ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 5 (11), стр. 1069–1085

ДИСКРЕТНАЯ КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ И АНОМАЛИИ

С. Н. Вергелес *

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 мая 2001 г.

Предлагается новая версия квантовой гравитации на дискретных пространствах (симплициальных комплексах). Рассматривается теория гравитации, взаимодействующей с дираковским полем. Показывается, что в рассматриваемой теории отсутствует репараметризационная аномалия. Обсуждается проблема аксиальной калибровочной аномалии и связанная с ней проблема «удвоения» фермионных состояний на решетке.

PACS: 04.60.Nc

1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку традиционные методы квантования гравитации в четырех измерениях оказались несостоятельными вследствие ультрафиолетовых расходимостей, возникла естественная идея, что на сверхмалых масштабах (порядка планковских и меньше) имеет место качественно иная физика[1)].

В настоящее время господствующая в теоретической физике точка зрения заключается в том, что теория суперструны является фундаментальной физической теорией. В десятимерном пространстве теория суперструны является самосогласованной, а также свободной от расходимостей теорией. Теория суперструны содержит гравитационное взаимодействие. Поэтому в рамках струнной идеологии мы имеем следующую качественную картину: квантовая теория гравитации является фрагментом квантовой теории суперструны как длинноволновый предел. Тем самым решается проблема ультрафиолетовых расходимостей и доопределения квантовой теории гравитации.

Однако в рамках струнной идеологии возникает исключительно сложная проблема компактификации шести измерений и построения длинноволновой физики в четырех измерениях. Поэтому реальное продвижение на этом пути в решении многочисленных проблем квантовой теории гравитации и квантовой космологии в настоящее время отсутствует.

Сказанное оправдывает существование некоторых других идей, лежащих в основании фундаментальной квантовой теории поля, и в первую очередь — теории гравитации. Наиболее интересной нам представляется идея дискретного пространства-времени, развитию которой посвящена настоящая работа.

Впервые идея о дискретности пространства-времени (применительно к теории гравитации) была сформулирована в пионерской работе Редже [2] задолго до появления теории струны. Согласно Редже, роль гладких пространств Римана играют кусочно-плоские пространства, а именно — симплициальные комплексы (необходимые сведения из теории симплициальных комплексов приведены в начале следующего раздела). При этом каждому одномерному симплексу (ребру) приписывается его длина, так что если совокупность трех ребер образует границу двумерного симплекса (треугольника), то длины этих ребер удовлетворяют неравенствам треугольников. Тем самым полностью определена геометрия комплекса. Оказывается, что величина, являющаяся аналогом тензора Римана на гладком пространстве Римана, отлична от нуля лишь на совокупности $(D-2)$-мерных симплексов (D — размерность симплициального комплекса), т. е. «тензор

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

1) В этом смысле квантовая теория гравитации, изложенная автором в работе [1], должна рассматриваться как феноменологическая теория, полезная для изучения конкретных проблем (как, например, физика черной дыры внутри горизонта), но не как фундаментальная теория.

кривизны» становится распределением.

Рассмотрим подробнее двумерную кусочно-плоскую поверхность. Пусть α^r — число r-мерных симплексов комплекса $\mathfrak{K}$. В двумерном случае $r = 0, 1$ и 2, причем длины всех одномерных симплексов заданы. Покажем, что такая поверхность может быть вложена в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Предположим сначала, что наша поверхность вложена в $\mathbb{R}^N$. Тогда полное число имеющихся степеней свободы равно $N\alpha^0$ (местоположения вершин) минус число связей α^1 (длины ребер). Это число должно быть не меньше числа параметров группы трансляций и вращений пространства $\mathbb{R}^N$. Таким образом, имеем следующую оценку:

$$N\,\alpha^0 - \alpha^1 \geq N + \frac{1}{2}N(N-1).$$

В случае очень больших комплексов правой частью можно пренебречь, так что

$$N \geq \alpha^1/\alpha^0.$$

Учтем далее, что

$$\chi = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$$

— эйлерова характеристика комплекса, остающаяся неизменной при заданной топологии [3, 4]. Поэтому для очень больших комплексов можно положить

$$\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2 = 0.$$

Кроме того, всегда выполняется соотношение

$$2\alpha^1 = 3\alpha^2.$$

Комбинируя последние соотношения, мы приходим к оценке $N \geq 3$. Таким образом, мы вправе считать, что любая двумерная кусочно-плоская поверхность вложена в трехмерное евклидово пространство.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ окрестность какой-либо вершины p комплекса $\mathfrak{K}$. Пусть вершина p соединена ребрами с другими n вершинами комплекса с номерами $1, 2, \ldots, n$, причем треугольники

$$\Delta_1 = pn1, \quad \Delta_2 = p12, \ldots, \quad \Delta_n = p(n-1)n$$

принадлежат комплексу (треугольник с вершинами p, i, j мы обозначили pij). Поместим вершину p в начало координат пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда плоскость, в которой находится треугольник Δ_i, описывается уравнением

$$n_x(i)x + n_y(i)y + n_z(i)z = 0,$$

где $n_x(i), n_y(i), n_z(i)$ — компоненты единичного вектора, нормального к Δ_i. Предположим, что $n_z(i) \neq 0$ для всех i. В этом случае координаты x, y могут являться локальными координатами на всех треугольниках Δ_i, причем вершина p имеет координаты $x = y = 0$. По определению метрика на рассматриваемой кусочно-плоской поверхности индуцируется евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^3$. Поэтому тензор Римана R_{xyxy} обращается в нуль на внутренних частях треугольников. Очевидно также, что тензор Римана равен нулю на границах между треугольниками Δ_i и Δ_{i+1} за исключением, быть может, их вершин. Действительно, часть комплекса $\mathfrak{K}$ вблизи вершины p можно рассматривать как предел семейства гладких конусов с индуцированной метрикой и, следовательно, нулевым тензором Римана везде, за исключением вершины.

Пусть θ_i — внутренний угол треугольника $p(i-1)i$ в вершине p. Определим дефект угла ε_p в вершине p с помощью формулы

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi - \varepsilon_p.$$

Согласно сказанному выше, тензор Римана на кусочно-плоской поверхности равен нулю везде, за исключением, быть может, ее вершин. Поэтому тензоры Римана и Риччи, а также скалярная кривизна являются распределениями с носителями в вершинах комплекса. Легко понять, что определение скалярной кривизны с помощью равенства

$$\sqrt{|g|}R = 2\sum_i \varepsilon_i \delta(x - x_i)\delta(y - y_i) \qquad (*)$$

(где x, y — локальные координаты на кусочно-плоской поверхности, i — номер вершины поверхности, ε_i — дефект угла в соответствующей вершине, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, R — скалярная кривизна) является разумным. Действительно, во-первых, соотношение (*) инвариантно относительно замены локальных координат. Во-вторых, в случае $|\varepsilon_p| \ll 1$ параллельный перенос вектора, принадлежащего касательному пространству кусочно-плоского пространства, вокруг вершины p приводит к повороту этого вектора на угол ε_p, который в ортонормированном базисе задается известной формулой

$$\varepsilon_p = \int\limits_\sigma R_{1212}\,dxdy.$$

При этом $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ и $R = 2R_{1212}$. Здесь σ — область, ограниченная контуром, по которому переносится вектор, и содержащая вершину p. Полученное равенство записывается в форме, не зависящей от локальных координат:

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{|g|}R.$$

Это подтверждает равенство (*).

В D-мерном случае ситуация аналогична описанной выше: тензор Римана не равен нулю лишь на $(D-2)$-симплексах. Если s обозначает $(D-2)$-симплекс и $\overline{s}$ — его $(D-2)$-объем, то аналог равенства (*) представляется в виде

$$\int d^Dx\sqrt{|g|}R = 2\sum_s \overline{s}\varepsilon_s, \tag{1}$$

где ε_s — дефицит угла вокруг симплекса s.

Более детальная разработка исчисления Редже содержится в работе [5]. Аналогичный исчислению Редже подход к дискретной геометрии читатель сможет найти также в работах [6, 7].

Несмотря на очевидное изящество исчисления Редже, при переходе к квантовой теории действие (1) оказывается весьма неудобным. Действительно, независимые переменные, которые определяют правую часть (1), — это длины одномерных симплексов, подчиненные огромному количеству связей, а именно, неравенствам треугольника. Кроме того, при включении в теорию дираковских полей возникает новая трудность, заключающаяся в отсутствии в явном виде ортонормальных базисов. Возможно по этой причине в настоящее время интенсивнее развивается вариант дискретной гравитации, основанный на так называемой B–F-теории.

Чтобы сформулировать идеи, выработанные на основе B–F-теории, запишем действие для четырехмерной теории гравитации с Λ-членом и безмассовым дираковским полем в виде интеграла от 4-формы:

$$S = \int \varepsilon_{abcd}\left\{-\frac{1}{4l_P^2}\left(R^{ab}\wedge\omega^c\wedge\omega^d + \right.\right. \\ \left. + \frac{1}{3}\Lambda\omega^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c\wedge\omega^d\right) + \\ \left. +\frac{1}{6}\Theta^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c\wedge\omega^d\right\}, \tag{2}$$

$$d\omega^{ab} + \omega^a_c\wedge\omega^{cb} = \frac{1}{2}R^{ab},$$

$$\Theta^a = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}_\mu\overline{\psi}\gamma^a\psi\right)dx^\mu.$$

Здесь

$$\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$$

— 1-форма связности в неком ортонормальном базисе $\omega^a = e^a_\mu dx^\mu$, $g_{\mu\nu} = e_{a\mu}e^a_\nu$ — метрический тензор, l_P — планковская длина, ψ — дираковское поле, γ^a — матрицы Дирака и $\mathcal{D}_\mu\psi$ — ковариантная производная дираковского поля ψ.

Теперь рассмотрим теорию гравитации без Λ-члена и материи в трехмерном пространстве. Действие в такой теории имеет простой вид:

$$S = -\frac{1}{l_P}\int B^a\wedge F_a. \tag{3}$$

Здесь введены стандартные обозначения:

$$B^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad F_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}R^{bc}.$$

Уравнения движения, вытекающие из этого действия, имеют вид

$$\nabla_\mu e^a_\nu - \nabla_\nu e^a_\mu = 0, \tag{4}$$

$$F_a = 0. \tag{5}$$

Таким образом, в B–F-теории (3) кривизна равна нулю, и эта теория является топологической. B–F-теория может быть легко сформулирована в пространстве любой размерности. Например, в четырех измерениях ее действие подобно действию (3):

$$S = -\frac{1}{l_P^2}\int B^{ab}\wedge F_{ab}, \tag{6}$$

где

$$B^{ab} = -B^{ba}, \quad F_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{cd}$$

— 2-формы. Очевидно, что и в случае теории (6), так же, как и в случае B–F-теории в любой размерности пространства, тензор кривизны равен нулю, т. е. B–F-теория всегда является топологической. Однако, если в трехмерном пространстве B–F-теория действительно описывает гравитацию, то в пространствах высших размерностей это уже не так. Например, в четырехмерном пространстве теория (6) будет описывать гравитацию, если положить

$$B^{ab} = \frac{1}{2}\omega^a\wedge\omega^b. \tag{7}$$

Конечно, тогда кривизна уже не будет нулевой.

Изложенные выше обстоятельства лежат в основе другого подхода к построению дискретной квантовой теории гравитации. При этом подходе на первом этапе рассматривается дискретный аналог B–F-теории в любом пространстве размерности D. Поскольку поле B (см. (3) и (6)) является

$(D-2)$-формой, в дискретном варианте теории каждому $(D-2)$-симплексу приписывается независимый элемент поля B. В результате интегрирования по полю B в континуальной теории амплитуда перехода приобретает вид

$$Z \sim \int D\omega_{\mu}^{ab} \prod_{x} \delta\big(F(x)\big). \tag{8}$$

В дискретном варианте изучается непосредственно обобщение выражения (8) для амплитуды перехода. Чтобы упростить это обобщение, строится дуальная решетка исходного симплициального комплекса. Вершины дуальной решетки v_i находятся в серединах D-мерных симплексов, т. е. они являются некими внутренними точками D-мерных симплексов. Обозначим через e_s отрезки, соединяющие ближайшие вершины дуальной решетки, индекс s нумерует эти отрезки. Таким образом, каждое дуальное ребро e_s один раз пересекает некий $(D-1)$-симплекс, являющийся общим для двух D-симплексов, центры которых соединяет дуальное ребро e_s. Зафиксируем $(D-2)$-симплекс и обозначим через f его дуальный двумерный многоугольник, который ограничен дуальными ребрами $e_s f$ и пересекается в одной точке с заданным $(D-2)$-симплексом, но не пересекается ни с каким другим $(D-2)$-симплексом. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между $(D-2)$-симплексами исходного симплициального комплекса и дуальными двумерными многоугольниками. Заметим, что в обозначении $e_s f$ индекс f соответствует принадлежности дуального ребра дуальному многоугольнику f, а $s = 1, 2, \ldots, N$ — номер этого ребра, причем число N может быть произвольно большим. Припишем каждому дуальному многограннику ориентацию. Это означает задание направления обхода границы многогранника. Тем самым ориентация дуального многогранника очевидным образом определяет ориентацию каждого дуального ребра, принадлежащего этому многограннику. Поскольку одно ребро принадлежит многим многогранникам, его ориентация может изменяться в зависимости от его принадлежности тому или иному многограннику.

Рассмотрим многоугольник f. Пронумеруем дуальные ребра $e_1 f, e_2 f, \ldots, e_N f$ в порядке их прохождения при положительном (против хода часовой стрелки) обходе границы могоугольника f, при этом обходе одновременно задается ориентация ребер. Припишем каждому дуальному ребру $e_s f$ элемент $g_{e_s f}$ группы голономии G связности $\omega_{b\mu}^{a}$. Например, в четырехмерном случае группа G является либо группой Лоренца $SO(3,1)$, либо ортогональной группой $SO(4)$ (в случае евклидового квантования). Смена ориентации дуального ребра ведет к замене элемента $g_{e_s f}$ на обратный. В частности, если $e_s f$ и $e_{s'} f'$ — одно и то же дуальное ребро, принадлежащее двум смежным многоугольникам f и f', причем ориентации $e_s f$ и $e_{s'} f'$ противоположны, то

$$g_{e_s f} = g_{e_{s'} f'}^{-1}.$$

На пространстве элементов $g_{e_s f}$ действует калибровочная группа:

$$g_{e_s f} \to h_{v_+} g_{e_s f} h_{v_-}^{-1}. \tag{9}$$

Здесь h_{v_i} — произвольный элемент группы голономии G, который приписывается независимо каждой вершине v_i, а h_{v_+}, h_{v_-} — соответствующие элементы в начале и конце ориентированного ребра $e_s f$.

По аналогии с (8) в дискретном варианте B–F-теории после интегрирования по степеням свободы, содержащимся в поле B, для любого дуального многоугольника f мы будем иметь следующие условия:

$$g_{e_1 f} \cdot g_{e_2 f} \cdot \ldots \cdot g_{e_N f} = 1. \tag{10}$$

Действительно, совокупность последних равенств эквивалентна в непрерывной теории условию равенства нулю интегралов от 2-формы кривизны по любым двумерным поверхностям, что означает обращение тензора кривизны в нуль.

Равенства (10) инвариантны относительно действия калибровочной группы (9). В соответствии с (8) и (10) амплитуда перехода, зависящая от конкретного комплекса $\mathfrak{K}$, определяется формулой

$$Z(\mathfrak{K}) = \int \prod_{e \in \mathcal{E}} dg_e \prod_{f \in \mathcal{F}} \delta(g_{e_1 f} \ldots g_{e_N f}), \tag{11}$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ — множества индексов, нумерующих соответственно дуальные ребра и многоугольники, и интегрирование проводится при помощи меры Хаара на группе G. Мера Хаара считается нормированной в случае компактных групп. Дельта-функция в (11) — это дельта-функция на группе G, которая определяется следующим образом:

$$\delta(g) = 0 \quad \text{при} \quad g \neq 1, \qquad \int dg \delta(g) = 1.$$

Мы видим, что при описанном подходе к дискретной B–F-теории поле B, соответствующее $(D-2)$-форме B в непрерывной теории, вообще не возникает явно. В случае топологической теории это не ведет к каким-либо затруднениям, однако амплитуда перехода в (11) не может непосредственно описывать амплитуду перехода в дискретной гравитации, размерность которой выше трех. В последнем случае необходимо наложить на поле B те связи, которые вытекают из представления (7) (в четырехмерном случае). Ясно, что наложение таких связей радикально усложняет теорию, поскольку при этом появляются локальные степени свободы. Задача еще более усложняется, если в теорию включена материя. Например, в случае действия (2) его фермионная часть пропорциональна третьей степени поля ω^a или «полуторной» степени поля B^{ab}. Отсюда следует необходимость явного введения в четырехмерных пространствах поля ω^a. В связи с этим развитие квантовой теории гравитации на основе формализма B–F-теории нам представляется бесперспективным.

Подробное изложение теории квантовой дискретной гравитации на основе B–F-формализма читатель может найти в работах [8–11].

В отличие от многомерного случая, в двумерной дискретной квантовой гравитации был достигнут существенный вычислительный прогресс (см. работы [12, 13]). О связи между квантовой трехмерной теорией Янга–Миллса на решетке и трехмерной теорией гравитации см. [14].

В настоящей работе предлагается новая версия дискретной квантовой теории гравитации. Новая теория отличается как от теории Редже, так и от дискретного варианта B–F-теории. Так же, как и в B–F-теории, связность в нашей теории представляется элементами группы голономии. Однако, в отличие от B–F-теории, в предлагаемой здесь теории все фундаментальные переменные определены непосредственно на элементах симплициального комплекса. В частности, элементы группы голономии, играющие роль 1-формы связности, определены на одномерных симплексах. Предполагается, что группа голономии является спинорной группой. В отличие от B–F-теории, в нашей теории явно вводится аналог 1-формы тетрады (см. ниже формулы (22)–(25)). В дискретном варианте элементы 1-формы тетрады также определены на одномерных симплексах и принадлежат векторному представлению рассматриваемой спинорной группы. Наличие в теории формы тетрады позволяет ввести в рассмотрение дираковское поле, элементы которого преобразуются по спинорному представлению и определяются в вершинах симплициального комплекса. При помощи указанных полей без труда строится решеточное действие, инвариантное относительно калибровочных преобразований, т. е. локальных ортогональных преобразований тетрады и соответствующих преобразований других переменных. При «наивном» переходе к непрерывному пределу это действие переходит в простейшее действие непрерывной теории гравитации.

Кроме того, в статье проводится квантование дискретной гравитации. Это означает определение фундаментальной статистической суммы, являющейся функциональным калибровочно-инвариантным интегралом по полям материи, тетрады и связности с весом «экспонента от действия». При этом оказывается, что для корректного определения статистической суммы необходимо, чтобы калибровочная группа была компактной, что эквивалентно евклидовой сигнатуре метрики.

Хотя в рассматриваемой теории отсутствуют ультрафиолетовые расходимости, в ней содержатся «инфракрасные» расходимости. Эти расходимости соответствуют все большему увеличению длин элементарных одномерных симплексов (ребер) симплициального комплекса. Поэтому инфракрасные расходимости должны интерпретироваться как отражение процесса рождения из первоначального решеточного неструктурированного (с геометрической точки зрения) пространства макроскопического пространства-времени с распределенной в нем материей, подчиняющегося теории Эйнштейна. Наблюдение и интерпретация этих инфракрасных расходимостей является, возможно, наиболее интересным результатом настоящей работы, а само наличие указанных расходимостей в теории делает ее, как нам представляется, весьма привлекательной.

В последнем разделе статьи рассматривается проблема квантовых аномалий. Показано, что в изучаемой теории отсутствует гравитационная, т. е. репараметризационная аномалия. Обсуждается проблема «удвоения» фермионных состояний на симплициальных комплексах.

2. ДИСКРЕТНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Сначала мы приведем некоторые определения и факты из теории симплициальных комплексов. Это необходимо, поскольку на их основе даются определения объектов, отсутствующих в литературе по комбинаторной топологии (см. [3, 4]), но используемых при нашем подходе к дискретной гравитации.

Определение 1. Конечная совокупность $\mathfrak{K}$ элементов $a_0, a_1, \ldots, a_N$ называется конечным абстрактным симплициальным комплексом с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_N$, если выполнены следующие условия.

1. Некоторые из подмножеств множества $\mathfrak{K}$ отмечены и называются абстрактными симплексами комплекса $\mathfrak{K}$.

2. К числу отмеченных принадлежат все подмножества $\mathfrak{K}$, содержащие по одному элементу, так что каждая вершина комплекса $\mathfrak{K}$ является его симплексом.

3. Если s есть некоторый симплекс из $\mathfrak{K}$, то каждая его часть, называемая гранью симплекса s, также является симплексом комплекса $\mathfrak{K}$.

Если абстрактный симплекс $s^r = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ имеет $(r+1)$ вершину, то число r называется его размерностью. Максимальная из размерностей симплексов, входящих в комплекс $\mathfrak{K}$, называется размерностью комплекса $\mathfrak{K}$. □

Нас интересуют только симплициальные комплексы (прилагательное «абстрактный» далее опускается) конечной размерности, или конечномерные. Бесконечный комплекс $\mathfrak{K}$ отличается от конечного лишь тем, что его множество вершин бесконечно. Пусть s — произвольный симплекс комплекса $\mathfrak{K}$; звездой симплекса s, обозначаемой $\mathrm{st}_{\mathfrak{K}}(s)$, называется множество всех симплексов комплекса $\mathfrak{K}$, для которых s является гранью.

Определение 2. Бесконечный симплициальный комплекс $\mathfrak{K}$ называется локально конечным, если звезда $\mathrm{st}_{\mathfrak{K}}(s)$ каждого симплекса $s \in \mathfrak{K}$ состоит из конечного числа симплексов. □

Предположим теперь, что вершины конечного (бесконечного) комплекса $\mathfrak{K}$ являются точками некоторого евклидового (гильбертова) пространства, причем совокупность вершин любого симплекса размерности r не принадлежит ни одной плоскости размерности $r-1$. В этом случае комплекс $\mathfrak{K}$ называется геометрическим симплициальным комплексом. Геометрической реализацией симплициального комплекса $\mathfrak{K}$ называется такое взаимнооднозначное отображение вершин комплекса $\mathfrak{K}$ в вершины геометрического симплициального комплекса $\mathcal{K}$, что как при прямом, так и при обратном отображениях каждый симплекс отображается в симплекс.

Приведем без доказательства следующую теорему (см. [3, 4]).

Теорема 1. Абстрактный конечный D-мерный комплекс $\mathfrak{K}$ всегда можно реализовать в виде геометрического комплекса $\mathcal{K}$, расположенного в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2D+1}$. Бесконечный абстрактный комплекс может быть реализован в гильбертовом пространстве в том и только в том случае, если он локально конечен и состоит из счетного множества симплексов.

Любая последовательность $a, b, c, \ldots, f$, в которой можно записать совокупность всех вершин некоторого симплекса, называется порядком вершин этого симплекса.

Определение 3. Симплекс $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ имеет ориентацию или ориентирован, если каждому порядку его вершин поставлен в соответствие знак «+» или «−», так что порядкам, отличающимся нечетной перестановкой, соответствуют противоположные знаки. Этот факт можно записать в виде равенства

$$s^r = \varepsilon(a_0, a_1, \ldots, a_r), \tag{12}$$

где ε означает тот знак, который приписан последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_r$. Если s^r — ориентированный симплекс, то $(-s^r)$ обозначает противоположно ориентированный симплекс. Нульмерный симплекс допускает две противоположные ориентации: $+(a_0)$ и $-(a_0)$.

Пусть $(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r)$ — грань симплекса s^r, полученная устранением из последовательности вершин $a_0, a_1, \ldots, a_r$ одной вершины a_i. По определению, ориентация этой грани, заданная формулой

$$B_i^{r-1} = (-1)^i \varepsilon(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r), \tag{13}$$

называется индуцированной ориентацией симплекса s^r. □

Ориентированный симплекс (12) удобно формально рассматривать как произведение его вершин:

$$s^r = \varepsilon a_0 a_1 \ldots a_r. \tag{14}$$

При этом выполняются правила кососоммутативности:

$$a_\alpha a_\beta = -a_\beta a_\alpha. \tag{15}$$

Хотя последующие определения содержат известные понятия, они приспособлены автором для удобства изложения рассматриваемого в настоящей работе варианта дискретной гравитации.

Кроме того, мы рассматриваем D-мерные сильно связные симплициальные комплексы, т. е. такие, для которых справедливо следующее утверждение: каждый D-симплекс имеет хотя бы одну $(D-1)$-мерную грань, которая принадлежит также некоторому другому D-мерному симплексу комплекса.

Определение 4. Два ориентированных D-мерных симплекса s_1^D и s_2^D D-мерного симплициального комплекса называются ориентированными согласованно, если либо симплексы s_1^D и s_2^D не имеют общих $(D-1)$-мерных граней, либо ориентация их общей $(D-1)$-мерной грани B^{D-1}, индуцированная ориентацией симплекса s_1^D, противоположна ориентации этой же грани B^{D-1}, индуцированной ориентацией симплекса s_2^D. $\square$

Определение 5. D-мерный сильно связный симплициальный комплекс $\mathfrak{K}$ называется ориентируемым и ориентированным, если существует такая ориентация всех его D-мерных симплексов, что любая пара его D-мерных симплексов ориентирована согласованно. Согласованная ориентация D-мерных симплексов задает ориентацию комплекса. $\square$

Далее мы рассматриваем лишь ориентированные симплициальные комплексы.

Обозначим через $\{s_A^D\}$ совокупность D-мерных симплексов комплекса, а через $\{a_{A\alpha}\}$, $\alpha = 0,\ldots,D$ — множество вершин симплекса s_A^D. Пусть ориентация симплекса s_A^D задается следующим порядком его вершин:

$$s_A^D = a_{A\alpha_0} a_{A\alpha_1} \ldots a_{A\alpha_D}. \qquad (16)$$

Введем также следующие обозначения для ориентированных 1-симплексов, имеющих общую вершину $a_{A\alpha_0}$:

$$X^A_{\alpha_0\alpha_i} = a_{A\alpha_0} a_{A\alpha_i} = -X^A_{\alpha_i\alpha_0}, \quad i = 1,\ldots,D. \qquad (17)$$

Определение 6. Назовем ориентированным репером симплекса s_A^D в вершине $a_{A\alpha_0}$ совокупность ориентированных 1-симплексов (17), записанных в определенном порядке, считая, что четная перестановка этих 1-симплексов не изменяет ориентацию, а нечетная перестановка изменяет ориентацию репера на противоположную. По определению, репер

$$\mathcal{R}^{A\alpha_0} = \left(X^A_{\alpha_0\alpha_1}, X^A_{\alpha_0\alpha_2}, \ldots, X^A_{\alpha_0\alpha_D}\right) \qquad (18)$$

ориентирован положительно. $\square$

Корректность данных определений, относящихся к ориентациям комплексов и реперов, проверяется тем, что в случае геометрической реализации комплекса и последующего сглаживания кусочно-плоской поверхности эти определения по существу совпадают с определениями ориентируемого гладкого многообразия и взаимной ориентации локальных координат.

Далее мы полагаем $D = 4$, т. е. рассматриваем четырехмерные комплексы.

Пусть γ^a, $a = 1,2,3,4$, — четырехмерные эрмитовы матрицы Дирака, так что

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}, \quad (\gamma^a)^\dagger = \gamma^a, \qquad (19)$$

и антиэрмитовы спиновые операторы

$$\sigma^{ab} \equiv (1/4)[\gamma^a, \gamma^b]$$

удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям группы $SO(4)$. Обозначим $\mathrm{Spin}(4)$ спинорную группу в спинорном представлении, в котором каждый элемент может быть записан в виде

$$g = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\sigma^{ab}\right), \quad g^\dagger = g^{-1}, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}. \qquad (20)$$

Поставим в соответствие каждому одномерному ориентированному симплексу $X^A_{\alpha_i\alpha_j} = a_{A\alpha_i}a_{A\alpha_j}$ $(\alpha_i \neq \alpha_j)$ элемент группы $\mathrm{Spin}(4)$, который обозначим через $\Omega\left(X^A_{\alpha_i\alpha_j}\right)$. По определению

$$\Omega\left(X^A_{\alpha_i\alpha_j}\right) = \Omega^{-1}\left(X^A_{\alpha_j\alpha_i}\right) \subset \mathrm{Spin}(4). \qquad (21)$$

Таким образом, смена ориентации одномерного симплекса ведет к обращению соответствующего элемента Ω. Будем называть величины (21) элементами группы голономии связности на симплициальном комплексе. Мы будем использовать также сокращенное обозначение

$$\Omega\left(X^A_{\alpha_i\alpha_j}\right) \equiv \Omega_{Aij}.$$

Подчеркнем, что значение элемента группы голономии Ω_{Aij} определяется исключительно ориентированным одномерным симплексом $a_{A\alpha_i}a_{A\alpha_j}$, но не зависит от репера, элементом которого является одномерный симплекс $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$. Эта оговорка существенна, поскольку каждый одномерный симплекс, вообще говоря, является элементом нескольких ориентированных реперов.

Пусть V — линейное пространство с базисом γ^a:

$$v \in V \Longleftrightarrow v = v^a\gamma^a.$$

Определим на симплициальном комплексе 1-форму e со значениями в пространстве V, поставив в соответствие вершине $a_{A\alpha_i}$ и ориентированному одномерному симплексу $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$ элемент

$$e\left(X^A_{\alpha_i\alpha_j}\right) \equiv e_{Aij} \in V. \qquad (22)$$

Так же, как в случае с элементами группы голономии, элементы (22) зависят лишь от ориентированного одномерного симплекса $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$, но не зависят от репера, элементом которого является симплекс $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$. Так как e является 1-формой, между элементами (22) имеет место следующая связь:

$$e_{Aij} = -\Omega_{Aij} e_{Aji} \Omega_{Aji}. \qquad (23)$$

Знак «$-$» в (23) связан с тем, что e_{aij} и e_{Aji} — значения 1-формы соответственно на векторах $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$ и $X^A_{\alpha_j\alpha_i} = -X^A_{\alpha_i\alpha_j}$. «Обкладки» из элементов группы голономии в правой части уравнения (23) необходимы по той причине, что для сравнения элемента e_{Aji} с элементом e_{Aij} первый должен быть перенесен параллельно из вершины $a_{A\alpha_j}$ в вершину $a_{A\alpha_i}$.

Таким образом, согласно определению, вектор $v_{A\alpha_j} \in V$ в вершине $a_{A\alpha_j}$ получается путем параллельного переноса вектора $v_{A\alpha_i} \in V$ из вершины $a_{A\alpha_i}$ вдоль симплекса $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$, если имеет место равенство

$$v_{A\alpha_j} = \Omega_{Aji} v_{A\alpha_i} \Omega_{Aij}.$$

Естественно интерпретировать величину

$$l^2_{Aij} \equiv \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(e_{Aij})^2 \tag{24}$$

как квадрат длины ребра $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$. Таким образом, геометрические свойства симплициального комплекса оказываются полностью определенными. Именно поэтому симплициальные комплексы представляют собой самую удобную, если не единственно возможную, решетку для построения дискретной теории гравитации: определенная выше теория является моделью кусочно-плоского пространства Редже. С другой стороны, если бы мы рассматривали, например, кубическую решетку, то аналогичная интерпретация величины (24) была бы весьма затруднительной. Тем самым и теория на основе кубической решетки едва ли могла бы претендовать на роль геометродинамики.

Введенные поля Ω и e описывают гравитационное поле. Теперь введем материальное поле.

Сопоставим каждой вершине $a_{A\alpha_i}$ дираковские спиноры $\psi_{A\alpha_i} = \psi_{Ai}$ и $\overline{\psi}_{Ai}$, каждая из компонент которых принимает значения в комплексной алгебре Грассмана. В случае евклидовой сигнатуры метрики спиноры ψ_{Ai} и $\overline{\psi}_{Ai}$ являются независимыми переменными и при эрмитовом сопряжении переходят друг в друга. Так же, как и в случае гравитационных полей, спиноры ψ_{Ai} и $\overline{\psi}_{Ai}$ определяются самой вершиной, а не четырехмерным симплексом, которому принадлежит эта вершина.

В пространстве полей действует калибровочная группа согласно следующему правилу. Сопоставим каждой вершине $a_{A\alpha_i}$ элемент группы $S_{A\alpha_i} = S_{Ai} \in \mathrm{Spin}(4)$. В соответствии с принципом калибровочной инвариантности поля Ω, e, ψ и преобразованные поля

$$\begin{aligned} &\tilde{\Omega}_{Aij} = S_{Ai}\Omega_{Aij}S^{-1}_{Aj}, \\ &\tilde{e}_{Aij} = S_{Ai}e_{Aij}S^{-1}_{Ai}, \\ &\tilde{\psi}_{Ai} = S_{Ai}\psi_{Ai}, \quad \tilde{\overline{\psi}}_{Ai} = \overline{\psi}_{Ai}S^{-1}_{Ai} \end{aligned} \tag{25}$$

физически эквивалентны.

Наша следующая задача — построение калибровочно-инвариантного действия, которое в пределе медленного изменения полей переходит в классическое действие.

Определим 1-форму Θ на комплексе со значениями в пространстве V, которая билинейна относительно полей $\overline{\psi}$ и ψ. Каждой вершине $a_{A\alpha_i}$ и ориентированному одномерному симплексу $X^A_{\alpha_i\alpha_j}$ поставим в соответствие элемент

$$\begin{aligned} \Theta\big(X^A_{\alpha_i\alpha_j}\big) = \frac{i}{2}\gamma^a\big(&\overline{\psi}_{Ai}\gamma^a\Omega_{Aij}\psi_{Aj} - \\ &- \overline{\psi}_{Aj}\Omega_{Aji}\gamma^a\psi_{Ai}\big) \equiv \Theta_{Aij} \in V. \end{aligned} \tag{26}$$

Величина Θ_{Aij} является эрмитовым оператором. Нетрудно проверить, что 1-форма (26), так же, как и 1-форма e, удовлетворяет соотношению (23). Этот факт устанавливается при помощи повторного применения формулы

$$S^{-1}\gamma^a S = S^a_b\gamma^b, \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} &S \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\sigma^{ab}\right), \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} = \varepsilon^a_b, \\ &S^a_b \equiv \big(\exp\varepsilon\big)^a_b = \delta^a_b + \varepsilon^a_b + \frac{1}{2}\varepsilon^a_c\varepsilon^c_b + \ldots . \end{aligned} \tag{28}$$

При калибровочных преобразованиях (25) 1-форма Θ преобразуется так же, как форма e:

$$\tilde{\Theta}_{Aij} = S_{Ai}\Theta_{Aij}S^{-1}_{Ai}. \tag{29}$$

В случае евклидовой метрики (19) матрица γ^5 определяется формулой

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \big(\gamma^5\big)^\dagger.$$

Евклидово действие системы введенных полей может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{24}\sum_{A,m}\sum_{\sigma(Am)}\varepsilon_{\sigma(Am)}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^5 \times \\ \times\left\{-\frac{1}{l^2_P}\left[\Big(\Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm}\Big) + \frac{1}{12}\Lambda e_{Ami}e_{Amj}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{24}\Theta_{Ami}e_{Amj}\right\} e_{Amk}e_{Aml}. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $\sum_{Am}$ обозначает суммирование по всем вершинам m четырехмерного симплекса A и затем по всем симплексам A. Так как m пробегает 5 значений, то для удобства в (30) введен множитель 1/5. Выражение $\sigma(Am)$ в (30) означает перестановку в репере

$$\mathcal{R}^{A\alpha_m} = \left(X^A_{\alpha_m\alpha_i}, X^A_{\alpha_m\alpha_j}, X^A_{\alpha_m\alpha_k}, X^A_{\alpha_m\alpha_l} \right), \quad (31)$$

так что $\varepsilon_{\sigma(Am)} = +1$, если в результате перестановки получается положительно ориентированный репер, и $\varepsilon_{\sigma(Am)} = -1$ в противном случае. Символ $\sum_{\sigma(Am)}$ означает суммирование по всем 24-м таким перестановкам.

Из формул (25) и (29) непосредственно следует калибровочная инвариантность действия (30). Обратим внимание на то, что l_P^2 в (30) является безразмерной константой.

Теперь покажем, что в пределе медленного изменения полей действие (30) переходит в непрерывное действие гравитации, связанной минимальным образом с дираковским полем, в четырехмерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим некоторое подмножество вершин из симплициального комплекса и каждой вершине из этого подмножества $a_{A\alpha_i}$ припишем координаты (вещественные числа)

$$x^\mu_{A\alpha_i} \equiv x^\mu(a_{A\alpha_i}), \quad \mu = 1,2,3,4. \quad (32)$$

Подчеркнем, что эти координаты определяются лишь вершинами, а не теми симплексами более высокой размерности, которым принадлежат эти вершины, и что соответствие между вершинами из рассматриваемого подмножества вершин и значениями координат (32) взаимно однозначное.

Предположим, что

$$|x^\mu_{A\alpha_i} - x^\mu_{A\alpha_j}| \ll 1. \quad (33)$$

Оценки (33) могут быть легко удовлетворены, если комплекс содержит очень большое (бесконечное) число симплексов и его геометрическая реализация является почти гладкой четырехмерной поверхностью[2)]. Предположим также, что четыре 4-вектора

$$dx^\mu_{Aji} \equiv x^\mu_{A\alpha_i} - x^\mu_{A\alpha_j}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad i = 1,2,3,4, \quad (34)$$

являются линейно независимыми, причем

$$\begin{vmatrix} dx^1_{Am1} & dx^2_{Am1} & \dots & dx^4_{Am1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx^1_{Am4} & dx^2_{Am4} & \dots & dx^4_{Am4} \end{vmatrix} > 0, \quad (35)$$

если репер $\left(X^A_{\alpha_m\alpha_1}, \dots, X^A_{\alpha_m\alpha_4}\right)$ положительно ориентирован. Неравенство (35) означает, что на рассматриваемой почти гладкой поверхности введены положительно ориентированные локальные координаты. При этом дифференциалы координат (34) соответствуют одномерным симплексам $a_{A\alpha_j}a_{A\alpha_i}$, так что если вершина $a_{A\alpha_j}$ имеет координаты $x^\mu_{A\alpha_j}$, то вершина $a_{A\alpha_i}$ имеет координаты $x^\mu_{A\alpha_j} + dx^\mu_{Aji}$.

В непрерывном пределе элементы группы голономии (21) близки к единичному элементу. Представим их в виде, подходящем для перехода к непрерывному пределу:

$$\Omega_{Aij} = \exp\omega_{Aij}, \quad \omega_{Aij} = \frac{1}{2}\omega^{ab}_{Aij}\sigma^{ab}. \quad (36)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений относительно величин $\omega_{Am\mu}$:

$$\omega_{Am\mu}dx^\mu_{Ami} = \omega_{Ami}. \quad (37)$$

В этой системе линейных уравнений индексы A и m фиксированы, по индексу μ происходит суммирование, а индекс i принимает все свои значения. Так как детерминант (35) положителен, то величины $\omega_{Am\mu}$ определяются однозначно. Пусть одномерный симплекс $X^A_{\alpha_m\alpha_i}$ принадлежит четырехмерным симплексам с индексами $A_1, A_2, \dots, A_r$. Введем величину

$$\omega_\mu\left[\frac{1}{2}(x_{A\alpha_m} + x_{A\alpha_i})\right] \equiv \\ \equiv \frac{1}{r}\left\{\omega_{A_1m\mu} + \dots + \omega_{A_rm\mu}\right\}, \quad (38)$$

которую будем считать отнесенной к середине отрезка $[x^\mu_{A\alpha_m}, x^\mu_{A\alpha_i}]$. Напомним, что координаты $x^\mu_{A\alpha_i}$, так же, как и дифференциалы (34), зависят лишь от вершин, но не от тех симплексов более высокой размерности, которым принадлежат данные вершины. Согласно определению имеем также цепочку равенств

$$\omega_{A_1mi} = \omega_{A_2mi} = \dots = \omega_{A_rmi}. \quad (39)$$

Из (34) и (37)–(39) следует, что

$$\omega_\mu\left(x_{A\alpha_m} + \frac{1}{2}dx_{Ami}\right)dx^\mu_{Ami} = \omega_{Ami}. \quad (40)$$

[2)] Под почти гладкой поверхностью здесь подразумевается кусочно-гладкая поверхность, состоящая из плоских четырехмерных симплексов, причем углы между соседними 4-симплексами стремятся к нулю и размеры этих симплексов соизмеримы.

Значение поля ω_μ в (40) на каждом одномерном симплексе однозначно определяется этим симплексом.

Далее будем считать, что поля ω_μ гладко зависят от точек, принадлежащих геометрической реализации каждого четырехмерного симплекса. В этом случае с точностью до $O\big((dx)^2\big)$ включительно справедлива следующая формула

$$\Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm} = \\ = \exp\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_{Am\mu\nu}\,dx^\mu_{Ami}dx^\nu_{Amj}\right], \quad (41)$$

где

$$\mathfrak{R}_{Am\mu\nu} = \partial_\mu\omega_{Am\nu} - \partial_\nu\omega_{Am\mu} + [\omega_{Am\mu}, \omega_{Am\nu}]. \quad (42)$$

В правой части (41), а также в равенстве (42), все поля берутся в вершине $a_{A\alpha_m}$ четырехмерного симплекса A, на что указывает нижний индекс Am. При получении формулы (41) используется формула Хаусдорфа.

Выпишем без пояснений соотношение для поля тетрады, в точности аналогичное (37):

$$e_{Am\mu}dx^\mu_{Ami} = e_{Ami}. \quad (43)$$

При помощи формул (36) и (37) 1-форма (26) с точностью $O(dx)$ принимает вид

$$\Theta_{Aij} = \\ = \gamma^a\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}_{Ai}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi_{Ai} - \overline{\mathcal{D}_\mu\psi}_{Ai}\gamma^a\psi_{Ai}\right]dx^\mu_{Aij}, \quad (44)$$

где

$$\mathcal{D}_\mu\psi_{Ai} = \partial_\mu\psi_{Ai} + \omega_{Ai\mu}\psi_{Ai}. \quad (45)$$

Прежде чем переписать действие (30) в непрерывном пределе, приведем следующую очевидную формулу:

$$\sum_{\sigma(Am)}\varepsilon_{\sigma(Am)}dx^\mu_{Ami}dx^\nu_{Amj}dx^\lambda_{Amk}dx^\rho_{Aml} = \\ = 24\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}v_{SA}. \quad (46)$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ — полностью антисимметричный символ, который вследствие неравенства (35) равен единице, когда $(\mu\nu\lambda\rho) = (1234)$, а v_{SA} — объем геометрической реализации симплекса A в евклидовом четырехмерном пространстве, когда евклидовы координаты геометрической реализации симплекса равны соответствующим координатам его вершин (32). Множитель 24 в (46) необходим, поскольку объем четырехмерного симплекса v_{SA} в правой части меньше объема четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $dx^\mu_{Ami}, \ldots, dx^\mu_{Aml}$, в 24 раза.

В результате применения формул (41)–(46) и замены суммирования на интегрирование действие (30) в непрерывном пределе принимает вид

$$I = \int \mathrm{Tr}\,\gamma^5 \times \\ \times\left[-\frac{1}{4l_P^2}\left(\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\Lambda e\wedge e\right) + \frac{1}{24}\Theta\wedge e\right]\wedge e\wedge e. \quad (47)$$

Здесь 2-форма кривизны (см. (42)) и 1-формы (см. (43), (44)) определяются равенствами

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{1}{2}\sigma^{ab}R^{ab}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu, \\ e = \gamma^a e^a_\mu dx^\mu, \\ \Theta = \gamma^a\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi - \overline{\mathcal{D}_\mu\psi}\gamma^a\psi\right]dx^\mu. \quad (48)$$

Таким образом, в непрерывном пределе действие (30) оказывается равным действию гравитации с Λ-членом и евклидовой сигнатурой метрики, минимальным образом связанной с дираковским полем.

3. КВАНТОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Определим статистическую сумму Z для дискретной евклидовой гравитации, которая после перехода к лоренцевой сигнатуре становится амплитудой перехода в дискретной квантовой теории гравитации. Пронумеруем индексами $\mathcal{V}$ и $\mathcal{E}$ соответственно нульмерные (вершины) и одномерные (ребра) симплексы и обозначим через $\psi_\mathcal{V}$, $\Omega_\mathcal{E}$ и т. д. соответствующие им переменные. По определению

$$Z = \mathrm{const}\left(\prod_\mathcal{E}\int d\Omega_\mathcal{E}\int de_\mathcal{E}\right)\times \\ \times\left(\prod_\mathcal{V}\int d\overline{\psi}_\mathcal{V}\int d\psi_\mathcal{V}\right)\exp\big(-I\big). \quad (49)$$

Здесь const — некий нормировочный множитель, $d\Omega_\mathcal{E}$ — мера Хаара на группе Spin(4),

$$de_\mathcal{E} \equiv \prod_a d\omega^a_\mathcal{E}, \quad e_\mathcal{E} = \omega^a_\mathcal{E}\gamma^a, \quad (50)$$

$$d\overline{\psi}_\mathcal{V}d\psi_\mathcal{V} \equiv \prod_\nu d\overline{\psi}_{\mathcal{V}\nu}d\psi_{\mathcal{V}\nu}. \quad (51)$$

Индекс ν в (51) нумерует отдельные компоненты спиноров $\psi_\mathcal{V}$ и $\overline{\psi}_\mathcal{V}$, так что в (51) мы имеем произведение дифференциалов всех независимых образующих грассмановой алгебры дираковских спиноров. Действие I в (49) задается согласно формуле (30).

Заметим, что мера (50) фактически вычисляется в одной из вершин ребра $\mathcal{E}$, поскольку поля $e_{\mathcal{E}}$ определяются при помощи вершин (см. (22), (23)). Однако вследствие соотношения (23) не имеет значения, к какой из вершин симплекса $\mathcal{E}$ отнесен элемент $e_{\mathcal{E}}$, так как относительно преобразования (23) мера (50) является инвариантной. Поэтому действительно можно считать, что мера (50) относится к ребру $\mathcal{E}$.

Очевидно, что все меры, используемые в функциональном интеграле (49), являются инвариантными относительно калибровочных преобразований (25). Так как действие I в (49) также является калибровочным инвариантом, то и статистическая сумма (49) инвариантна относительно действия калибровочной группы (25).

Покажем, каким образом происходит переход от теории с евклидовой сигнатурой метрики к теории с лоренцевой сигнатурой. Для этого перепишем непрерывный вариант действия (47) в следующем виде:

$$I = \int \varepsilon_{abcd} \left\{ -\frac{1}{4l_P^2} \left[\left(d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{3}\Lambda\omega^a \wedge \omega^b \right] + \frac{1}{6}\Theta^a \wedge \omega^b \right\} \wedge \omega^c \wedge \omega^d. \quad (52)$$

Заметим, что при калибровочных преобразованиях (25) совокупность компонент $\omega^a_{\mathcal{E}}$ $(a = 1,2,3,4)$ величины $e_{\mathcal{E}} = \omega^a_{\mathcal{E}}\gamma^a$ преобразуется как векторное представление группы $SO(4)$, что соответствует евклидовой сигнатуре метрики. Чтобы перейти к лоренцевой сигнатуре, мы должны сделать замену

$$\omega^4 = i\omega^0. \quad (53)$$

Действительно, в непрерывном пределе в случае евклидовой сигнатуры метрики имеем ($\omega^a = e^a_\mu dx^\mu$):

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{3} e^\alpha_\mu e^\alpha_\nu + e^4_\mu e^4_\nu,$$
$$e^a_\mu = (e^\alpha_\mu, e^4_\mu), \quad \alpha = 1,2,3. \quad (54)$$

После замены (53) метрический тензор (54) переходит в тензор

$$g_{\mu\nu} = -e^0_\mu e^0_\nu + \sum_{\alpha=1}^{3} e^\alpha_\mu e^\alpha_\nu, \quad (55)$$

который имеет лоренцеву сигнатуру.

Компоненты $\omega^a_{\mathcal{E}}$, где $a = 0,1,2,3$, преобразуются по векторному представлению группы Лоренца $SO(3,1)$. Теперь из выражения для действия (52) видно, что вместе с заменой (53) должны быть сделаны замены

$$\omega^{4a} = i\omega^{0a}, \quad \Theta^4 = i\Theta^0, \quad \gamma^4 = i\gamma^0. \quad (56)$$

В противном случае разные слагаемые в действии (52) имели бы разную четность относительно комплексного сопряжения. Наконец, величины $\Omega_{\mathcal{E}}$ становятся элементами некомпактной группы $\mathrm{Spin}(3,1)$.

Из формул (2) и (52) следует, что в результате замен (53) и (56) статистическая сумма (49) трансформируется в амплитуду перехода теории гравитации с лоренцевой сигнатурой, причем веса в соответствующих функциональных интегралах преобразуются по правилу

$$\exp(-I) \longrightarrow \exp\left(iS\right), \quad (57)$$

где S — действие рассматриваемой системы на симплициальном комплексе с лоренцевой сигнатурой метрики и некомпактной калибровочной группой $\mathrm{Spin}(3,1)$.

Рассмотрим статистическую сумму (49) с нулевым Λ-членом и в отсутствие фермионов. В этом случае интеграл по 1-форме $e_{\mathcal{E}}$ становится гауссовым:

$$Y\{\Omega\} = \int Dz \exp\left(\frac{1}{2} z_m \mathcal{M}_{mn} z_n\right). \quad (58)$$

Здесь $\{z_m\}$, $m = 1,\ldots,Q$, обозначает совокупность вещественных переменных $\{\omega^a_{\mathcal{E}}\}$, а $\mathcal{M}_{mn}$ — вещественную симметрическую матрицу, зависящую от элементов группы голономии $\Omega_{\mathcal{E}}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2} z_m \mathcal{M}_{mn} z_n \equiv \frac{1}{l_P^2}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{24}\sum_{A,m}\sum_{\sigma(Am)} \varepsilon_{\sigma(Am)} \times$$
$$\times \mathrm{Tr}\left(\gamma^5 \Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm} e_{Amk} e_{Aml}\right). \quad (59)$$

Обозначим через $\{\lambda_q\}$, где $q = 1,\ldots,Q$, набор собственных значений матрицы $\mathcal{M}_{mn}$. Пусть $\varepsilon_q = \mathrm{sign}\,\lambda_q$. Поскольку, вообще говоря, среди собственных чисел $\{\lambda_q\}$ есть как отрицательные, так и положительные, интеграл (58) требует доопределения. Это делается при помощи перехода к лоренцевой сигнатуре. При таком переходе собственные значения изменяются согласно правилу

$$\lambda_q \to e^{i\varphi}\lambda_q,$$

причем $\varphi = 0$ в евклидовом случае и $\varphi = \pi/2$ в случае сигнатуры Минковского. Таким образом, в случае евклидовой сигнатуры гауссов интеграл

$$\mathcal{I}_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\lambda z^2\right) \quad (60)$$

переходит в интеграл Френеля в случае сигнатуры Минковского:

$$\mathcal{I}_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \exp\left(\frac{i}{2}\lambda z^2\right) = \\ = \sqrt{\frac{i}{\lambda}} = (i)^{\varepsilon/2} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}, \qquad (61)$$

где $\varepsilon = \operatorname{sign}\lambda$. Сделаем в правой части (61) аналитическое продолжение

$$\lambda \to e^{-i\varphi}\lambda$$

и положим $\varphi = \pi/2$. Тем самым мы восстановим евклидову сигнатуру метрики и получим значение интеграла (60):

$$\mathcal{I}_E = i^{(\varepsilon+1)/2} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (62)$$

Теперь при помощи (62) доопределим нужный нам интеграл (58):

$$Y\{\Omega\} = \mathrm{const} \prod_q i^{(\varepsilon_q+1)/2} |\lambda_q|^{-1/2}. \qquad (63)$$

Если в теории имеются фермионные поля, то сначала следует вычислить функциональный интеграл по фермионам. Последующее интегрирование по 1-форме e остается гауссовым и дает в статистическую сумму вклад вида (63). Оставшийся интеграл по элементам группы голономии Ω, несмотря на компактность этой группы, может оказаться расходящимся. Действительно, некоторые из собственных значений λ_q при определенных конфигурациях поля Ω могут быть равными нулю. Поскольку подынтегральное выражение зависит от отрицательных степеней величин λ_q, интеграл по полю Ω в этом случае может оказаться расходящимся. С физической точки зрения эти расходимости весьма интересны. Заметим, что стремление собственных значений λ_q к нулю означает, что интеграл по 1-форме e^a насыщается при абсолютных значениях этого поля e^a (или некоторых его компонент), стремящихся к бесконечности. С другой стороны, как будет показано ниже, из того, что компоненты поля имеют большие значения, следует, что динамика этих компонент квазиклассична. Поэтому присутствие указанных расходимостей с физической точки зрения означает, что система (49) эффективно является квазиклассической с действием (52) или (2). Таким образом, возникает классическое макроскопическое пространство-время, в котором могут появиться условия для существования наблюдателя.

В связи с обсуждаемой проблемой укажем, что наличие дираковских полей в интеграле (49) приводит лишь к усилению расходимости при интегрировании по полю e^a. Действительно, после интегрирования по фермионному полю интеграл по полю e^a имеет вид (ср. с (60) и (61))

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz P_n(z) \exp\left(\frac{i}{2}\lambda z^2\right), \qquad (64)$$

где $P_n(z)$ — полином относительно переменной z степени n. Интеграл (64) при малых λ пропорционален $|\lambda|^{-(n+1)/2}$.

Аналогичная физическая интерпретация расходимостей при интегрировании по полю e^a в континуальной квантовой B–F-теории в трехмерном пространстве-времени была дана Виттеном в [15].

Обратим внимание на другой тип возможных расходимостей в дискретной квантовой теории гравитации. Если бы статистическая сумма (49) была определена для лоренцевой сигнатуры метрики, то элементы группы голономии являлись бы элементами некомпактной группы $\mathrm{Spin}(3,1)$. Калибровочная группа (25) также оказалась бы некомпактной, являясь прямым произведением $\mathcal{V}$ копий группы $\mathrm{Spin}(3,1)$. Поскольку как мера, так и действие в амплитуде перехода калибровочно-инвариантны, функциональный интеграл в амплитуде перехода вообще не был бы определен до фиксации (хотя бы частичной) калибровки. Однако фиксация калибровки в фундаментальной амплитуде перехода представляется настолько искусственным действием, что уничтожает смысл самой теории. На наш взгляд, это означает, что фундаментальная статистическая сумма для дискретной теории гравитации может строиться лишь на основе евклидовой сигнатуры метрики.

В известной работе Хартла и Хокинга была выдвинута гипотеза о том, что волновая функция Вселенной должна быть вычислена при помощи функционального интеграла на основе евклидовой сигнатуры метрики [16]. Рассуждения проводились путем аналогии с обычной квантовой теорией с положительно определенными гамильтонианом и евклидовым действием. В последнем случае переход к евклидовой сигнатуре метрики приводит к принципиальной возможности выделения основного состояния, что предполагалось справедливым также в случае теории гравитации, для которой евклидово действие не является положительно определенным. По нашему мнению, аргументы в пользу евклидовой сигнатуры метрики, предоставляемые дискретной теорией гравитации, гораздо надежнее аргументов, представленных в [16].

Поскольку в случае евклидовой сигнатуры метрики калибровочная группа компактна, собственные значения некоторых величин оказываются дискретными (квантованными). Таковыми являются, в частности, элементарные двумерные объемы или площади. Покажем это.

Для фиксированных значений индексов A, m, i, j введем обозначение

$$\Omega_{Amij} = \Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma^{ab}\right). \tag{65}$$

Элемент (65) группы Spin(4) имеет также представление в группе $SO(4)$

$$\Omega^{ab}_{Amij} = (\exp\omega)^{ab} = \delta^{ab} + \omega^{ab} + \frac{1}{2}\omega^{ac}\omega^{cb} + \ldots. \tag{66}$$

Далее будем рассматривать величину (65) или (66) как некую динамическую переменную, а все остальные комбинации переменных Ω_{Bkl} вместе с переменными e и ψ — как переменные, независимые от переменной (66) (хотя не обязательно коммутирующие с выделенной переменной (66)).

Пусть выражение

$$s_{Amij} = a_{Am}a_{Ai}a_{Aj} \tag{67}$$

обозначает выделенный двумерный симплекс и $s_A, s_{A'}, \ldots$ — совокупность четырехмерных симплексов, принадлежащих $\mathrm{st}_{\mathfrak{K}}(s_{Amij})$ (см. Введение).

Обозначим далее через

$$\mathcal{R}^{Am} = \left(X^A_{mi}, X^A_{mj}, X^A_{mk}, X^A_{ml}\right),$$
$$\mathcal{R}^{A'm} = \left(X^{A'}_{mi}, X^{A'}_{mj}, X^{A'}_{mk}, X^{A'}_{ml}\right), \tag{68}$$

и т. д. положительно ориентированные реперы симплексов $s_A, s_{A'}$ и т. д., причем в реперах (68) первая пара 1-симплексов общая:

$$X^A_{mi} = X^{A'}_{mi} = \ldots, \quad X^A_{mj} = X^{A'}_{mj} = \ldots. \tag{69}$$

Поэтому

$$\Omega_{Amij} = \Omega_{A'mij} = \ldots. \tag{70}$$

Выпишем вклад в действие (30), пропорциональный переменной (70) и определенный на симплексе s_A. Этот вклад в векторном представлении имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta I_A &= -\frac{1}{30l_P^2}\varepsilon_{abcd}\Omega^{ab}_{Amij}\sigma^{cd}_{Amkl},\\ \sigma^{cd}_{Amkl} &= \frac{1}{2}(e^c_{Amk}e^d_{Aml} - e^d_{Amk}e^c_{Aml}).\end{aligned} \tag{71}$$

Здесь мы воспользовались следующими соотношениями:

$$\Omega_{Amij} = \Omega^{-1}_{Amji},$$
$$\varepsilon_{abcd}\Omega^{ab}_{Amij} = -\varepsilon_{abcd}\left(\Omega^{-1}_{Amij}\right)^{ab}.$$

Естественно считать величину σ^{cd}_{Amkl} в (71) проекцией на плоскость cd половины площади ориентированного параллелограмма, построенного на 1-симплексах $\left(X^A_{mk}, X^A_{ml}\right)$, или проекцией площади ориентированного 2-симплекса $a_{Am}a_{Ak}a_{Al}$.

Введем для σ^{cd}_{Amkl} дуальную величину

$$^*\sigma^{ab}_{Amkl} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\sigma^{cd}_{Amkl}. \tag{72}$$

Просуммируем вклады в действие (71) для всех указанных 4-симплексов $s_A, s_{A'}, \ldots$ и результат обозначим через ΔI. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta I &= -\frac{1}{15l_P^2}\Omega^{ab}_{Amij}{}^*\sigma^{ab}_{mij},\\ ^*\sigma^{ab}_{mij} &= {}^*\sigma^{ab}_{Amkl} + {}^*\sigma^{ab}_{A'mkl} + \ldots\end{aligned} \tag{73}$$

Пусть l_{ab} — набор левоинвариантных векторных полей на группе $SO(4)$, являющихся образующими алгебры Ли этой группы. Удобно рассматривать величины l_{ab} как дифференциальные операторы первого порядка на пространстве группы $SO(4)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[l_{ab}, l_{cd}] = \delta_{ad}l_{bc} - \delta_{bd}l_{ac} - \delta_{ac}l_{bd} + \delta_{bc}l_{ad}. \tag{74}$$

Если Ω_{ab} — элемент группы $SO(4)$ в векторном представлении, то коммутационные соотношения (74) согласованы со следующим правилом действия операторов l_{ab} на элемент группы $SO(4)$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{cd}l_{cd}\right)\Omega^{ab} = (\delta_{ac} + \varepsilon_{ac})\Omega^{cb}. \tag{75}$$

Здесь параметры ε_{cd} предполагаются бесконечно малыми.

Теперь будем считать, что операторы l_{ab} действуют на элемент Ω^{ab}_{Amij} в (73) так, что формула (75) имеет место, если в ней сделать замену

$$\Omega^{ab} \to \Omega^{ab}_{Amij}.$$

При помощи уравнения (75) получаем

$$\begin{aligned}l_{ab}\left(\Omega^{cd}_{Amij}{}^*\sigma^{cd}_{mij}\right) &=\\ &= {}^*\sigma^{ac}_{mij}\left(\Omega^{-1}\right)^{cb}_{Amij} + \left(\Omega^{-1}\right)^{ac}_{Amij}{}^*\sigma^{cb}_{mij} \equiv\\ &\equiv 2^*\Sigma^{ab}_{Amij} \equiv \varepsilon_{abcd}\Sigma^{cd}_{Amij}.\end{aligned} \tag{76}$$

Величину Σ^{cd}_{Amij} в (76) будем интерпретировать как сумму проекций площадей всех ориентированных двумерных симплексов $a_{Am}a_{Ak}a_{Aa}$, $a_{A'm}a_{A'k}a_{A'l}, \ldots$, дуальных к симплексу $a_{Am}a_{Ai}a_{Aj}$. При этом ориентация симплекса $a_{Am}a_{Ak}a_{Al}$ считается положительной, если соответствующий репер в (68), построенный на вершинах $a_{Am}, a_{Ai}, a_{Aj}, a_{Ak}, a_{Al}$, ориентирован положительно.

Перейдем теперь к квантовомеханическому рассмотрению. С квантовомеханической точки зрения функциональный интеграл (49) определяет трансфер-матрицу (амплитуду перехода в случае лоренцевой сигнатуры), при помощи которой осуществляется эволюция квантовых состояний. Квантовые состояния $\Psi\{\Omega, \overline{\psi}\}$ являются калибровочно-инвариантными функционалами от элементов группы голономии Ω и дираковского поля $\overline{\psi}$. При этом поле e (точнее, некоторые его билинейные комбинации) играет роль импульсной переменной поля Ω, а поле ψ является импульсной переменной для поля $\overline{\psi}$. Квантовые состояния или волновые функции определены над трехмерными симплициальными комплексами. Пусть граница четырехмерного симплициального комплекса $\mathfrak{K}$ состоит из двух несвязных симплициальных комплексов $\partial_1 \mathfrak{K}$ и $\partial_2 \mathfrak{K}$ (несвязность комплексов означает, что у них нет ни одного общего симплекса). Пусть Ψ_1 — начальная волновая функция, определенная над комплексом $\partial_1 \mathfrak{K}$, а Ψ_2 — конечная волновая функция над комплексом $\partial_2 \mathfrak{K}$. Тогда Ψ_2 определяется при помощи функционального интеграла (49). При этом на границе $\partial_1 \mathfrak{K}$ интегрирование проводится с весом $\Psi_1\{\Omega, \overline{\psi}\}$, на границе $\partial_2 \mathfrak{K}$ и только на ней переменные Ω и $\overline{\psi}$ фиксируются, и по всем остальным переменным над четырехмерным комплексом $\mathfrak{K}$ выполняется интегрирование. Результатом такого интегрирования является волновая функция Ψ_2, которую будем обозначать через Ψ.

Из формул (49), (73) и (76) следует, что при квантовомеханическом подходе величине ${}^*\Sigma^{ab}_{Amij}$ соответствует оператор $(15/2) l_P^2 l_{ab}$. Это означает, что среднее калибровочно-инвариантной величины $({}^*\Sigma^{ab})^2$, которая пропорциональна квадрату площади двумерного симплекса Σ^{cd}_{Amij} в (76), находится согласно следующему правилу:

$$\left\langle \left({}^*\Sigma^{ab}_{Amij}\right)^2 \right\rangle = \left(\frac{15}{2} l_P^2\right)^2 \frac{\langle l_{ab}\Psi | l_{ab}\Psi\rangle}{\langle \Psi|\Psi\rangle}. \tag{77}$$

В (77) обозначение $\langle \ldots \rangle$ означает интегрирование по полю Ω при помощи меры Хаара. Поскольку в этой мере операторы l_{ab} являются антиэрмитовыми, из (77) видно, что квадрату элементарной площади

$$\frac{1}{2}\left({}^*\Sigma^{ab}_{Amij}\right)^2 \tag{78}$$

соответствует оператор

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}\right)^2 l_P^2 l_{ab}^2. \tag{79}$$

Теперь из коммутационных соотношений (74) получаем правило квантования для площади $\mathfrak{A}$ элементарной площадки:

$$\begin{gathered} \mathfrak{A} = \left(\frac{15}{2}\right) l_P^2 \sqrt{2[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1)]}, \\ j_1 = 0, 1, \ldots, \quad j_2 = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{80}$$

Правило квантования (80) сохраняет свою силу и в случае лоренцевой сигнатуры метрики.

Вывод о квантовании элементарных площадей в решеточной B–F-теории хорошо известен (см., например, [8, 9] и ссылки там). Наша демонстрация этого результата показывает естественность правила квантования для элементарных площадей в рамках предлагаемого здесь формализма.

Обратим, наконец, внимание на следующее важное обстоятельство. Из теории углового момента известно, что большие значения чисел j_1 и j_2 в (80) соответствуют квазиклассическому пределу. С другой стороны, предельный случай $j_1 \to \infty$, $j_2 \to \infty$ означает стремление элементарных длин к бесконечности (в единицах планковской длины l_P). Тем самым оправдывается приведенный выше вывод о том, что расходимости в статистической сумме (49) при интегрировании по полю e, которые могут возникнуть при $|e| \to \infty$, означают рождение макроскопического и квазиклассического риманова пространства из полностью квантового неструктурированного первоначального пространства. В результате этого рождения появляется континуальная Вселенная, подчиняющаяся уравнению Эйнштейна, на фоне которой имеют место квантовые флуктуации.

4. ДИСКРЕТНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ

Изучение квантовых аномалий начнем с замечания об отсутствии репараметризационной аномалии при рассмотренном здесь подходе к дискретной квантовой гравитации. Действительно, локальные координаты x^μ появляются лишь как маркеры для вершин (см. (32)–(35)), они могут быть выбраны произвольно (при соблюдении указанных условий невырожденности), и во всех квантовых вычислениях локальные координаты вообще не фигурируют. Поскольку рассматриваемая здесь версия дискретной гравитации по определению регуляризована на малых масштабах, сказанное означает отсутствие квантовой аномалии по отношению к произвольным преобразованиям локальных координат. Как известно, это свойство общековариантных теорий поля может, вообще говоря, нарушаться при квантовании. Например, в квантовой алгебре Вирасоро, которая генерирует общековариантные преобразования на пространстве двумерной гравитации или на мировой поверхности струны, имеется аномалия (центральный заряд). Другой пример возникновения репараметризационной аномалии при квантовании четырехмерной гравитации содержится в работе [17]. В обоих указанных примерах репараметризационные аномалии возникают при квантовании континуальных теорий. Здесь важно заметить, что существуют также подходы к квантованию континуальных общековариантных теорий, при которых репараметризационные аномалии отсутствуют (см., например, [1, 18–20]).

Более сложной проблемой в решеточной теории является проблема аксиальной аномалии и проблема введения вейлевского поля. Эти проблемы тесно связаны с так называемой проблемой «удвоения» фермионных состояний на решетке. Хорошо известно, что на периодической пространственной решетке, когда возможные импульсы ограничены зоной Бриллюэна, имеющей топологию прямого произведения D копий окружности S^1, имеет место явление «удвоения» фермионных состояний [21–25].

Действительно, рассмотрим правильную кубическую решетку, погруженную в $\mathbb{R}^4$, с вершинами, имеющими целочисленные координаты. Каждая вершина имеет индекс $n = (n^a)$, состоящий из четырех чисел $n^a \in \mathbb{Z}$, $a = 1, 2, 3, 4$. Пусть e^a — образующие решетки: $e^1 = (1, 0, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, 0)$ и т. д. Нетрудно понять, что в отсутствие гравитационных и калибровочных полей фермионная часть действия (30) принимает вид

$$I_\psi = \frac{i}{2} \sum_n \sum_{a=1}^{4} \overline{\psi}_n \gamma^a (\psi_{n+e^a} - \psi_{n-e^a}). \qquad (81)$$

Уравнение

$$\frac{i}{2} \sum_{a=1}^{4} \gamma^a (\psi_{n+e^a} - \psi_{n-e^a}) = \epsilon \psi_n \qquad (82)$$

определяет собственные моды действия (81), которые легко описываются вследствие трансляционной инвариантности уравнения (82). Пусть импульсные переменные k^a заполняют зону Бриллюэна B:

$$-\pi \le k^a \le \pi, \quad a = 1, 2, 3, 4. \qquad (83)$$

Разложим фермионное поле в интеграл Фурье

$$\psi_n = \int_B \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikn} \tilde{\psi}(k), \quad kn = k^a n^a. \qquad (84)$$

Спиноры (84) являются собственными модами уравнения (82), если спиноры $\tilde{\psi}(k)$ являются собственными векторами матрицы

$$\sum_{a=1}^{4} \gamma^a \sin(k^a), \qquad (85)$$

причем собственные значения мод определяются собственными значениями матрицы (85). Из формулы (85) следует, что если компоненты импульса k^a независимо друг от друга принимают лишь одно из двух значений

$$k^a = 0, \pi, \qquad (86)$$

то собственные значения матрицы (85) обращаются в нуль. Это и означает, что введенное фермионное поле содержит несколько низкоэнергетических компонент. В частности, было доказано, что если в затравочное действие теории вводится одно правое (левое) вейлевское поле, то в низкоэнергетическом пределе имеются пары вейлевских полей, которые объединяются в дираковские спиноры.

В терминах решеточных переменных ψ_n описанное явление означает следующее. Из множества четырех индексов a выберем некоторое подмножество индексов и обозначим эти индексы через α. Выбранное множество может быть как пустым, так и содержать все четыре индекса a. Условно разделим все узлы $n = (n^a)$ решетки на четные и нечетные в зависимости от того, четной или нечетной является сумма чисел $\sum_\alpha n^\alpha$. Пусть u — некоторый ненулевой спинор. Очевидно, что все нулевые моды уравнения (82) записываются в виде

$$\psi_n = (-1)^{\sum_\alpha n^\alpha} u. \qquad (87)$$

Наложение длинноволновых возмущений на нулевые моды (87) приводит к возникновению низкоэнергетических мод, выживающих в пределе устремления шага решетки к нулю. Поэтому отсутствие аксиальной аномалии в калибровочной теории, построенной путем обобщения действия (81) на периодической решетке на случай калибровочного взаимодействия, означает лишь, что аномалии в дивергенции аксиального тока, возникающие от различных компонент спинорного поля, взаимно сокращаются. С другой стороны, любая модификация теории на периодической решетке, при которой в длинноволновом пределе остается лишь одна компонента дираковского поля, приводит к появлению известной аксиальной аномалии.

Возникает важный вопрос: сохраняется ли явление «удвоения» фермионных состояний на неправильных аморфных решетках и, в частности, в теории гравитации на симплициальных комплексах? Наша гипотеза состоит в том, что на симплициальных комплексах, образующих периодическую решетку при геометрической реализации, явление «удвоения» имеет место. Напротив, если геометрическая реализация симплициального комплекса приводит к аморфной периодической решетке, то явление «удвоения» фермионных состояний отсутствует.

Поясним ситуацию на простейшем примере двумерной решетки. Для этого рассмотрим фермионную часть действия гравитации на этой решетке. В этом случае индексы $a, b, \ldots$ принимают два значения $1, 2$. Формулы (19) сохраняются, но γ-матрицы имеют размерность 2×2. Тогда фермионная часть действия гравитации имеет вид

$$\begin{gathered} S_\psi = \frac{1}{6} \sum_{A,m} \sum_{\sigma(Am)} \varepsilon_{\sigma(Am)} \varepsilon_{ab} \Theta^a_{Ami} e^b_{Amj}, \\ \Theta^a_{Aij} = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}_{Ai}\gamma^a\Omega_{Aij}\psi_{Ai} - \overline{\psi}_{Aj}\Omega^{-1}_{Aij}\gamma^a\psi_{Ai}\right). \end{gathered} \tag{88}$$

Здесь обозначения прежние (см. (18)–(31)). Напомним лишь, что $\sigma(Am)$ обозначает перестановку в репере $(X^A_{\alpha_m\alpha_i}, X^A_{\alpha_m\alpha_j})$ и $\varepsilon_{\sigma(Am)} = \pm 1$ в зависимости от того, является эта перестановка четной или нечетной.

Рассмотрим случай плоского пространства, когда

$$\Omega_{Aij} = 1, \quad (e^a_{ij} + e^a_{jk} + \ldots + e^a_{li}) = 0. \tag{89}$$

Геометрический смысл второго равенства в (89) следующий. Величину e^a_{ij} следует рассматривать как вектор в ортонормированном базисе, который начинается в вершине a_{α_i} и заканчивается в вершине a_{α_j}. Каждый следующий вектор в сумме (89) начинается в той вершине, в которой заканчивается предыдущий вектор. Тогда второе равенство в (89) означает, что рассматривается плоское пространство без кручения, а первое равенство означает, что и кривизна этого пространства также равна нулю. Исходя из этого, далее мы полагаем, что симплициальный комплекс реализован в пространстве $\mathbb{R}^2$, причем e^a_{ij} является вектором в $\mathbb{R}^2$, соединяющим соответствующие вершины.

Теперь рассмотрим симплициальный комплекс, состоящий из равносторонних треугольников (см. рис. 1). Интересующие нас вершины пронумерованы цифрами от 1 до 7.

Векторы, соединяющие вершины 1 и 2, 7 и 3 и т. д., обозначаются через e^a_{12}, e^a_{73} и т. д., причем $e^a_{12} = -e^a_{21}, \ldots$. Выпишем уравнение для нахождения нулевых мод действия (88). Для этого, например, проварьируем действие (88) относительно $\overline{\psi}_1$ и результат приравняем нулю. Так получается уравнение в вершине 1:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab}\gamma^a\big\{&[(\psi_2 - \psi_5) + (\psi_3 - \psi_6)]e^b_{73} + \\ &+ [(\psi_4 - \psi_7) + (\psi_3 - \psi_6)]e^b_{35}\big\} = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

Уравнение (90), так же, как и все остальные уравнения нулевой моды, удовлетворяется, если положить $\psi_{Ai} = u \neq 0$. Очевидно также, что уравнение (90) вместе с остальными уравнениями нулевой моды удовлетворяется, если $\psi_{Ai} = \pm u \neq 0$, где знак $+$ или $-$ соответствует расстановке знаков $+$ и $-$ в узлах решетки на рис. 1. Кроме указанной имеются и другие возможности расстановки знаков $+$ и $-$ в узлах решетки на рис. 1 и присвоения соответствующего знака спинорам ψ_{Ai} так, чтобы мода была нулевой.

Таким образом, так же, как и в случае квадратной решетки, на правильном симплициальном комплексе имеется проблема «удвоения» фермионных состояний.

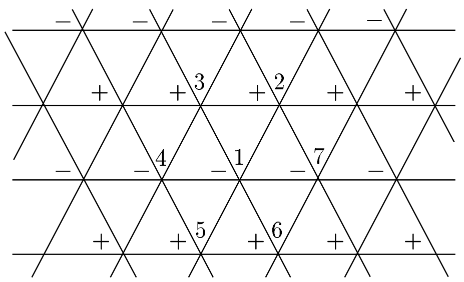

Рис. 1.

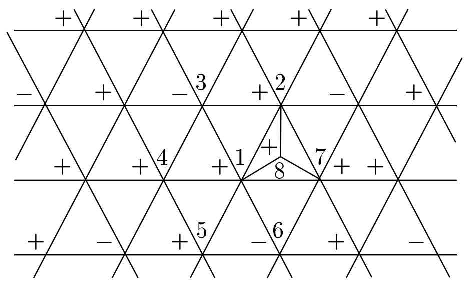

Рис. 2.

Теперь рассмотрим симплициальный комплекс, отличающийся от комплекса на рис. 1 на одну вершину (см. рис. 2). Выпишем в этом случае уравнения нулевой моды в вершинах 1 и 8:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ab}\gamma^a\big[(\psi_2-\psi_8)e^b_{83}+(\psi_4-\psi_8)e^b_{35}+\\+(\psi_5-\psi_8)e^b_{46}+(\psi_7-\psi_8)e^b_{68}+(\psi_3-\psi_6)e^b_{24}\big]=0,\\\varepsilon_{ab}\gamma^a\big[(\psi_2-\psi_1)e^b_{71}+(\psi_7-\psi_1)e^b_{12}\big]=0.\end{gathered}\tag{91}$$

Мы видим, что добавление таким способом одной вершины ощутимо усложняет возникающую систему уравнений для нулевой моды. Тем не менее нетрудно понять, что такая расстановка знаков, как на рис. 2, дает нетривиальную нулевую моду.

Останется ли возможность явления «удвоения» фермионных состояний, если в решетку на рис. 1 будут внесены дополнительные вершины в большом количестве и весьма хаотически? Ответ на этот вопрос нам представляется отрицательным. Однако, как следует из предыдущего изложения, отсутствие нетривиальных нулевых мод может иметь место лишь на достаточно сложных с точки зрения периодичности симплициальных комплексах.

В общем случае произвольной размерности задача об «удвоении» фермионных состояний, на наш взгляд, должна быть сформулирована следующим образом. Возможно ли отыскать такой (очевидно непериодический) симплициальный комплекс, реализованный в декартовом пространстве, на котором уравнение Дирака имеет единственную нулевую моду. Наличие такого комплекса означало бы отсутствие «удвоения» фермионных состояний, а также отсутствие аксиальной аномалии в непрерывном пределе теории.

Конечно, в непрерывном пределе такой теории диаграммная техника (более общо — теория возмущений) сильно отличалась бы (например, обходом полюсов) от диаграммной техники, используемой в квантовой теории поля. Возможно, теория возмущений в безаномальной непрерывной теории была бы аналогична той, которая развивается в [1]. Эта задача требует отдельного рассмотрения.

Я благодарен В. Е. Захарову за проявленный интерес к теории дискретной гравитации, который явился стимулом для написания этой работы. Я выражаю также признательность С. Пархоменко и С. Савченко за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Ведущей научной школы (грант №00-1596579).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **118**, 996 (2000).

2. T. Regge, Nuovo Cimento **19**, 558 (1961).

3. Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, Наука, Москва (1976).

4. П. Дж. Хилтон, С. Уайли, *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию*, Мир, Москва (1966).

5. R. Friedberg, and T. D. Lee, Nucl. Phys. B **242**, 145 (1984).

6. J. Cheeger, W. Muller, and R. Schrader, Comm. Math. Phys. **92**, 405 (1984).

7. A. Bobenko and U. Pinkall, J. Reine Angew. Math. **475**, 187 (1996).

8. T. Regge and R. M. Williams, E-print archives gr-qc/0012035.

9. J. C. Baez, E-print archives gr-qc/9905087.

10. M. P. Reisenberger, E-print archives gr-qc/9711052.

11. J. Iwasaki, E-print archives gr-qc/9903112v2.

12. F. David, Nucl. Phys. B **257**, 543 (1985).

13. D. V. Boulatov, V. A. Kazakov, I. K. Kostov, and A. A. Migdal, Nucl. Phys. B **275**, 641 (1986).

14. Д. И. Дьяконов, В. Ю. Петров, ЖЭТФ **118**, 1012 (2000).

15. E. Witten, Nucl. Phys. B **323**, 113 (1989).

16. J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).

17. A. Yu. Kamenshchik and S. L. Lyakhovich, E-print archives hep-th/9608130.

18. M. Henneaux, Phys. Rev. Lett. **54**, 959 (1985).

19. E. Benedict, R. Jackiw, and H.-J. Lee, Phys. Rev. D **54**, 6213 (1996); D. Cangemi, R. Jackiw, and B. Zwiebach, Ann. Phys. (N.Y.) **245**, 408 (1996).

20. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **117**, 5 (2000).

21. J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 393 (1975).

22. L. Susskind, Phys. Rev. D **16**, 3031 (1977).

23. K. G. Wilson, Erice Lectures Notes (1975).

24. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); Nucl. Phys. B **193**, 173 (1981).

25. M. Luscher, E-print archives hep-th/0102028.