ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 4 (10), стр. 945–953

О ПАРЦИАЛЬНЫХ МОМЕНТАХ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ О ПРОВОДИМОСТИ БИНАРНЫХ КОМПОЗИТОВ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2001 г.

В рамках стандартной линейной задачи об электропроводности двухкомпонентных сред рассмотрены некоторые общие свойства парциальных (вычисленных по объему отдельных компонент) моментов напряженности электрического поля. Дано свободное от каких-либо модельных предположений описание критического поведения моментов произвольного порядка в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Введены соответствующие критические индексы и установлены соотношения между ними, следующие из гипотезы подобия. Для двумерных систем найдены соотношения взаимности, дающие связи между парциальными моментами одного порядка, что вдвое уменьшает число новых независимых критических индексов.

PACS: 41.20.Cv, 81.05.Rm

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории явлений переноса в двухкомпонентных средах важную роль играют парциальные (средние по объему отдельных компонент) характеристики полей — различные моменты напряженности электрического поля (см., например, [1–4]). Так, эффективная электропроводность такой среды может быть выражена через моменты как первого, так и второго порядков. Через парциальные моменты второго порядка выражаются структурные флуктуации поля и тока [1, 2], а также джоулево тепло, выделяемое в каждой из компонент. Знание моментов второго порядка позволяет также найти производные от эффективной проводимости σ_e по ее аргументам — проводимостям компонент σ_i [2]. Соответствующие соотношения дают возможность углубленно исследовать критическое поведение эффективной проводимости (см., например, [5]). Отметим, что производные от σ_e входят также в выражения для низкочастотной диэлектрической проницаемости [6], магнитосопротивления в слабом магнитном поле [2], а также при определенном соотношении параметров в выражение для термоэдс [7].

Исследование нелинейных явлений в неоднородных средах привело к необходимости изучения моментов более высокого порядка. Так, для вычисления первой нелинейной поправки к эффективной проводимости требуется знать парциальные моменты напряженности электрического поля четвертого порядка [3, 4]. В следующих по нелинейности приближениях возникают моменты шестого, восьмого и т. д. порядков (см. Приложение A). Моменты четвертого порядка появляются и в задаче о низкочастотном спектре шумов в неоднородной среде [3, 4]. Отметим, что в некоторых задачах могут понадобиться и несколько иные величины. Например, в задаче о гальваномагнитных свойствах двухкомпонентных сред в слабом магнитном поле возникают квадратичные средние от продольных и поперечных составляющих напряженности электрического поля [2]. Наконец, представляет интерес и изучение парциальных моментов нечетного порядка.

Таким образом, разнообразные эффективные характеристики двухкомпонентных сред могут быть выражены через парциальные моменты напряженности электрического поля различных порядков. Заметим, что эти моменты, определяемые в линейной задаче об электропроводности, являются функция-

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

ми двух аргументов — концентрации p и отношения проводимостей компонент $h = \sigma_2/\sigma_1$. Тем самым исходно многопараметрические эффективные характеристики среды редуцируются до уровня двухпараметрических функций. В то же время критическое поведение в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик двухпараметрических функций может быть описано в рамках стандартной гипотезы подобия — ср. с аналогичной процедурой в случае электропроводности [8] и некоторых других величин [2, 5]. Это обстоятельство позволяет, в свою очередь, дать последовательное описание критического поведения различных многопараметрических эффективных характеристик среды в духе обычной гипотезы подобия.

В настоящей работе рассмотрены некоторые общие свойства парциальных моментов напряженности электрического поля, определенных в рамках линейной задачи о проводимости бинарных композитов. Основное внимание уделено исследованию моментов в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Дано описание критического поведения моментов произвольного порядка для двухкомпонентных сред — введены соответствующие индексы и найдены соотношения между ними, следующие из гипотезы подобия. Показано, что каждый парциальный момент выше второго порядка характеризуется одним новым (по сравнению с индексами проводимости) критическим индексом. Для двумерных систем найдены соотношения взаимности, которые позволяют связать парциальные моменты одного порядка, вычисленные по первой и второй компонентам. Как следствие, в двумерном случае новых независимых критических индексов оказывается вдвое меньше, чем в трехмерном.

В Приложении А дана схема последовательного вычисления эффективной нелинейной проводимости неоднородной среды. В Приложении В приведен краткий вывод (несколько обобщающий обычный [3, 4]) формулы для спектра шумов (низкочастотных флуктуаций тока) в бинарном композите.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ

Задача о проводимости неоднородной изотропной среды ставится следующим стандартным образом. Имеется система уравнений постоянного тока

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{j}$ — плотность тока. В линейном по электрическому полю приближении величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ связаны законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}, \tag{2}$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — зависящая от координат локальная проводимость среды. Система уравнений (1), (2) решается при условии, что в среде имеется однородное поле $\langle\mathbf{E}\rangle$, где $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по объему V образца. Эффективная проводимость среды σ_e определяется как коэффициент пропорциональности между средней плотностью тока $\langle\mathbf{j}\rangle$ и величиной $\langle\mathbf{E}\rangle$:

$$\langle\mathbf{j}\rangle = \sigma_e\langle\mathbf{E}\rangle \tag{3}$$

при условии $V \to \infty$. Таким образом, проводимость σ_e является линейным откликом среды на приложенное внешнее «возмущение» — однородное поле $\langle\mathbf{E}\rangle$.

Эффективная проводимость σ_e может быть выражена и через квадратичные характеристики поля. В силу уравнений (1) имеет место известное тождество (см., например, [1, 2])

$$\langle\mathbf{jE}\rangle = \langle\mathbf{j}\rangle\langle\mathbf{E}\rangle, \tag{4}$$

справедливое при произвольной (в том числе и нелинейной) зависимости $\mathbf{j}$ от $\mathbf{E}$. В линейном случае из (4) с учетом (2) и (3) получаем

$$\sigma_e = \langle\sigma\mathbf{e}^2\rangle, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|\langle\mathbf{E}\rangle|} \tag{6}$$

— безразмерная напряженность электрического поля в среде.

Для двухкомпонентной среды величина $\sigma(\mathbf{r})$ принимает постоянные значения σ_1 и σ_2 соответственно для первой и второй компонент. В этом случае из (5) следует

$$\sigma_e = \sigma_1\psi_1^{(2)} + \sigma_2\psi_2^{(2)}. \tag{7}$$

Здесь

$$\psi_i^{(2)} = \langle\mathbf{e}^2\rangle^{(i)} \quad (i = 1, 2) \tag{8}$$

и

$$\langle(\ldots)\rangle^{(i)} = \frac{1}{V}\int\limits_{V_i}(\ldots)d\mathbf{r}, \tag{9}$$

где интегрирование ведется по объему i-й компоненты V_i. Квадратичные величины $\psi_i^{(2)}$ будем называть парциальными моментами второго порядка напряженности электрического поля. Подчеркнем, что функции $\psi_i^{(2)}$, как и проводимость σ_e, являются эффективными (самоусредняющимися при $V \to \infty$)

характеристиками среды и не зависят ни от величины, ни от направления (в изотропном случае) приложенного поля $\langle \mathbf{E} \rangle$.

Для рассматриваемых двухкомпонентных систем удобно ввести безразмерную эффективную проводимость f согласно

$$\sigma_e = \sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2) \equiv \sigma_1 f(p,h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \tag{10}$$

где p — концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. Тогда из (7) следует соотношение

$$f = \psi_1^{(2)} + h\psi_2^{(2)}. \tag{11}$$

Отметим, что величины $\psi_i^{(2)}$ определяются только свойствами среды и зависят от тех же аргументов, что и функция f:

$$\psi_i^{(2)} = \psi_i^{(2)}(p,h).$$

Роль функций $\psi_i^{(2)}$ не ограничивается их использованием в соотношениях (7), (11). Так, квадратичные структурные флуктуации полей и токов (см., например, [1, 2])

$$\Delta_E^2 = \langle (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 \rangle \left(\langle \mathbf{E} \rangle \right)^{-2}, \quad \Delta_j^2 = \langle (\mathbf{j} - \langle \mathbf{j} \rangle)^2 \rangle \left(\langle \mathbf{j} \rangle \right)^{-2}$$

также могут быть выражены через величины $\psi_i^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \Delta_E^{(2)} &= \sum_i \psi_i^{(2)} - 1, \\ \Delta_j^{(2)} &= \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i \sigma_i^2 \psi_i^{(2)} - 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Доля джоулева тепла Q_i, выделяемая в единицу времени в объеме i-компоненты, тоже выражается через $\psi_i^{(2)}$:

$$Q_i = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle^{(i)} = \sigma_i \psi_i^{(2)} \left(\langle \mathbf{E} \rangle \right)^2. \tag{13}$$

Использование тождеств типа (4) позволяет связать функции $\psi_i^{(2)}$ с производными от σ_e по σ_i:

$$\psi_i^{(2)} = \langle \mathbf{e}^2 \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i}. \tag{14}$$

Подстановка (10) в (14) дает [2]

$$\psi_1^{(2)} = f - hf', \quad \psi_2^{(2)} = f', \quad f' \equiv \frac{\partial f(p,h)}{\partial h}. \tag{15}$$

Соотношения (15) дают возможность выразить величины $\Delta_E^{(2)}$, $\Delta_j^{(2)}$ и Q_i через функцию f и ее производную f'. С другой стороны, использование (15) позволяет находить производную f' в численном эксперименте без затруднительного численного дифференцирования, см. [5]. Заметим, что знание величины $\psi_2^{(2)} = f'$ во всей области изменения ее аргументов необходимо для определения низкочастотной диэлектрической проницаемости [6], термоэдс [7], а также магнитосопротивления [2]. Кроме того, совместное определение величин f и f' дает возможность проводить более детальное, чем обычно, исследование критического поведения проводимости, см. [5].

Как показано в работах [3, 4], при изучении нелинейных свойств неоднородных сред возникает необходимость в вычислении и более высоких (например, четвертого порядка) моментов напряженности электрического поля. Для слабонелинейной изотропной среды вместо (2) имеем

$$\mathbf{j} = \left\{ \sigma(\mathbf{r}) + \chi^{(3)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^2 + \chi^{(5)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^4 + \ldots \right\} \mathbf{E}. \tag{16}$$

Аналогичным соотношением связаны и средние значения $\langle \mathbf{j} \rangle$ и $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left\{ \sigma_e + \chi_e^{(3)} \left(\langle \mathbf{E} \rangle \right)^2 + \chi_e^{(5)} \left(\langle \mathbf{E} \rangle \right)^4 + \ldots \right\} \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{17}$$

где $\chi_e^{(3)}$, $\chi_e^{(5)}, \ldots$ — эффективные коэффициенты нелинейности. Согласно [3, 4] (см. также Приложение A) величина $\chi_e^{(3)}$ может быть выражена через напряженность электрического поля линейной задачи:

$$\chi_e^{(3)} = \langle \chi^{(3)} \mathbf{e}^4 \rangle, \tag{18}$$

где $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ — то же, что и в (6). Для двухкомпонентной среды из (18) следует

$$\chi_e^{(3)} = \chi_1^{(3)} \psi_1^{(4)} + \chi_2^{(3)} \psi_2^{(4)}, \tag{19}$$

где $\chi_i^{(3)}$ — значение коэффициента нелинейности $\chi^{(3)}(\mathbf{r})$ в i-й компоненте и

$$\psi_i^{(4)} = \langle \mathbf{e}^4 \rangle^{(i)} \tag{20}$$

— парциальный момент четвертого порядка. Очевидно, что величина $\psi_i^{(4)}$ определяется только свойствами среды и зависит от тех же аргументов, что и f, $\psi_i^{(2)}$:

$$\psi_i^{(4)} = \psi_i^{(4)}(p,h).$$

Моменты четвертого порядка возникают и в задаче о низкочастотном спектре шумов в неоднородных образцах. Согласно [3, 4] (см. также Приложение B) спектр шумов $K(\omega)$ выражается через напряженность электрического поля линейной задачи $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$K(\omega) = \frac{1}{V} \langle \lambda_\omega \mathbf{e}^4 \rangle \sigma_e^{-2}. \tag{21}$$

Здесь $K(\omega)$ и $\lambda_\omega(\mathbf{r})$ — фурье-образы функций $K(\tau)$ и $\lambda(\tau, \mathbf{r})$, определенных в Приложении B. Для двухкомпонентной среды из (21) получаем

$$K(\omega) = \frac{1}{V}\left[\lambda_1(\omega)\psi_1^{(4)} + \lambda_2(\omega)\psi_2^{(4)}\right]\sigma_e^{-2}, \qquad (22)$$

где $\lambda_i(\omega)$ — значение величины $\lambda_\omega(\mathbf{r})$ в i-й компоненте, $\psi_i^{(4)}$ — то же, что и в (20).

Из выражений (19) и (22) следует, что для изучения величин $\chi_e^{(3)}$ и $K(\omega)$ в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик достаточно исследовать критическое поведение парциальных моментов $\psi_i^{(4)}$. При этом отношения параметров $\chi_2^{(3)}/\chi_1^{(3)}$ и $\lambda_2(\omega)/\lambda_1(\omega)$, вообще говоря, произвольны, так что доминирующим может быть любое из двух слагаемых в выражениях (19) и (22).

Таким образом, определение различных физических эффективных характеристик бинарных композитов сводится к вычислению парциальных моментов

$$\psi_i^{(2n)} = \langle \mathbf{e}^{2n}\rangle^{(i)} \quad (n = 1, 2, \dots) \qquad (23)$$

с $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ из (6). Это обстоятельство приводит к необходимости исследовать величины $\psi_i^{(2n)} = \psi_i^{(2n)}(p, h)$ во всей области изменения аргументов p и h, в том числе и в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик.

Представляет интерес и изучение парциальных моментов нечетного порядка $\psi_i^{(2n+1)}(p, h)$, определенных с помощью соотношения

$$\langle \mathbf{e}^{2n+1}\rangle^{(i)} = \psi_i^{(2n+1)}\langle \mathbf{e}\rangle. \qquad (24)$$

Здесь учтено, что для изотропной среды векторная величина $\langle e^{2n}\mathbf{e}\rangle^{(i)}$ может быть направлена только вдоль орта $\langle \mathbf{e}\rangle = \langle \mathbf{E}\rangle/|\langle \mathbf{E}\rangle|$. Из (24) следует, что

$$\psi_i^{(2n+1)} = \langle e^{2n} e_\parallel\rangle^{(i)}, \qquad (25)$$

где $e_\parallel(\mathbf{r})$ — составляющая $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, параллельная $\langle \mathbf{E}\rangle$. Заметим, что через парциальные моменты первого порядка $\psi_i^{(1)}$ выражается, согласно (3), эффективная проводимость

$$\sigma_e = \sigma_1\psi_1^{(1)} + \sigma_2\psi_2^{(1)}. \qquad (26)$$

Необходимость в вычислении нечетных моментов более высокого порядка возникает, например, при рассмотрении структурных флуктуаций напряженности электрического поля вида

$$\Delta_E^{(2n)} = \langle (\mathbf{e} - \langle \mathbf{e}\rangle)^{2n}\rangle \qquad (27)$$

с $n \geq 2$.

3. КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\psi_i^{(2n)}(p, h)$

Критическое поведение эффективной проводимости случайно-неоднородной двухкомпонентной среды в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик описывается в рамках гипотезы подобия [8]. Согласно [8] (см., также, например, [2]), функция f в критической области ($h \ll 1$, $|\tau| \ll 1$, где $\tau = (p - p_c)/p_c$, p_c — критическая концентрация) меняется следующим образом:
при $\tau > 0$, $\Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$f = \tau^t\left\{A_0 + A_1\frac{h}{\tau^{t/s}} + \dots\right\}, \qquad (28)$$

при $|\tau| \ll \Delta_0$

$$f = h^s\left\{a_0 + a_1\frac{\tau}{h^{s/t}} + \dots\right\}, \qquad (29)$$

при $\tau < 0$, $\Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$f = \frac{h}{(-\tau)^q}\left\{B_1 + B_2\frac{h}{(-\tau)^{t/s}} + \dots\right\}. \qquad (30)$$

Здесь

$$\Delta_0 = h^{s/t} \qquad (31)$$

— размер «области размазки» [8]. Критические индексы t, q и s связаны между собой соотношением [8]

$$q = \frac{t}{s} - t. \qquad (32)$$

Численный эксперимент на неупорядоченных решетках (см., например, [3, 5, 9, 10]) дает в трехмерном случае

$$t \approx 2, \quad q \approx 0.8, \quad s \approx 0.7. \qquad (33)$$

Естественно ожидать, что основные представления гипотезы подобия, в том числе и выражения (28)–(33), применимы и к мелкодисперсным бинарным композитам.

Критическое поведение функций $\psi_i^{(2)}$ (см. [5]) выявляется с помощью соотношений (15) после подстановки в них выражений (28)–(30). При этом все критические индексы величин $\psi_i^{(2)}$ выражаются через индексы проводимости t, q и s, см. (42). В то же время для функций (23) с $n \geq 2$ не известны соотношения типа (15), связывающие $\psi_i^{(2n)}$ с безразмерной эффективной проводимостью f. Поэтому поведение величин $\psi_i^{(2n)}(p, h)$ с $n \geq 2$ в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик следует устанавливать, исходя из их общих свойств. Подобная процедура проводилась, например, в [2, 5] для двухпараметрических функций, возникающих в задаче о гальваномагнитных свойствах бинарных систем в слабом магнитном поле.

Ограничиваясь главными членами соответствующих разложений и опуская множители порядка единицы, для функций $\psi_i^{(2n)}(p,h)$ аналогично [2, 5] в критической области имеем

при $\tau > 0$, $\Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$\psi_1^{(2n)} \sim \tau^{t_{2n}}, \quad \psi_2^{(2n)} \sim \tau^{-\mu_{2n}}, \tag{34}$$

при $|\tau| \ll \Delta_0$

$$\psi_1^{(2n)} \sim h^{s_{2n}}, \quad \psi_2^{(2n)} \sim h^{-\lambda_{2n}}, \tag{35}$$

при $\tau < 0$, $\Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$\psi_1^{(2n)} \sim \frac{h^{2n}}{(-\tau)^{q_{2n}}}, \quad \psi_2^{(2n)} \sim \frac{1}{(-\tau)^{\mu_{2n}}}. \tag{36}$$

Здесь

$$q_{2n} = 2n\frac{t}{s} - t_{2n}, \quad s_{2n} = \frac{s}{t}t_{2n}, \quad \lambda_{2n} = \frac{s}{t}\mu_{2n}. \tag{37}$$

В силу соотношений (37) из пяти (при фиксированном n) новых критических индексов независимыми являются только два, в качестве которых можно выбрать, например, t_{2n} и μ_{2n}.

Выражения (34)–(37) получены с помощью следующих соображений. В области концентраций $\tau > 0$, $\Delta_0 \ll \tau \ll 1$ при приближении к точке перехода электрическое поле «вытесняется» из высокопроводящей (первой) компоненты (ср. с аналогичными рассуждениями в [2]). Поэтому $\psi_1^{(2n)} \to 0$ при $\tau \to 0$, причем закон этого убывания считаем, как это принято в гипотезе подобия, степенным. В то же время величина $\psi_2^{(2n)}$ в рассматриваемом случае возрастает, так как при этом увеличивается количество узких «мостиков» (контактов), образованных высокопроводящей компонентой. В окрестности этих контактов резко возрастает напряженность электрического поля в низкопроводящей (второй) компоненте, что и отражено в формуле (34) для $\psi_2^{(2n)}$.

При $p < p_c$ и $\sigma_2 = 0$ (т. е. при $\tau < 0$ и $h = 0$) напряженность электрического поля внутри включений первой компоненты, образующих конечные кластеры, равна нулю. При $h \neq 0$, но малом, напряженность внутри высокопроводящей компоненты отлична от нуля, но тоже мала и вне области размазки линейна по h (ср. с [2]). Поэтому функция $\psi_1^{(2n)}$ в (36) пропорциональна h^{2n}. С другой стороны, при фиксированном h величина $\psi_1^{(2n)}$ должна увеличиваться при $p \to p_c$, что и учтено в формуле (36). Функция $\psi_2^{(2n)}$ при $p < p_c$ и $p \to p_c$ также растет, так как при этом увеличивается число «горячих» точек, в окрестности которых резко возрастает напряженность электрического поля. Наконец, формулы (35) дают величины $\psi_1^{(2n)}$ и $\psi_2^{(2n)}$ внутри области размазки, где необходим учет конечных (ненулевых) проводимостей обеих компонент.

Область размазки $\Delta_1^{(2n)}$ для функции $\psi_1^{(2n)}$ определяется обычным образом — из «сшивки» выражений (34) и (35):

$$\Delta_1^{(2n)} = h^{s_{2n}/t_{2n}}.$$

После этого, приравнивая выражения (35) и (36) для $\psi_1^{(2n)}$ при $\tau = -\Delta_1^{(2n)}$, находим первое соотношение между критическими индексами t_{2n}, s_{2n} и q_{2n}. Далее, согласно гипотезе подобия все критические явления в рамках задачи об электропроводности должны характеризоваться единым масштабом, так что $\Delta_1^{(2n)} \sim \Delta_0$, где Δ_0 определено в (31). Отсюда следует второе соотношение из (37), с учетом которого записано первое соотношение.

Аналогичным образом рассматривается величина $\psi_2^{(2n)}$. При этом равенство критических индексов при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ следует из симметричной относительно $\tau = 0$ «сшивки» выражений (34) и (36) с (35). Соответственно связь индексов λ_{2n} и μ_{2n} (третье соотношение в (37)) находим, приравнивая по порядку величины размер области размазки $\Delta_2^{(2n)}$ для функции $\psi_2^{(2n)}$ и величину Δ_0 из (31).

Заметим, что

$$\langle(\mathbf{e}^{2n} - \langle\mathbf{e}^{2n}\rangle^{(i)})^2\rangle^{(i)} = \\ = \psi_i^{(4n)} - (2 - p_i)\left(\psi_i^{(2n)}\right)^2 \geq 0, \tag{38}$$

где p_i — концентрация i-й компоненты ($p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$). Подстановка в (38) выражений для $\psi_i^{(4n)}$ и $\psi_i^{(2n)}$ из (34)–(36) дает ряд неравенств для критических индексов, два из которых независимые:

$$t_{4n} \leq 2t_{2n}, \quad \mu_{4n} \geq 2\mu_{2n}. \tag{39}$$

Остальные неравенства сводятся к этим двум при учете соотношений (37).

Для случайно-неоднородной системы одновременная замена $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$, $p \to 1 - p$ не меняет свойств среды как целого (см. [1]), так что $\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1 - p; \sigma_2, \sigma_1)$, откуда

$$f(p,h) = hf\left(1 - p, \frac{1}{h}\right). \tag{40}$$

Соответственно для парциальных моментов $\psi_i^{(2n)}$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_1^{(2n)}\left(1-p,\frac{1}{h}\right) &= \psi_2^{(2n)}(p,h), \\ \psi_2^{(2n)}\left(1-p,\frac{1}{h}\right) &= \psi_1^{(2n)}(p,h). \end{aligned} \tag{41}$$

Равенства (41) достаточно очевидны, так как при перестановках $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$, $p \to 1-p$ первая и вторая компоненты меняются местами. Соотношения (41) позволяют находить величины $\psi_i^{(2n)}(p,h)$ при $h>1$, если они известны при $h<1$ во всем интервале изменения концентрации.

Как уже отмечалось выше, для моментов второго порядка $\psi_i^{(2)}$ новые независимые индексы не возникают. Действительно, подставляя выражения (28)–(30) в соотношение (15) и сравнивая (при $n=1$) с (34)–(36), получим

$$\begin{aligned} &t_2 = t, \quad s_2 = s, \quad q_2 = q + \frac{t}{s}; \\ &\mu_2 = q, \quad \lambda_2 = 1-s. \end{aligned} \tag{42}$$

Нетрудно убедиться, что индексы (42) удовлетворяют (при $n=1$) соотношениям (37). Величина λ_2 положительна, так как $s<1$, что является в свою очередь следствием положительности функции $\psi_1^{(2)}$.

В случае моментов четвертого порядка критические индексы вводятся обычно для функции $\chi_e^{(3)}/\sigma_e^2$ (см. [3, 4]). В обозначениях настоящей работы соответствующим выражениям из [3, 4] отвечают следующие:

при $\tau>0$, $\Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$\frac{\psi_1^{(4)}}{f^2} \sim \frac{1}{\tau^k}, \tag{43}$$

при $\tau<0$, $\Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$\frac{h^2\psi_2^{(4)}}{f^2} \sim \frac{1}{(-\tau)^{k'}}. \tag{44}$$

Подстановка в (43), (44) выражений из (28), (34) и (30),(36) дает

$$k = 2t - t_4, \quad k' = \mu_4 - 2q. \tag{45}$$

Из неравенств (39) с учетом определений (45) и соотношений (42) следует [3], что

$$k \geq 0, \quad k' \geq 0. \tag{46}$$

Если принять для оценок, как и в [10], $t=2$, $q=0.75$ (при этом, как следует из (32), $s\approx 0.73$), $k=1.6$, $k'=0.7$, то для остальных индексов из (45) и (37) получим

$$t_4 \approx 2.4, \quad \mu_4 \approx 2.2, \quad q_4 \approx 8.6,$$
$$s_4 \approx 0.9, \quad \lambda_4 \approx 0.8.$$

Заметим, однако, что вычисление индексов с помощью формул (45) и (37) приводит к значительным ошибкам — особенно это относится к величине q_4.

Критическое поведение нечетных моментов $\psi_i^{(2n+1)}(p,h)$ исследуется точно так же, как и $\psi_i^{(2n)}(p,h)$, и при $n\geq 1$ дается формулами типа (34)–(37) с заменой $2n$ на $2n+1$. При $n=0$ величины $\psi_i^{(1)} = \langle e_\parallel\rangle^{(i)}$ могут быть выражены через безразмерную эффективную проводимость [2]:

$$\psi_1^{(1)} = \frac{f-h}{1-h}, \quad \psi_2^{(1)} = \frac{1-f}{1-h}. \tag{47}$$

При $h \ll 1$ имеем $\psi_1^{(1)} \approx f$, так что критическое поведение $\psi_1^{(1)}$ дается выражениями (28)–(32). Для случайно-неоднородных сред для функций $\psi_i^{(2n+1)}$ справедливы соотношения вида (41) с заменой $2n$ на $2n+1$.

4. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Предыдущее рассмотрение относилось как к трехмерным, так и к двумерным системам. В двумерном случае, однако, для величин $\psi_i^{(2n)}$ могут быть установлены так называемые соотношения взаимности, дающие дополнительную информацию о свойствах этих функций. Дальнейшее рассмотрение справедливо только для двумерных систем и трехмерного аналога не имеет.

Проведем, следуя [1], преобразование поля и тока к следующей системе:

$$\begin{aligned} &j_x = \lambda E'_y, \quad j_y = -\lambda E'_x, \\ &E_x = \frac{1}{\lambda} j'_y, \quad E_y = -\frac{1}{\lambda} j'_x. \end{aligned} \tag{48}$$

При преобразовании (48) (с параметром λ, не зависящим от координат) уравнения постоянного тока (1), (2) сохраняют свою форму, причем проводимость системы (48) имеет вид

$$\sigma'(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2}{\sigma(\mathbf{r})}. \tag{49}$$

Для двухкомпонентной системы удобно положить $\lambda = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, так что при преобразовании (48) проводимости компонент меняются местами:

$$\sigma'_1 = \sigma_2, \quad \sigma'_2 = \sigma_1, \quad h' = \sigma'_2/\sigma'_1 = 1/h.$$

Вычислив средние $\langle \mathbf{j}' \rangle$ и $\langle \mathbf{E}' \rangle$, найдем соотношение взаимности для эффективной проводимости:

$$\sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2)\sigma_e(p;\sigma_2,\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2. \tag{50}$$

Подстановка (10) в (50) дает соотношение взаимности для безразмерной эффективной проводимости:

$$f(p,h) f\left(p,\frac{1}{h}\right) = 1. \tag{51}$$

Далее из (48) получаем

$$(\mathbf{E}')^2 = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{j}^2 = \left(\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\lambda}\right)^2 \mathbf{E}^2, \tag{52}$$

$$\left(\langle \mathbf{E}' \rangle\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\langle \mathbf{j} \rangle\right)^2 = \left(\frac{\sigma_e}{\lambda}\right)^2 \left(\langle \mathbf{E} \rangle\right)^2, \tag{53}$$

так что

$$(\mathbf{e}')^2 = \left(\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\sigma_e}\right)^2 \mathbf{e}^2. \tag{54}$$

Используя (54), для двухкомпонентной системы получим

$$\psi_1^{(2n)}\left(p,\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{[f(p,h)]^{2n}}\psi_1^{(2n)}(p,h), \tag{55}$$

$$\psi_2^{(2n)}\left(p,\frac{1}{h}\right) = \left[\frac{h}{f(p,h)}\right]^{2n}\psi_2^{(2n)}(p,h). \tag{56}$$

При выводе (55), (56) учтено, что $h' = 1/h$. Равенства (55), (56) являются искомыми соотношениями взаимности для функций $\psi_i^{(2n)}$.

Соотношения (50), (51), (55) и (56) справедливы для изотропных двумерных двухкомпонентных систем произвольной структуры — как периодических, так и неупорядоченных. Рассмотрим теперь случайно-неоднородную среду. Для нее с учетом равенств (40) и (41) соотношения (51), (55) и (56) принимают вид

$$f(p,h) f(1-p,h) = h, \tag{57}$$

$$\psi_1^{(2n)}(1-p,h) = \left[\frac{h}{f(p,h)}\right]^{2n}\psi_2^{(2n)}(p,h), \tag{58}$$

$$\psi_2^{(2n)}(1-p,h) = \frac{1}{[f(p,h)]^{2n}}\psi_1^{(2n)}(p,h). \tag{59}$$

Равенства (58) и (59) переходят друг в друга при замене $p \to 1-p$.

При $p = p_c = 1/2$ из (57) следует известный результат Дыхне [1]:

$$f\left(\frac{1}{2},h\right) = \sqrt{h}. \tag{60}$$

В этом случае из (58) (или (59)) получаем соотношение

$$\psi_1^{(2n)}\left(\frac{1}{2},h\right) = h^n \psi_2^{(2n)}\left(\frac{1}{2},h\right), \tag{61}$$

которое может быть записано также при $p = 1/2$ в виде

$$\langle (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})^n \rangle^{(1)} = \langle (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})^n \rangle^{(2)}. \tag{62}$$

Равенство (62) ранее было выведено в работе [1].

Согласно (60), для двумерной случайно-неоднородной системы индекс $s = 1/2$, так что из (32) следует, что $q = t$. Поэтому соотношения (37) в двумерном случае принимают вид

$$\begin{gathered} q_{2n} = 4nt - t_{2n}, \quad s_{2n} = \frac{1}{2t}t_{2n}, \\ \lambda_{2n} = \frac{1}{2t}\mu_{2n}. \end{gathered} \tag{63}$$

Подстановка в (61) выражений (35) дает еще одно соотношение между критическими индексами:

$$s_{2n} = n - \lambda_{2n}, \tag{64}$$

откуда с учетом (63) следует связь между двумя индексами, выбранными в разд. 3 в качестве независимых:

$$t_{2n} = 2nt - \mu_{2n}. \tag{65}$$

Соотношения (58), (59) при $p \neq 1/2$ новых связей между индексами не дают. Таким образом, в двумерном случае для величин $\psi_1^{(2n)}$ и $\psi_2^{(2n)}$ при фиксированном n возникает только один новый независимый критический индекс, например, μ_{2n}.

При $n = 2$ соотношение (65) может быть записано также в виде $2t - t_4 = \mu_4 - 2t$. Сравнение этого равенства с (45) (при $q = t$) дает

$$k = k'. \tag{66}$$

Если принять для оценок $t = q = 1.3$ [3, 11] и $k = k' = 1.2$ [10], то для остальных критических индексов в двумерном случае получим

$$t_4 \approx 1.4, \quad \mu_4 \approx 3.8, \quad q_4 = 9.0,$$

$$s_4 \approx 0.54, \quad \lambda_4 \approx 1.46.$$

С учетом значительных погрешностей, вносимых процедурой вычисления индексов с помощью формул (63)–(66), величина $\lambda_4 \approx 1.46$ находится в удовлетворительном согласии с найденным в работе [12] значением $\lambda_4 = 1.33 \pm 0.05$.

В заключение заметим, что для двумерной двухкомпонентной системы, помещенной в поперечное магнитное поле $\mathbf{H}$, найденные в работах [13, 14] соотношения изоморфизма позволяют связать напряженность электрического поля при $\mathbf{H} \neq 0$ с напряженностью поля в той же системе при $\mathbf{H} = 0$. Тем самым парциальные моменты при $\mathbf{H} \neq 0$ выражаются через соответствующие моменты при $\mathbf{H} = 0$. Поэтому результаты настоящего раздела дают возможность изучить свойства парциальных моментов как функций магнитного поля $\mathbf{H}$ в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Подобное исследование в случае функций $\psi_i^{(2)}(\mathbf{H})$ проведено в работе [15].

ПРИЛОЖЕНИЕ A

Решение уравнений постоянного тока (1) в случае слабонелинейной среды с законом Ома в виде (16) ищем по теории возмущений с помощью разложения по степеням $\langle\mathbf{E}\rangle$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(3)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(5)}(\mathbf{r}) + \dots, \tag{A.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}^{(3)}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}^{(5)}(\mathbf{r}) + \dots \tag{A.2}$$

Здесь $\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}^{(n)}(\mathbf{r})$ — члены порядка $|\langle\mathbf{E}\rangle|^n$. Для величин $\mathbf{j}^{(n)}(\mathbf{r})$ согласно (16) и (A.1), (A.2) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}),\\ \mathbf{j}^{(3)}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(3)}(\mathbf{r}) + \chi^{(3)}(\mathbf{r})\left(\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\right)^3,\\ \mathbf{j}^{(5)}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(5)}(\mathbf{r}) + 3\chi^{(3)}(\mathbf{r})\left(\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\right)^2 \times\\ \times \mathbf{E}^{(3)}(\mathbf{r}) + \chi^{(5)}(\mathbf{r})\left(\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\right)^5, \dots\end{gathered} \tag{A.3}$$

Соответствующие потенциалы, определенные согласно $\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi^{(n)}(\mathbf{r})$, подчиняются уравнениям

$$\begin{gathered}\nabla\left\{\sigma(\mathbf{r})\nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{r})\right\} = 0,\\ \nabla\left\{\sigma(\mathbf{r})\nabla\varphi^{(3)}(\mathbf{r})\right\} =\\ = \nabla\left\{\chi^{(3)}(\mathbf{r})\left(\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})\right)^3\right\}, \dots,\end{gathered} \tag{A.4}$$

решение которых предполагаем известным. Считаем также, что задача решается при заданной разности потенциалов (т. е. при заданном $\langle\mathbf{E}\rangle$), так что

$$\langle\mathbf{E}^{(1)}\rangle = \langle\mathbf{E}\rangle, \quad \langle\mathbf{E}^{(n)}\rangle = 0, \quad n = 3, 5, \dots \tag{A.5}$$

Для вычисления величин $\chi_e^{(3)}$, $\chi_e^{(5)}, \dots$ приме́ним прием, аналогичный использованному при рассмотрении задач о термоэдс [7] и магнитосопротивлении [2]. Как будет видно дальше, этот прием дает определенное упрощение расчетов.

Заметим, что $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}^{(n)}(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям вида (1):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(m)} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j}^{(n)} = 0. \tag{A.6}$$

Поэтому для этих величин справедливы соотношения, аналогичные (4):

$$\begin{gathered}\langle\mathbf{j}^{(n)}\cdot\mathbf{E}^{(m)}\rangle = \langle\mathbf{j}^{(n)}\rangle\langle\mathbf{E}^{(m)}\rangle;\\ n = 1, 3, 5, \dots; \quad m = 1, 3, 5, \dots\end{gathered} \tag{A.7}$$

При $n = 3$, $m = 1$ и $n = 1$, $m = 3$ из (A.7) следует

$$\langle\mathbf{j}^{(3)}\cdot\mathbf{E}^{(1)}\rangle = \langle\mathbf{j}^{(3)}\rangle\langle\mathbf{E}^{(1)}\rangle, \quad \langle\mathbf{j}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(3)}\rangle = 0, \tag{A.8}$$

где учтено, что $\langle\mathbf{E}^{(3)}\rangle = 0$. Из первого равенства (A.8) с учетом $\langle\mathbf{j}^{(3)}\rangle = \chi_e^{(3)}(\langle\mathbf{E}\rangle)^3$ и определения величины $\mathbf{j}^{(3)}(\mathbf{r})$ из (A.3) находим

$$\chi_e^{(3)}(\langle\mathbf{E}\rangle)^4 = \langle\sigma\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(3)}\rangle + \langle\chi^{(3)}(\mathbf{E}^{(1)})^4\rangle. \tag{A.9}$$

Первое слагаемое в правой части (A.9) равное $\langle\mathbf{j}^{(1)}\mathbf{E}^{(3)}\rangle$ обращается в нуль, так что из (A.9) следует известное выражение для $\chi_e^{(3)}$ [3, 4], см. формулу (18).

В следующем приближении имеем

$$\langle\mathbf{j}^{(5)}\cdot\mathbf{E}^{(1)}\rangle = \langle\mathbf{j}^{(5)}\rangle\langle\mathbf{E}^{(1)}\rangle, \quad \langle\mathbf{j}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(5)}\rangle = 0. \tag{A.10}$$

С учетом $\langle\mathbf{j}^{(5)}\rangle = \chi_e^{(5)}(\langle\mathbf{E}\rangle)^5$ и определения величины $\mathbf{j}^{(5)}(\mathbf{r})$ из (A.3) из первого равенства (A.10) находим

$$\begin{gathered}\chi_e^{(5)}(\langle\mathbf{E}\rangle)^6 = \langle\sigma\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(5)}\rangle +\\ + 3\langle\chi^{(3)}(\mathbf{E}^{(1)})^2(\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(3)})\rangle + \langle\chi^{(5)}(\mathbf{E}^{(1)})^6\rangle.\end{gathered} \tag{A.11}$$

Первый член в правой части (A.11) равный $\langle\mathbf{j}^{(1)}\cdot\mathbf{E}^{(5)}\rangle$ обращается в нуль, так что из (A.11) следует

$$\chi_e^{(5)} = \langle\chi^{(5)}\mathbf{e}^6\rangle + 3\frac{\langle\chi^{(3)}\mathbf{e}^2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}^{(3)})\rangle}{|\langle\mathbf{E}\rangle|^3}, \tag{A.12}$$

где $\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})/|\langle\mathbf{E}\rangle|$. Аналогичным образом могут быть рассмотрены и высшие по $\langle\mathbf{E}\rangle$ приближения.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Пусть в неоднородном образце объема V локальная проводимость σ испытывает временны́е флуктуации:

$$\sigma(t, \tau) = \sigma(\mathbf{r}) + \delta\sigma(t, \mathbf{r}), \quad \overline{\delta\sigma} = 0. \tag{B.1}$$

Здесь $\sigma(\mathbf{r})$ — среднее значение проводимости, черта означает усреднение по времени. В этом случае флуктуирующим является и полный ток, текущий через образец: $I(t) = \overline{I} + \delta I(t)$. Определим временну́ю корреляционную функцию токов согласно выражению

$$K(\tau) = \left\{\overline{\delta I(t+\tau)\delta I(t)}\right\}\left(\overline{I}\right)^{-2}, \qquad (\text{B.2})$$

где черта означает, как и в (B.1), усреднение по времени t. При заданной разности потенциалов полный ток пропорционален средней удельной проводимости образца σ_e, так что вместо (B.2) имеем

$$K(\tau) = \left\{\overline{\delta\sigma_e(t+\tau)\delta\sigma_e(t)}\right\}\sigma_e^{-2}, \qquad (\text{B.3})$$

где $\delta\sigma_e(t)$ — флуктуирующая часть величины $\sigma_e(t)$. При выводе (B.3) сделано предположение о низкочастотном характере флуктуаций проводимости, так что примени́м квазистатический подход и ток $I(t)$ связан с напряжением U обычным законом Ома. Кроме того, считаем, что объем образца V достаточно велик, так что средняя проводимость σ_e совпадает с эффективной проводимостью, определенной при $V \to \infty$.

Величину $\delta\sigma_e$ найдем путем варьирования соотношения (5):

$$\delta\sigma_e(t) = \langle\delta\sigma\mathbf{e}^2\rangle = \frac{1}{V}\int\delta\sigma(t,\mathbf{r})\mathbf{e}^2(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \qquad (\text{B.4})$$

Здесь учтено, что $\langle\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E}\rangle = \langle\mathbf{j}\delta\mathbf{E}\rangle = \langle\mathbf{j}\rangle\langle\delta\mathbf{E}\rangle = 0$ в силу условия $\langle\delta\mathbf{E}\rangle = 0$. Используя (B.4), найдем

$$\overline{\delta\sigma_e(t+\tau)\delta\sigma_e(t)} = \frac{1}{V^2}\int d\mathbf{r}\,\mathbf{e}^2(\mathbf{r})\times$$
$$\times\int d\mathbf{r}'\mathbf{e}^2(\mathbf{r}')\overline{\delta\sigma(t+\tau,r)\delta\sigma(t,\mathbf{r}')}. \qquad (\text{B.5})$$

Сделаем, следуя [3, 4], естественное предположение о короткодействующем (дельта-функциональном в рамках макроскопического описания) характере корреляций величин $\delta\sigma(t,\mathbf{r})$:

$$\overline{\delta\sigma(t+\tau,\mathbf{r})\delta\sigma(t,\mathbf{r}')} = \lambda(\tau,\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (\text{B.6})$$

В этом случае из (B.3), (B.5) и (B.6) находим

$$K(\tau) = \frac{1}{V}\langle\lambda\mathbf{e}^4\rangle\sigma_e^{-2}. \qquad (\text{B.7})$$

Переходя в (B.7) к фурье-составляющим, получим формулу (21). Отметим, что величина $K(\tau)$ обратно пропорциональна объему V.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
3. D. Stround and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
4. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1989).
5. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **110**, 1001 (1996).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **88**, 1664 (1985).
7. Б. Я. Балагуров, ФТП **20**, 1276 (1986).
8. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
9. D. B. Gingold and C. J. Lobb, Phys. Rev. B **42**, 8220 (1990).
10. O. Levy and D. J. Bergman, Phys. Rev. B **50**, 3652 (1994).
11. D. J. Frank and C. J. Lobb, Phys. Rev. B **37**, 302 (1988).
12. А. М. Сатанин, С. В. Хорьков, А. Ю. Угольников, Письма в ЖЭТФ **62**, 301 (1995).
13. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 1333 (1982).
14. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).
15. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **108**, 2202 (1995).