx \Lambda.$$

При меньших длинах L распадная неустойчивость не будет сказываться: за время прохождения возмущения всей длины пакета амплитуда возмущения нарастет на малую величину. В этом случае динамика пакета будет определяться более медленными процессами. Среди них наиболее важными являются те, для которых неустойчивые возмущения распространяются вместе с пакетом. Если это распадная неустойчивость, то она должна быть абсолютной (в системе координат, движущейся вместе с пакетом). В частности, это есть одна из причин возможности коллапса быстрых магнитозвуковых волн и особого влияния звукового коллапса на структуру бесстолкновительных ударных волн в плазме [29, 30]. Коллапс быстрых магнитозвуковых волн возникает вследствие трехволнового взаимодействия, в котором участвует только быстрый магнитный звук.

5. КОЛМОГОРОВСКИЕ СПЕКТРЫ

В предыдущем разделе мы рассмотрели задачу о неустойчивости узкого в k-пространстве волнового пакета. При этом при распаде монохроматической волны и выполнении резонансных условий (29) (т. е. максимальности инкремента (30)) сумма фаз возбуждающихся волн ϕ_A и ϕ_s жестко связана с фазой волны накачки ϕ_0:

$$\phi_0 + \pi/2 = \phi_A + \phi_s.$$

При этом разность фаз в паре возбуждающихся волн с фиксированным вектором κ остается произвольной. Легко проверить также, что при выходе из резонанса (29) указанная фазовая корреляция теряется. Оба эти фактора вносят в систему взаимодействующих триад, связанных с волной накачки, элемент случайности. Таким образом, каждая триада характеризуется своей одной случайной фазой. На следующем этапе — во вторичном каскаде — снова добавляются случайные фазы, так что память о когерентной волне накачки теряется. При многократном повторении этого процесса система должна прийти к турбулентному состоянию, когда фазы волн можно считать случайными. Поэтому время стохастизации должно быть равно нескольким обратным инкрементам (30).

Такой сценарий перехода к турбулентому состоянию представляется достаточно правдоподобным. Сейчас проводятся серии численных экспериментов по проверке этой гипотезы (см., например, [31, 32]).

На основании сказанного выше ясно, что режим развитой турбулентности должен характеризоваться широким спектром волн. Он может быть описан статистически с помощью корреляционных функций. Для малой интенсивности волн достаточно ограничиться парными корреляционными функциями, которые подчиняются кинетическим уравнениям. Такой режим турбулентности называют слаботурбулентным.

В случае слабой МГД турбулентности ($\beta \ll 1$) мы имеем три парные корреляционные функции, определяемые равенствами

$$\langle a_\lambda(k) a^*_{\lambda_1}(k_1)\rangle = N_k^\lambda \delta_{\lambda\lambda_1}\delta_{k-k_1}, \quad \langle b_k b^*_{k_1}\rangle = n_k \delta_{k-k_1},$$

где величины N_k^λ, n_k, имеющие смысл чисел заполнения, подчиняются следующей системе кинетических уравнений:

$$\dot n_k = 2\pi \int |V_{k_1k_2k}|^2 (N_{k_1}N_{k_2} - n_k N_{k_1} + n_k N_{k_2}) \times \\ \times \delta_{k+k_1-k_2}\delta_{\Omega+\omega_1-\omega_2} dk_1 dk_2, \quad (32)$$

$$\dot N_k = 2\pi \int |V_{kk_1k_2}|^2 (N_{k_1}n_{k_2} - N_k n_{k_2} - N_k N_{k_1}) \times \\ \times \delta_{k-k_1-k_2}\delta_{\omega-\omega_1-\Omega_2} dk_1 dk_2 - \\ - 2\pi \int |V_{k_1kk_2}|^2 (N_k n_{k_2} - N_{k_1}n_{k_2} - N_k N_{k_1}) \times \\ \times \delta_{k_1-k-k_2}\delta_{\omega_1-\omega-\Omega_2} dk_1 dk_2. \quad (33)$$

Здесь $\omega \equiv \omega(k)$, $\omega_1 \equiv \omega(k_1)$ и т. д. В этих уравнениях (и ниже) опущено суммирование по λ. Чтобы его включить, следует заменить

$$dk_1 \to \sum_n dk_1, \quad N_k \to N_k^\lambda,$$

$$\omega_k \to \omega_{k\lambda}, \quad V_{kk_1k_2} \to V^{\lambda\lambda_1}_{kk_1k_2}$$

и т. д.

Уравнения (32), (33) предполагают слабость нелинейного взаимодействия волн. В данном конкретном случае наиболее существенным является критерий

$$\Omega_s \gg 1/\tau,$$

где τ — характерное нелинейное время, определяемое кинетическими уравнениями (32), (33). Чтобы оценить величину τ, необходимо учитывать, что в каждом акте распада и в каждом обратном процессе слияния частоты A-волн меняются на малую величину $\Delta\omega_A = \Omega_s \ll \omega_A$, т. е. перекачка энергии A-волн по спектру носит диффузионный характер. Учитывая это, получаем для τ следующую оценку:

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_A \frac{W}{\rho V_A^2}.$$

Отметим, что величина τ значительно превосходит время стохастизации, определяемое величиной обратного инкремента Γ^{-1} (30). Отсюда окончательно получаем критерий

$$\frac{W}{\rho V_A^2} \ll \beta^{1/2}.$$

Включим теперь в уравнения (32), (33) источники турбулентности и затухание. Для этого в левые части уравнений введем, соответственно, члены $\Gamma_k n_k$ и $\gamma_{k\lambda}N_{k\lambda}$. Будем полагать, что области накачки ($\Gamma_k, \gamma_{k\lambda} > 0$) и затухания ($\Gamma_k, \gamma_{k\lambda} < 0$) разделены в k-пространстве промежуточной областью — инерционным интервалом, — в которой динамика турбулентности определяется только взаимодействием волн. Если в инерционном интервале влиянием накачки и затухания можно пренебречь (что требуется доказать), то распределения n_k и $N_{k\lambda}$ не должны зависеть от конкретного вида γ_k и Γ_k.

Напомним, что в теории гидродинамической турбулентности определение спектра турбулентности — распределения пульсаций по масштабам — в инерционном интервале базируется на двух гипотезах Колмогорова [1]. Первая гипотеза об автомодельности заключается в том, что спектр турбулентности в инерционном интервале определяется единственной величиной P — постоянным потоком энергии по спектру. Вторая гипотеза предполагает, что взаимодействие пульсации с разными значениями k носит локальный характер.

Если применить эти гипотезы к нашей ситуации, то спектры турбулентности в инерционном интервале можно найти, исходя из соображений размерности. В данном случае кинетические уравнения (32), (33) имеют два закона сохранения — энергии и числа ВЧ волн. Каждому из них должен соответствовать свой колмогоровский спектр. Так, постоянному потоку числа ВЧ волн N_k^λ,

$$P_N = \frac{\partial}{\partial t} \sum_\lambda \int N_{k\lambda} dk,$$

соответствует спектр

$$N_{k\lambda} \propto P_N^{1/2} k^{-4}, \quad n_k \propto P_N^{1/2} k^{-4}, \tag{34}$$

а для постоянного потока энергии

$$P_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \int (\omega_k n_k + \sum_\lambda \omega_{k\lambda} N_{k\lambda}) dk$$

имеем

$$N_{k\lambda} \propto P_\varepsilon^{1/2} k^{-3/2}, \quad n_k \propto P_\varepsilon^{1/2} k^{-3/2}. \tag{35}$$

Из сохранения полного числа ВЧ волн и энергии в инерционном интервале легко понять, что поток числа частиц N направлен в область малых k, в то время как поток энергии P_ε направлен в область больших k.

Данные достаточно грубые оценки для спектров (34), (35) могут претендовать только на правильное описание зависимостей спектров от волнового числа и потоков, но не учитывают диффузионности процессов распада. Необходимо также отметить, что эти выводы опираются на гипотезу локальности взаимодействия.

Спектры (34) и (35) не описывают тонких свойств функций распределения, таких как их угловая зависимость, т. е. определены с точностью до произвольной функции от углов. Для определения угловой зависимости следует решать точные уравнения (32), (33). Решения этих уравнений удается найти для взаимодействия альфвеновских и звуковых волн ($N_2 \equiv 0$). Для этого уравнения (32), (33) удобно представить в виде

$$\dot{n}_k = -\int U_{k_2|kk_1} T_{k_2|kk_1} dk_1 dk_2\,, \tag{36}$$

$$\dot{N}_k = \\ = \int (U_{k|k_1k_2} T_{k|k_1k_2} - U_{k_1|kk_2} T_{k_1|kk_2}) dk_1 dk_2\,, \tag{37}$$

где введены следующие обозначения:

$$U_{k|k_1k_2} = 2\pi |V^{11}_{k'k'_1k_2}|^2 \delta_{k-k_1-k_2} \delta_{\omega-\omega_1-\omega_2}\,,$$

$$T_{k|k_1k_2} = N_{k_1} n_{k_2} - N_k n_{k_2} - N_k N_{k_1}.$$

Легко видеть, что уравнения (36), (37) имеют термодинамически равновесные решения

$$N_k = \frac{N}{\omega_k + \mu}, \quad n_k = \frac{T}{\Omega_k},$$

представляющие собой распределения Рэлея–Джинса, обращающие столкновительный член в нуль.

Для определения неравновесных распределений заметим, что функция U, имеющая смысл вероятности распада, обладает следующими свойствами: U является биоднородной функцией по аргументам k_z и $k_\perp$ со степенями однородности равными $+1$ относительно всех k_z и -2 относительно $k_\perp$. Кроме того, функция U инвариантна относительно вращения вокруг оси z, совпадающей с направлением магнитного поля $\mathbf{H}_0$.

В силу этого решения естественно искать в виде

$$n_k = A k_z^\alpha k_\perp^\beta, \quad N_k = B k_z^\alpha k_\perp^\beta. \tag{38}$$

Рассмотрим стационарные решения уравнения (37):

$$\int (U_{k|k_1k_2} T_{k|k_1k_2} - U_{k_1|kk_2} T_{k_1|kk_2}) = 0. \tag{39}$$

Совершим отображение области интегрирования второго интеграла из (39), определяемой законами сохранения, в область интегрирования первого интеграла. Для этого удобно ввести комплексную величину $\zeta = k_x + ik_y$. Тогда область интегрирования второго интеграла, задаваемая законами сохранения

$$k_{z1} - k_z - k_{z2} = 0,$$

$$\zeta_1 - \zeta - \zeta_2 = 0,$$

$$\omega_1 - \omega - \Omega_2 = 0,$$

с помощью конформного преобразования по переменным k_z и ζ,

$$\begin{aligned} k_z &= k'_z \frac{k_z}{k'_z}, \quad \zeta = \zeta' \frac{\zeta}{\zeta'}, \\ k_{z1} &= k_z \frac{k_z}{k'_z}, \quad \zeta_1 = \zeta \frac{\zeta}{\zeta'}, \\ k_{z2} &= k''_z \frac{k_z}{k'_z}, \quad \zeta_2 = \zeta'' \frac{\zeta}{\zeta'}, \end{aligned} \tag{40}$$

переходит в область интегрирования первого интеграла из (39). Каждое преобразование по отдельности представляет собой инверсию: для z-компонент волновых векторов — относительно точки k_z, а для поперечных компонент — относительно окружности радиуса $|k_\perp|$. При этом вектор $\mathbf{k}$ переходит в $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_1$ — в $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_2$ — в $\mathbf{k}_2$. Одновременно z-компоненты растягиваются на величину $|k_z/k_{z1}|$, а поперечные компоненты — на $|k_\perp/k_{1\perp}|$. Кроме того, происходит поворот вокруг оси z на угол $\arg(\zeta/\zeta_1)$.

В результате, учитывая свойства U и T, получаем, что подынтегральное выражение во втором интеграле из (39) переходит в подынтегральное выражение первого интеграла, умноженное на степенной фактор:

$$\int U_{k|k_1k_2}T_{k|k_1k_2}\left[1-\left(\frac{k_z}{k_{z1}}\right)^{2\alpha+4}\left(\frac{k_\perp}{k_{\perp1}}\right)^{2\beta+4}\right]\times \times dk_1dk_2=0.$$

Отсюда следует, что кроме термодинамически равновесных решений (обращающих T в нуль) существуют и неравновесные

$$n_k=Ak_z^{-2}k_\perp^{-2},\quad N_k=Bk_z^{-2}k_\perp^{-2}, \qquad (41)$$

которые соответствуют решениям, полученным ранее из соображений размерности для случая постоянного потока числа частиц P_N. Связь между коэффициентами A и B в (41) определяется из стационарного уравнения (32) ($\partial/\partial t=0$). Отсюда легко получить оценку $c_sA\sim V_AB$, так что в стационарном случае энергии звуковых и альфвеновских волн оказываются одного порядка.

Отметим, что совокупность всех преобразований вида (40) образует группу G, причем эта группа есть прямое произведение двух групп $G(1)$ и $G(2)$:

$$G=G(1)\times G(2).$$

Группа $G(1)$ действует в одномерном пространстве, а $G(2)$ — в двумерном. Преобразования этого вида для степенных спектров приводят к факторизации столкновительного члена. Одномерные преобразования (в пространстве частот) для изотропных спектров были найдены Захаровым [5, 6, 23]. Обобщения этих преобразований на двумерный и трехмерный случаи для изотропных моделей были найдены Кацом и Конторовичем [33]. Преобразования (40) представляют частный тип квазиконформных преобразований.

Для определения второго неравновесного решения (35) построим величину

$$\varepsilon_k=\omega_kN_k+\Omega_kn_k$$

— плотность энергии в k-пространстве. Из (36) и (37) следует, что ε_k подчиняется уравнению

$$\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial t}=\int\Big\{\omega_kU_{k|k_1k_2}T_{k|k_1k_2}-\omega_kU_{k_1|kk_2}T_{k_1|kk_2}- -\Omega_kU_{k_2|k_1k}T_{k_2|k_1k}\Big\}dk_1dk_2\,. \qquad (42)$$

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения. Как и раньше, будем искать решения (42) в виде (38). Аналогичным образом в выражении (42) совершим отображение области интегрирования второго и третьего интегралов в область интегрирования первого. Для второго интеграла это преобразование совпадает с преобразованием (40), а для третьего оно имеет вид

$$\begin{aligned} k_z&=k_z''\frac{k_z}{k_z''},\quad \zeta=\zeta''\frac{\zeta}{\zeta''},\\ k_{z_1}&=k_z'\frac{k_z}{k_z''},\quad \zeta_1=\zeta'\frac{\zeta}{\zeta''},\\ k_{z_2}&=k_z\frac{k_z}{k_z''},\quad \zeta_2=\zeta\frac{\zeta}{\zeta''}. \end{aligned} \qquad (43)$$

После подстановки (40) и (43) в стационарное уравнение (42) получим

$$0=\int|V_{kk_1k_2}|^2\delta_{k-k_1-k_2}\delta_{\omega-\omega_1-\Omega_2}T_{k|k_1k_2}dk_1dk_2\times \times\left\{\omega(k)-\omega(k_1)\Big(\frac{k_z}{k_{z_1}}\Big)^{2\alpha+5}\Big(\frac{k_\perp}{k_{\perp_1}}\Big)^{2\beta+4}- -\Omega(k_2)\Big(\frac{k_z}{k_{z_2}}\Big)^{2\alpha+5}\Big(\frac{k_\perp}{k_{\perp_2}}\Big)^{2\beta+4}\right\}.$$

Отсюда следует, что фигурная скобка обращается в нуль при $\alpha=-5/2$, $\beta=-2$, т. е. решения имеют вид

$$n_k=Ak_z^{-5/2}k_\perp^{-2},\quad N_k=Bk_z^{-5/2}k_\perp^{-2}. \qquad (44)$$

Найденные решения соответствуют спектрам с постоянным потоком энергии P_ε. Связь между величинами A и B, как и раньше, определяется из стационарных уравнений (32). Из этих уравнений получаем прежнюю оценку для соотношения между A и B:

$$c_sA\sim V_AB.$$

Полученные выше решения колмогоровского типа относятся только к одному каналу — взаимодействию альфвеновских волн и медленного магнитного звука, что значительно снижает ценность найденных решений. Напомним, что процессы с участием быстрого звука имеют тот же порядок величины инкрементов, и поэтому ими нельзя пренебрегать. К счастью, этот канал может быть включен в рассмотренную выше схему без существенных усовершенствований. Как отмечалось в предыдущем разделе, максимальное рассеяние A-волн (алфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн) имеет место при максимальном значении z-проекции импульса, переданного медленному звуку. Естественно предположить, что такое поведение амплитуды рассеяния A-волн должно приводить к сильно анизотропным распределениям волн, сосредоточенным в k-пространстве в узком конусе углов вдоль магнитного поля: $k_z \gg k_\perp$. При выполнении этого условия можно считать, что частота быстрого магнитного звука совпадает с частотой альфвеновских волн:

$$\omega_2 \approx |k_z| V_A.$$

Другим важным обстоятельством является то, что в данном случае матричный элемент взаимодействия A-волн с медленным звуком оказывается диагональным по поляризациям λ:

$$V^{\lambda\lambda_1}_{k' k'_1 k_2} \approx \delta_{\lambda\lambda_1} V^{11}_{k' k'_1 k_2}.$$

Таким образом, в случае почти продольного (вдоль магнитного поля) распределения не обнаруживается разница между альфвеновскими и быстрыми магнитозвуковыми волнами. Более того, отсутствует энергообмен между альфвеновскими и быстрыми магнитозвуковыми волнами. Это означает, что для этой области углов колмогоровские спектры для быстрых магнитозвуковых волн будут иметь тот же вид, что и полученные выше спектры (41) и (44). При этом в выражениях (41) и (44) N_k и B заменятся соответственно на N_k^λ и B_λ, а коэффициент A будет определяться как

$$A \sim \beta^{-1/2} \frac{\sum B_\lambda^2}{\sum B_\lambda}.$$

Полученные выше колмогоровские спектры (41) и (44) будут иметь физический смысл, если будет выполнено требование локальности турбулентности, состоящее в том, что вклады во взаимодействие волн от областей источников и затухания турбулентности должны быть достаточно малы. Это сводится к требованию сходимости интегралов в уравнениях (36) и (37).

Сходимость интегралов по k_z в кинетических уравнениях обеспечивается наличием двух δ-функций от k_z. Интегралы же по поперечным волновым векторам оказываются логарифмически расходящимися. Логарифмическая расходимость, на наш взгляд, представляется не столь опасной, какой могла бы быть степенная расходимость, поскольку она лежит на границе локальности. Появление расходимости связано с биоднородностью вероятности U. Если бы среда была изотропной, а матричные элементы V и частоты имели бы те же степени однородности, что и для МГД при $\beta \ll 1$ (такая ситуация имеет место для рассеяния Мандельштама–Бриллюэна), то в этом случае имела бы место локальность (см. [34]). Нарушение биоднородности для взаимодействия альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн возникает для почти поперечного распространения:

$$k_\perp / k_z \sim \beta^{-1/2},$$

а для взаимодействия быстрых магнитозвуковых волн — при углах

$$k_\perp / k_z \sim \beta^{1/2}.$$

По этой причине обрезание интегралов в кинетических уравнениях следует провести на меньших углах ($\lesssim \beta^{1/2}$). Логарифмическую расходимость можно устранить путем введения степени логарифмов от поперечных импульсов $k_\perp$ в спектрах (41) и (44). Однако такая процедура не приводит к определению этих степеней, хотя и обеспечивает сходимость интегралов. Наконец отметим, что как спектры (41), так и спектры (44) имеют одинаковую зависимость от поперечных импульсов:

$$n_k, N_k \propto k_\perp^{-2},$$

что совпадает со степенью однородности $\delta(\mathbf{k}_\perp)$. Это означает, что помимо анизотропных колмогоровских спектров (41) и (44) возможны сингулярные колмогоровские спектры:

$$n_k = A k_z^{-2} \delta(\mathbf{k}_\perp), \quad N_k = B k_z^{-2} \delta(\mathbf{k}_\perp)$$

и

$$n_k = A k_z^{-5/2} \delta(\mathbf{k}_\perp), \quad N_k = B k_z^{-5/2} \delta(\mathbf{k}_\perp).$$

Строгий ответ на вопрос, какие стационарные спектры реализуются в действительности, может дать исследование полученных решений на устойчивость, а на качественном уровне — численное моделирование. Оба эти подхода требуют отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-01-00929), Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96007) и INTAS. Автор благодарит В. Е. Захарова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 299 (1941).
2. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., **5** (1941).
3. V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. E. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1992).
4. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **51**, 688 (1966).
5. В. Е. Захаров, ПМТФ **4**, 34 (1965).
6. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ПМТФ **5**, 62 (1967).
7. S. V. Nazarenko, A. B. Mikhailovski et al., Phys. Lett. A **133**, 407 (1988).
8. А. М. Балк, В. Е. Захаров, С. В. Назаренко, ЖЭТФ **98**, 446 (1990).
9. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, ДАН СССР **147**, 71 (1962).
10. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, Phys. Rev. E **61**, 831 (1999).
11. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ДАН СССР **194**, 1288 (1970).
12. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1998).
13. Е. А. Кузнецов, Препринт ИЯФ СОАН СССР №81-73, Новосибирск (1973).
14. S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet, J. Plasma Phys. **63**, 447 (2000); in: *Nonlinear MHD Waves and Turbulence*, ed. by T. Passot and P.-H. Sulem, Springer-Verlag (1999).
15. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН **73**, 132 (1961).
16. Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, А. В. Шафаренко, Письма в ЖЭТФ **37**, 241 (1983).
17. В. П. Рубан, ЖЭТФ **116**, 563 (1999).
18. A. Frenkel, E. Levich, and L. Shtilman, Phys. Lett. A **88**, 461 (1982).
19. Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, ЖЭТФ **64**, 947 (1986).
20. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1932).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1959).
22. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
23. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
24. V. A. Vladimirov and H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **283**, 125 (1995).
25. Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **62**, 584 (1972).
26. Б. И. Давыдов, ДАН **69**, 165 (1949).
27. Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **2**, 327 (1976).
28. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ПМТФ **5**, 84 (1972).
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1967).
30. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **60**, 1714 (1971).
31. В. Е. Захаров, А. И. Дьяченко, О. А. Васильев, Письма в ЖЭТФ **73**, 68 (2001).
32. A. Pushkarev and V. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **76**, 3320 (1996).
33. А. В. Кац, В. М. Конторович, Письма в ЖЭТФ **14**, 392 (1970).
34. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **48**, 458 (1978).