ЖЭТФ, 2001, том 120, вып. 1 (7), стр. 145–155

«ФОНОНЫ» В ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ РЕШЕТКАХ

В. В. Смирнов, К. В. Чукбар [*]

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 января 2001 г.

Рассмотрена макроскопическая динамика регулярных решеток из двумерных вихрей различной физической природы. Выведены описывающие ее эффективные уравнения и исследованы их свойства. Обсуждены общие черты эволюции таких систем и их специфические особенности, качественно отличающие вихревые ансамбли от обычных кристаллов.

PACS: 47.32.Cc, 52.35.Lv

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика двумерных точечных вихрей, несмотря на свою уже солидную историю, и в настоящее время является весьма популярной областью исследования. Ей непременно уделяются целые разделы во всех монографиях и обзорах, посвященных вихревым движениям в различных физических средах (см., например, [1–5]). Связано это обстоятельство, очевидно, как с важностью поднимаемой проблематики (переход от плавных распределений «завихренности» в пространстве к локальному сосредоточению ее в отдельных точках, например, непосредственно затрагивает стратегический вопрос о конечномерных аппроксимациях континуальных сред), так и со свежестью и необычностью «механического» поведения таких систем (представление вихрей в виде отдельных частиц позволяет воочую увидеть такую, казалось бы, математическую абстракцию как фазовое пространство). В то же время, несмотря на столь длительное пристальное внимание, изучение, как правило, ограничивается каким-либо одним (в разных областях разным) типом вихрей (с фиксированной «потоковой функцией», см. ниже), что сильно преувеличивает конкретные (зачастую случайные) особенности системы и затушевывает общие закономерности. На самом же деле вихревая динамика в самых разных физических «текучих» средах должна рассматриваться с единых позиций, поскольку математической базой для нее является вполне универсальное уравнение вмороженности [6, 7].

Цель данной работы — изучение динамического поведения больших (здесь — бесконечных) регулярных ансамблей (решеток) различной симметрии (гексагональной, квадратной и треугольной) одинаковых вихрей самого разного типа. Имеется в виду эволюция «длинноволновых» возмущений их регулярности, аналогичных акустическим фононам в обычных кристаллах, но отличающихся от них по ряду свойств. Выведены соответствующие уравнения (описывающие, можно сказать, «вторичную» гидродинамику вихревой среды) и обсуждаются их свойства. Несмотря на обнаруженную высокую чувствительность поведения вихревых «кристаллов» как к симметрии решетки (см. классические работы [8–10]), так и к природе вихрей (потоковой функции), выявленная на качественном уровне общность также несомненна. Можно, впрочем, сказать, что такая чувствительность к «деталям» также является общей и универсальной особенностью, присущей именно вихревой «механике».

2. ИСХОДНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прежде всего, напомним ключевые факты, определяющие вихревую динамику. Двумерный вихрь как точечная частица помимо своих координат $\mathbf{r}_0$ в плоскости x, y характеризуется индивидуальной интенсивностью (зарядом) q_0 и общей для конкретной системы (для вихрей данной физической при-

[*] E-mail: chukbar@dap.kia.ru

роды) потоковой функцией $\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. Его основное свойство — создавать вокруг себя циркуляционное несжимаемое течение исходной (первичной) сплошной среды согласно формуле

$$\mathbf{v} = q_0\mathbf{e}_z \times \nabla\psi$$

($\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv 0$), которое сносит все остальные (вмороженные в течение) вихри. Иными словами, динамика ансамбля вихрей описывается «механическими» уравнениями

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{e}_z \times \nabla \sum_{j\neq i} q_j\psi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$\sum_{i>j} q_iq_j\psi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

и каноническими переменными $\{q_iy_i, q_ix_i\}$, т. е. действительно (см. выше) конфигурационное пространство данной системы совпадает с фазовым.

В силу исходной изотропии плоскости потоковая функция, как правило, зависит только от расстояния до вихря: $\psi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$. Заметное исключение составляют не рассматриваемые здесь вихри в уравнении Власова (в настоящих фазовых пространствах) — так называемые волны Берштейна–Грина–Крускала (см., например, [6]). Что же касается очевидного нарушения «киральной» симметрии в (1), то физические причины этого для различных вихревых сред могут быть разными. Допустимо выделение двух классов вихрей. В первом (обычные вихри) источником гиротропии являются они сами, представляя собой δ-функциональное распределение ротора обобщенного импульса жидких частиц (т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{P} \propto \mathbf{e}_z \cdot \sum q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ и, следовательно, заряды q_i — псевдоскалярные величины). Реально $\operatorname{rot}\mathbf{P}$ конечно не сосредоточен в точке, а размазан по некоторой конечной области, называемой керном вихря, однако в случае малости ее размеров по сравнению с расстояниями до соседей это обстоятельство практически никак не сказывается на уравнениях (1). Во втором (дрейфовые вихри) керны представляют собой обычные силовые центры (например, сосредоточие электрического заряда или гравитирующей массы с истинно скалярными q_i), а гиротропна сама среда — скажем, вследствие наложения на нее сильного магнитного поля или достаточно быстрого вращения. В этом случае доминирующие силы Лоренца или Кориолиса заставляют другие частицы — силовые центры, испытывающие воздействие соседних вихрей, — двигаться дрейфовым образом (прецессировать) перпендикулярно действующей на них силе.

Двумерность движения может быть связана как с отсутствием продольных (по z) возмущений на самом деле трехмерных бесконечных вихревых нитей, так и с реальной двумерностью среды, представляющей собой, например, предельно тонкий слой (пленку). При этом потоковые функции, описывающие отклик среды на вихревое возмущение, могут зависеть от того, является ли эта среда истинно двумерной или трехмерной, т. е. ψ, вообще говоря, определяется не только физической природой вихрей, но и их геометрией.

Достаточно часто оказывается интересным поведение ансамблей, состоящих именно из одинаковых вихрей с $q_i = q_0$. Реальной причиной такой идентичности часто бывают квантовые эффекты (см., например, [3, 4, 8–12]), но и в сугубо классических системах эта постановка задачи весьма популярна (см., например, [1, 2, 5, 12]), по-видимому, вследствие некоторых аналогий с обычными, ньютоновскими, частицами и для удобства численного моделирования. Можно считать, что делаемое при этом допущение позволяет существенно продвинуться в теоретическом изучении вихревой системы, по-прежнему обладающей необычностью (и даже экзотичностью) поведения.

В нашей постановке эти идентичные вихри исходно располагаются в узлах бесконечной регулярной гексагональной, квадратной или треугольной решетки (имеется в виду, что вихри находятся в вершинах правильных n-угольников, паркетным образом покрывающих плоскость) на расстоянии a от ближайших соседей (трех, четырех или шести соответственно), что, как нетрудно видеть, вследствие симметрии обеспечивает стационарность ($\dot{\mathbf{r}}_i \equiv 0$) такого кристаллического состояния. Достаточно, однако, малейшего смещения каких-либо вихрей со своих позиций для приведения системы в движение. Нам (как и говорилось выше) здесь интересны лишь крупномасштабные макроскопические нарушения исходной симметрии (с характерным пространственным масштабом $\lambda \gg a$), аналогичные звуковым фононам в обычных кристаллах, когда точечные вихри как бы формируют некоторую вторичную сплошную среду. Очевидно, этот предел должен соответствовать минимальному влиянию микроскопических характеристик кристалла на его динамику, тем не менее это влияние оказывается весьма значительным. В частности, определяющий вклад всегда вносит исходная дискретность решетки (см. ниже).

Характерные отличительные свойства изучаемых $\psi(r)$ требуют более длительного обсуждения. Основным из них является закон убывания при

$r \to \infty$. Заметим, что требование устойчивости вихрей конечных размеров (с ненулевым керном) приводит к монотонному убыванию $\psi(r)$, т. е. к знакоопределенному значению $\psi' < 0$ (неизменности направления продуцируемой циркуляции среды) [6, 7, 12]. Кроме того, для всех известных нам физических типов вихрей потоковая функция еще и выпукла, т. е. $\psi'' > 0$ (монотонно убывает и скорость циркуляции). Физические причины этого свойства не вполне ясны (здесь возможна аналогия с отсутствием ударных волн разрежения в обычных веществах), но его последствия весьма и весьма существенны (см. ниже).

Довольно часто ψ оказывается некоторой степенной функцией расстояния ($\psi = 1/r^{\alpha}$, вариант с $\alpha = 0$ включается сюда посредством $-\ln r$). Таковы, например, случаи идеальной жидкости, а также электронной плазмы и сверхпроводников при малых r ($\alpha = 0$), или сверхпроводящих пленок (плазменных слоев) при больших r ($\alpha = 1$, сюда же относятся дрейфовые вихри в быстровращающихся пылевых гравитирующих дисках или в заряженных плазменных слоях во внешнем магнитном поле) (см. цитируемые обзоры). Такой вариант интересен отсутствием собственного характерного масштаба у ψ (точнее, он переменен: порядка r). С другой стороны, встречаются ψ и с вполне определенным внутренним масштабом b: например, у вихревых линий в массивных сверхпроводниках (в бесконечной электронной плазме) ψ представляет собой функцию Макдональда $K_0(r/b)$ с лондоновской (бесстолкновительно-скиновой) длиной экранировки $b = c/\omega_{pe}$. Любопытно, что опять-таки во всех известных нам случаях $\psi|_{r\to 0} \to \infty$.

Итак, согласно сказанному выше, нам интересна вторичная гидродинамика или механика регулярных вихревых сред, которая может быть описана в терминах смещения каждого вихря из соответствующего ему узла решетки, т. е. посредством исходно дискретной функции $\boldsymbol{\xi}_i(t)$. Для нее в случае $|\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j| \ll a$ в линейном (пока) приближении динамика кристалла описывается уравнением (ср. (1))

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = -\mathbf{e}_z \times q_0 \sum_{j\neq i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left[(\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j) \frac{\partial \psi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_i} \right]. \quad (2)$$

Несмотря на кажущуюся простоту этой формулы, необходимость суммирования по бесконечной, хотя и регулярной решетке весьма сильно затрудняет ее аналитическое исследование для произвольных ψ.

По-видимому, впервые эта задача для вихрей в идеальной жидкости (точнее, в сверхтекучем гелии) была поставлена и строго решена В. К. Ткаченко в работах [8–10]. Однако, вырожденность изученного случая (грубо говоря, то обстоятельство, что $\Delta \ln |\mathbf{r}| \propto \delta(\mathbf{r})$, см. ниже), существенно способствовавшая аналитическому продвижению, не позволила в должной мере оценить специфику полученных ответов и привела даже к некоторым не вполне корректным выводам, без особых изменений до сих пор перекочевывающим из обзора в обзор.

Дело в том, что в случае произвольной функции ψ продуцируемое точечными вихрями течение, являясь несжимаемым ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), вообще говоря, не является безвихревым ($\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$!). Поэтому пригодные для идеальной жидкости (для нее $\mathbf{P} \propto \mathbf{v}$, т. е. выполняемое вне керна вихря условие $\operatorname{rot} \mathbf{P} \equiv 0$ автоматически переносится на поле скоростей: $\Delta \ln r = 0$) мощные методы теории аналитических функций (двумерное векторное поле $\mathbf{v}$ представимо здесь в виде комплексной голоморфной функции), очень изящно использованные Ткаченко, для универсального исследования не подходят. Более того, здесь вообще отсутствует какой-либо единый подход к задаче, поскольку физические свойства вихревых кристаллов очень сильно разнятся в зависимости от поведения $\psi(r)$. Приходится в каждом конкретном случае пользоваться своим приближением, которое, к сожалению, не всегда позволяет получить точные численные значения искомых параметров в духе Ткаченко. В результате многие формулы удается вывести лишь с точностью до численного коэффициента. Тем не менее их функциональные зависимости и качественные особенности решений вполне строги.

Таких конкретных случаев мы выделили три. Первый характерен для быстроубывающих $\psi(r)$ (что соответствует варианту с $\alpha > 2$ — для сходимости $\int \psi\, d^2\mathbf{r}$ при $r \to \infty$ — для степенных потоковых функций, или $b \ll a$ — для экранированных), когда определяющий вклад в динамику каждого вихря вносят лишь его ближайшие соседи. Второй связан, наоборот, с малыми значениями α (или со случаем $b \gg \lambda$), когда движение вихрей зависит от весьма большой совокупности соседей, находящихся на макроскопических расстояниях $\sim \lambda$. Для него огромную роль играют нелокальные эффекты взаимодействия. И, наконец, при $a \ll b \ll \lambda$ соответствующий вариант может быть классифицирован как локальный макроскопический. В любом случае результатом анализа являются эффективные континуальные уравнения для $\boldsymbol{\xi}$, рассматриваемой уже как непрерывная функция $\mathbf{r}$ и t, описывающие как бы звуковую деформацию вторичной вихревой сплошной среды ($\lambda \gg a$!).

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

Итак, здесь полагается, что вклад в возмущение поля скоростей, вызывающее смещение данного вихря, дают только находящиеся от него ровно на расстоянии a соседи (3 для гексагональной решетки, 4 для квадратной и 6 для треугольной). Точность этой модели нетрудно оценить для каждого конкретного случая, при достаточно быстром законе убывания $\psi(r)$ (например, экспоненциальном) она может быть весьма высокой. Согласно (2) вклад этот, возникающий вследствие неоднородности деформации решетки ($\boldsymbol{\xi}_i \neq \boldsymbol{\xi}_j$ при $i \neq j$), составляет

$$\delta \mathbf{v} = -\mathbf{e}_z \times q_0 \left[\delta\boldsymbol{\xi} \frac{\psi'}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r} (\delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}) \left(\frac{\psi'}{r} \right)' \right] \Bigg|_{r=a}, \quad (3)$$

где $\delta\boldsymbol{\xi}$ — разность смещений соседа и данного вихря, а $\mathbf{r}$ — вектор, направленный из данного узла решетки в соседний узел. Нетрудно видеть, что вся динамика решетки определяется здесь всего двумя физическими положительными (см. выше) параметрами $A = -\psi'/r|_{r=a}$ и $B = \psi''|_{r=a}$.

Теперь для перехода к непрерывному распределению $\boldsymbol{\xi}$ достаточно представить дискретную разность в виде первых членов ряда Тейлора (напомним, что $\lambda \gg a$):

$$\delta\boldsymbol{\xi} = x \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} + y \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial y} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial y^2} \quad (4)$$

и просуммировать (3) по трем, четырем или шести возможным направлениям $\mathbf{r}$. В последующих формулах всюду полагается, что один из ближайших узлов во всех типах решеток (правда, существенно это лишь для квадратной) расположен в точке с координатами $(a, 0)$. Ответы сильно разнятся, демонстрируя большую роль и геометрических параметров задачи.

Для гексагональной решетки определяющий вклад вносят линейные члены в (4), квадратичными же можно пренебречь (по параметру $a/\lambda \to 0$), и эффективное уравнение в континуальном пределе имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{3}{4} q_0 a (A+B) \times \\ \times \left[-\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \left(-\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y \right], \quad (5)$$

давая следующее (несмотря на нестандартность (5) чисто звуковое!) дисперсионное соотношение для длинноволновых фононов:

$$\omega^2 = \frac{9}{16} q_0^2 a^2 (A+B)^2 k^2. \quad (6)$$

В случаях же, имеющих центральную симметрию квадратной и треугольной решеток, линейные тейлоровские члены взаимно сокращаются, делая неизбежным учет квадратичных поправок, что существенно сказывается на функциональных зависимостях выводимых уравнений. Так, в квадратной решетке акустические «фононы» эволюционируют согласно

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = q_0 a^2 \left[\left(B \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial y^2} - A \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_x + \right. \\ \left. + \left(A \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - B \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_y \right], \quad (7)$$

и их частота является уже квадратичной однородной функцией компонент волнового вектора:

$$\omega^2 = q_0^2 a^4 [(A+B)^2 k_x^2 k_y^2 - AB k^4]. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что этот вариант «вторичной» среды всегда неустойчив, например, относительно возмущений с $k_x = 0$ или $k_y = 0$.

Интересно, что, несмотря на высокую симметрию решетки, фононы здесь ведут себя анизотропным образом. Их нормальные координаты (в которых матрица правой части динамического уравнения диагональна) являются ξ_x и ξ_y (т. е. $\partial \xi_x / \partial t \propto \xi_y$ и $\partial \xi_y / \partial t \propto \xi_x$). Подобное поведение, резко отличное от стандартных фононов, все же встречается у некоторых типов волн в обычных кристаллах с существенным спин-орбитальным взаимодействием, что, наверное, не так уж и удивительно, поскольку симметрийные свойства вращения в квантовой и классической областях аналогичны.

Треугольная решетка из-за большего количества соседей требует более громоздких выкладок, но ответ получается не менее компактным (и даже более симметричным):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{3}{8} q_0 a^2 \times \\ \times \left[-(A - 3B) \mathbf{e}_z \times \nabla \hat{d} \boldsymbol{\xi} + (3A - B) \nabla \hat{r} \boldsymbol{\xi} \right]. \quad (9)$$

Здесь введены следующие используемые и далее обозначения для двух скалярных характеристик двумерного векторного поля $\boldsymbol{\xi}$: $\hat{d}\boldsymbol{\xi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}$ и $\hat{r}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}_z \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}$. «Фононный» спектр снова получается изотропным:

$$\omega^2 = \frac{9}{64} q_0^2 a^4 (A - 3B)(3A - B) k^4. \quad (10)$$

Он устойчив как для степенных ψ с $\alpha > 2$, так и для экспоненциально убывающих с $b \ll a$ (для них $B \gg A$), но весьма далек от обычного звукового $\omega \propto k$. В качестве нормальных координат здесь удобно выбрать как раз $\hat{d}\boldsymbol{\xi}$ и $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$, характеризующие всестороннее сжатие и кручение (сдвиг) решетки.

Итак, уже в приближении ближайших соседей вихревые кристаллы демонстрируют очень своеобычные поляризационные и дисперсионные свойства, отличающие их от классических ньютоновских упругих аналогов. Качественные особенности поведения здесь практически не зависят от деталей зависимости $\psi(r)$ (если она попадает в требуемый класс), а вот геометрия решетки чрезвычайно важна.

4. НЕЛОКАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В случае одновременного влияния на движение макроскопических совокупностей вихрей дробовые эффекты, связанные с дискретностью решетки (а значит, и с ее симметрией), явно проявившиеся в предыдущем разделе, вроде бы уже не должны вносить существенного вклада в фононную динамику вихревых кристаллов. Так оно в общем-то и оказывается, но только в нулевом (по параметру a/λ) приближении, которое вследствие некоторого специфического вырождения, описанного ниже[1)], далеко не всегда является достаточным. Континуальный предел здесь получается за счет перехода от суммирования (3) согласно (2) к его интегрированию. В возникающем интеграле типа свертки удобно снять обе производные с ψ, один раз проинтегрировав по частям и вынося вторую производную наружу:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\frac{q_0}{S}\,\mathbf{e}_z \times \nabla \int \hat{d}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}')\psi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d^2\mathbf{r}'. \qquad (11)$$

Здесь S — площадь элементарной ячейки, окружающей каждый узел (треугольника со стороной $\sqrt{3}\,a$ (т. е. $S = 3\sqrt{3}\,a^2/4$) для гексагональной решетки, квадрата со стороной a ($S = a^2$) для квадратной и шестиугольника со стороной $2a/\sqrt{3}$ ($S = \sqrt{3}\,a^2$) для треугольной). Разность $\delta\boldsymbol{\xi}$ в сумме приводит к интегралу в смысле главного значения.

Действительно, никакой специфики решетки (кроме тривиального коэффициента S) (11) не содержит (а вот специфика ψ очень важна), оно вполне универсально и изотропно, однако фононы согласно полученному выражению обладают дисперсией $\omega = 0$. Тем не менее, в отличие от динамики обычных кристаллических решеток, такой закон не означает отсутствия эволюции системы ($\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t \neq 0$!), а лишь указывает на ее степенной, а не экспоненциальный характер ($\boldsymbol{\xi} \propto t$).

Причина этой вырожденности вполне понятна: уравнение (11) имеет интеграл $\hat{d}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{const}$ (т. е. его правая часть есть заданная начальным распределением деформации бездивергентная векторная функция только $\mathbf{r}$), поскольку несжимаемое в данном (нулевом по a/λ) приближении макроскопическое течение не вызывает изменения вмороженной в нее вихревой плотности. К проблеме можно подойти и с другой стороны. Исследуемая вторичная нелокальная вихревая среда с макроскопической точки зрения представляет собой некое плавное распределение завихренности ($\mathrm{rot}\,\mathbf{P}$ для обычных вихрей), не сосредоточенное в кернах отдельных вихрей, а как бы «размазанное» по плоскости, так что при вычислении макроскопического же поля скоростей необходимо сворачивать потоковую функцию с непрерывной плотностью этой завихренности $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$. Исходный однородный фон $\rho_0 = q_0/S$ стационарен и дает $\mathbf{v}_{macro} \equiv 0$ (реальное поле скоростей между вихрями, конечно, отлично от 0, но в месте их расположения вследствие симметрии вклады соседей скомпенсированы) — все определяется его неоднородностями, равными в линейном приближении согласно уравнению непрерывности

$$\delta\rho = -\mathrm{div}\,(\rho_0\boldsymbol{\xi}) = -\rho_0\hat{d}\boldsymbol{\xi} \qquad (12)$$

(ср. (11)), т. е. лишь области с ненулевым всесторонним сжатием являются источниками макроскопических течений. При этом вследствие несжимаемости (вращательности) продуцируемого ими движения оно приводит лишь к медленному равномерному ($\propto t$) нарастанию сдвиговых деформаций, не влияющих на первичные источники.

Таким образом, макроскопически в континуальном пределе у вихревых решеток оказывается разорванной связь между их сжатием и кручением, и соответствующая эволюция длинноволновых возмущений носит характер не бегущих волн, а неоднородных течений (что указывает на хорошую адекватность используемого термина вторичная гидродинамика).

1) Любопытно, что в [8–10], равно как и последующих обзорах, нет никаких указаний на это обстоятельство, по-видимому, вследствие того, что по аналогии с обычными кристаллами соотношение $\omega = 0$ не кажется решением.

5. ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ СЖИМАЕМОСТИ

Естественно, учет исходной дискретности структуры кристаллов в следующем приближении меняет существо дела. Действительно, хотя несжимаемость поля истинной микроскопической скорости есть обязательный атрибут любой системы точечных вихрей, это обстоятельство не запрещает взаимного сближения точечных соседей и, как следствие, возможного увеличения или уменьшения макроскопической плотности завихренности ρ, т. е. эффективной сжимаемости макроскопического же течения. Этот эффект восстанавливает связь между $\hat{d}\boldsymbol{\xi}$ и $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$, так что малая (по параметру $(a/\lambda)^2$) сжимаемость приводит к появлению в (11) дополнительных членов, обеспечивающих волновой характер фононной эволюции. Очевидно, что вследствие определяющей роли дискретности эти члены опять-таки обладают высокой чувствительностью к микроскопической симметрии решетки, существенно модифицируя универсальность (11).

Математически метод вычисления соответствующих поправок довольно прост: достаточно сравнить интеграл

$$\frac{1}{S}\iint \mathbf{f}(x,y)\,dx\,dy$$

с интерполирующим его рядом

$$\sum_{i,j}\mathbf{f}(\mathbf{r}_{ij})$$

(вектор-функция $\mathbf{f}$ здесь определяется выражением (3), i и j нумеруют уже не отдельные вихри, а двумерный массив узлов, при этом удобно полагать, что вихрь, чье движение исследуется, принадлежит узлу $(0,0)$). В первом случае мы имеем дело с нормированным на S алгебраическим объемом бесконечной (по x,y) фигуры, ограниченной по z поверхностями $z=0$ и $z=f_x(x,y)$ или $z=f_y(x,y)$, а во втором — с аналогичным объемом бесконечного набора прямых трех-, четырех- или шестиугольных призм, основания которых (элементарные ячейки в указанном выше смысле) окружают узлы решетки, а высоты равны значениям компонент $\mathbf{f}$ в центре основания.

Разница этих величин, очевидно, равна

$$\frac{1}{S}\sum_{i,j}\iint[\mathbf{f}(\mathbf{r}_{ij})-\mathbf{f}(\mathbf{r})]\,dx\,dy, \tag{13}$$

где интегралы берутся по каждой элементарной ячейке. В случае достаточно плавного (в сравнении с a) распределения $\mathbf{f}$ (которое, напоминаем, является комбинацией действительно плавной — масштаба λ — функции $\boldsymbol{\xi}$ и ψ) допустимо снова воспользоваться разложением в ряд Тейлора и оценить члены ряда (13) как

$$-\frac{\Delta\mathbf{f}|_{ij}}{2S}\iint(x-x_{ij})^2\,dx\,dy=-C\Delta\mathbf{f}|_{ij}$$

(где $C=a^2/2^4$ — для элементарного треугольника, $a^2/(3\cdot 2^3)$ — для квадрата и $5a^2/(3^2\cdot 2^5)$ — для шестиугольника, другие первые члены тейлоровского разложения не дают вклада из-за симметрии элементарных ячеек). Следовательно,

$$\sum_{i,j}\mathbf{f}\approx\frac{1}{S}\iint\mathbf{f}\,dx\,dy-C\sum_{i,j}\Delta\mathbf{f}. \tag{14}$$

В правой части теперь снова допустимо в континуальном пределе перейти от суммы к двойному интегралу (вносимая ошибка имеет следующий порядок малости). Однако вследствие наличия под этим интегралом полной производной поправка для локализованных возмущений ($|\mathbf{f}|\to 0$ при $|\mathbf{r}|\to\infty$)) тождественно обращается в нуль, равно как и все остальные поправки высших степеней по параметру a/λ (или a/b).

Это означает, что в случае плавного распределения $\mathbf{f}$ (который требует плавности потоковой функции, физические примеры чего, как указывалось в разд. 2, нам неизвестны) макроскопическая сжимаемость решетки мала не степенным, а экспоненциальным образом. Увидеть это обстоятельство можно при использовании и другого метода разложения. Действительно, исходно дискретное распределение завихренности

$$\rho_0=q_0\sum_{i,j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{ij})$$

можно представить в виде двумерного ряда Фурье

$$\rho_0=\frac{q_0}{S}\sum_{i,j}\cos(\mathbf{k}_{ij}\mathbf{r}+\varphi_{ij})$$

с дискретным набором $\mathbf{k}_{ij}$ (зависящим, естественно, от типа решетки) с длинами, пропорциональными n/a $(n=0,1,2,\ldots)$. Континуальный предел в этом представлении достигается отбрасыванием старших членов ряда (что соответствует хуже сходящемуся разложению по параметру $a/n\lambda$, а не $(a/\lambda)^n$, как ранее). Член с $n=0$ дает, как уже говорилось, при использовании (12) уравнение (11), а следующие при сворачивании с плавной ψ — экспоненциально малую сжимаемость.

Однако все известные нам физические примеры характеризуются нерегулярным поведением ψ в точке $r = 0$. Это обстоятельство, с одной стороны, обеспечивает степенную малость сжимаемости дискретной решетки в макроскопических процессах, а с другой — запрещает замену суммы в правой части (14) на интеграл. Более того, в ближайших к нулю ячейках (а именно они и дают основной эффект) вклад отброшенных старших членов ряда Тейлора для $\mathbf{f}$ не мал, и строгий математический подход требует прямого суммирования. К сожалению, нам не удалось найти аналитическую процедуру, обеспечивающую компактный ответ в таком варианте (для всех возможных весьма различных ψ).

По этой причине приходится ограничиваться лишь оценкой (~ 1) поправки, дающей правильное функциональное выражение для фононного уравнения, но не позволяющей точно вычислить в нем коэффициенты, т. е. ответ здесь получается с точностью до знака (что важно для проблемы устойчивости) и по порядку величины.

Наиболее просто выглядит следующая процедура. В нулевой ячейке, в центре которой и находится особая точка ψ, никакое тейлоровское разложение невозможно, и здесь необходимо честное вычисление интеграла

$$-\iint \left[\delta\boldsymbol{\xi}\,\frac{\psi'}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\,(\delta\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r})\left(\frac{\psi'}{r}\right)'\right] dx\,dy \tag{15}$$

(высота соответствующей призмы есть тождественный нуль). Естественно, означенный интеграл существует для степенных ψ лишь при $\alpha < 2$ (гексагональная решетка требует здесь большей внимательности), но нарушение этого условия автоматически переводит физическую систему в случай, разобранный в разд. 3.

Далее, сравнимый с данным вклад в дискретную поправку дают, очевидно, лишь близкие ячейки (что видно и из того обстоятельства, что применение оператора Лапласа к медленноубывающей по нашей терминологии степенной функции переводит ее в разряд быстроубывающих), для которых в качестве оценки все же можно воспользоваться формулами типа (14). Это дает возможность при проведении вычислений, во-первых, раскладывать $\delta\boldsymbol{\xi}$ в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь квадратичными (для гексагональной решетки, элементарные ячейки которой не обладают центральной симметрией, — линейными) членами (естественно, это обстоятельство используется и при взятии (15)), и, во-вторых, в поправке в (14) снова суммировать вклады только ближайших соседей[2)]. При этом возникают поправки и к уже присутствующему в (11) крутящему члену, которые в сравнении с ним должны быть опущены. Естественно, в силу указанных выше причин оставляемые члены, ответственные за конечную сжимаемость решетки, обладают теми же симметрийными свойствами, что и правые части уравнений (5), (7) и (9), т. е. вторичная гидродинамика вихревых решеток даже в нелокальном пределе обладает высокой чувствительностью к их локальной структуре (см. также [9]).

В результате для гексагональной и квадратной решеток существуют неприводимые здесь по причине громоздкости формулы (поскольку дополнительные члены у них структурно отличны от изотропного $\propto \hat{d}\boldsymbol{\xi}$). Квадратная по-прежнему остается неустойчивой с фононным спектром (ср. (8))

$$\omega^2 = \psi_{\mathbf{k}}(C_1 k_x^2 k_y^2 - C_2 k^4), \tag{16}$$

где C_1 и C_2 — положительные константы $\sim\ q_0^2|\psi(a)|/a^2$ (что, впрочем, по крайней мере для $\psi = -\ln r$, т. е. $\psi_{\mathbf{k}} = 2\pi/k^2$, хорошо известно, см. [8, 9]). Такая динамика представляется малоинтересной.

А вот для наиболее симметричной треугольной решетки получается вполне изотропное выражение, как бы не содержащее явно информации о внутренней геометрии кристалла:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t} = = -\frac{q_0}{S}\mathbf{e}_z\times\nabla\int \hat{d}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}')\psi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)d^2\mathbf{r}' + Kq_0\nabla\hat{r}\boldsymbol{\xi}, \tag{17}$$

где $K \sim |\psi(a)|$, т. е. ее фононный спектр

$$\omega^2 = \frac{q_0^2}{S}\,K\psi_{\mathbf{k}}k^4, \tag{18}$$

что дает $\omega \propto k$ для степенной потоковой функции с $\alpha = 0$ ($\psi_{\mathbf{k}} = 2\pi/k^2$) и $\omega \propto k^{3/2}$ для $\alpha = 1$ ($\psi_{\mathbf{k}} = 2\pi/k$). Естественно, в первом случае полученный ответ совпадает с найденным ранее спектром «волн Ткаченко». При этом, как уже говорилось выше, в отличие от нашей работы в [9, 10] коэффициент был вычислен точно: оказывается, что в наших

[2)] Мы использовали и другие оценочные методы, например, замену $\sum \Delta f$ на интеграл по плоскости с «выколотой» нулевой ячейкой (ее вклад по-прежнему определялся (15)), который по теореме Остроградского–Гаусса переходил в линейный интеграл по границам этой ячейки. Никаких качественных различий в ответах не наблюдалось.

терминах здесь $K = 1/8$ (но для каждого другого $\alpha \neq 0$ ответ свой)[3)].

Однако, фононные уравнения, выведенные нами и выписанные в указанных работах, существенно различаются. Исходя из очевидного совпадения спектра (18) для идеальной жидкости со стандартным звуковым $\omega^2 = k^2 c_S^2$, в [9, 10] предлагалось (и до сих пор предлагается в обзорах) использовать для описания длинноволновой динамики треугольной решетки вихрей в свертекучем гелии обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + c_S^2 \Delta \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что уже из самой постановки вихревой задачи (см. (1)) эффективное уравнение должно иметь первый, а не второй порядок по $\partial/\partial t$. Кроме того, очевидно (см. (11)), что для ψ из данного класса оно обязано быть нелокальным. Любопытно, однако, что для нормальных координат $\hat{d}\boldsymbol{\xi}, \hat{r}\boldsymbol{\xi}$ и $\psi = -\ln r$ оно становится локальным, поскольку $\Delta \int \hat{d}\boldsymbol{\xi} \psi \, d^2\mathbf{r}' = -2\pi \hat{d}\boldsymbol{\xi}$! Иными словами, уравнение (19) вполне может быть использовано, но именно для $\hat{d}\boldsymbol{\xi}$ и $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$, а не самой $\boldsymbol{\xi}$. Не следует думать, что в силу линейности эффективных уравнений можно произвольным образом трансформировать их с сохранением спектра, с математической точки зрения для работы не менее важны специфичные начальные и граничные условия задачи, различные для (17) и (19). В противном случае не нужно было бы подробно исследовать поляризации нормальных колебаний решетки, что было сделано в [9], поскольку в (19) в отличие от (17) отсутствует всякая связь между ξ_x и ξ_y.

Резюмируя, можно сделать вывод о сохранении качественных различий поведения вихревых решеток и в нелокальном пределе (да еще и с новой спецификой). Здесь их акустическая динамика существенно зависит и от вида потоковой функции, и от внутренней геометрии кристалла.

[3)] В вычислениях Ткаченко наряду с неприменимым для произвольных ψ ТФКП-методом содержалось еще одно (на наш взгляд, несущественное) отличие от нашего подхода. Он рассматривал волны на фоне вращающейся как целое решетки. Это связано со спецификой крайне медленного убывания функции $-\ln r$, наличие сколь угодно далеких границ у решетки приводит ее в «твердотельное» вращение с угловой скоростью $\Omega = \pi q_0/S$. Другие ψ, равно как и $-\ln r$, обрезаемый функцией Макдональда, такой спецификой не обладают. В любом случае для бесконечных решеток стационарное регулярное состояние (т. е. $\delta\boldsymbol{\xi} \equiv 0$) есть точное решение задачи.

6. ЛОКАЛЬНОЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Совсем просто и универсально выглядит фононное уравнение для треугольной решетки вихрей с медленно убывающей степенной функцией ψ, обрезаемой на расстояниях b (скажем, $\psi = K_0(r/b)$), попадающих в интервал $a \ll b \ll \lambda$. Оно сразу может быть написано на основе (17):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -R \, \mathbf{e}_z \times \nabla \hat{d}\boldsymbol{\xi} + D \, \nabla \hat{r}\boldsymbol{\xi}. \tag{20}$$

Здесь R и D — действительные коэффициенты одного знака, определяющие динамику соответственно кручения и сжатия, причем $R = (q_0/S) \int \psi \, d^2\mathbf{r}$ и $D/R \sim (a/b)^2 \ll 1$. Нетрудно видеть, что в данном случае снова восстанавливается свойство практической независимости поведения от деталей $\psi(r)$.

Для выявления качественных отличий вторичной гидродинамики — механики вихревых решеток — от простого распространения акустических волн в обычных кристаллах изучим более подробно свойства именно этого, наиболее симметричного и компактного из представленных эффективных уравнений (некоторые из них, впрочем, совпадают со свойствами (17)).

Из-за наличия в нем указанной выше малости в течение достаточно длительного времени эволюция начальных возмущений регулярности носит медленный степенной характер с линейным по времени нарастанием деформации кручения решетки. Однако далее этот рост прекращается и устанавливается самосогласованное волновое движение с $\omega = \pm\sqrt{RD}\, k^2$, в котором характерные значения сдвиговых деформаций $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$ в $\sqrt{R/D}$ раз превышают соответствующие величины для «всестороннего сжатия», $\hat{d}\boldsymbol{\xi}$.

В рамках развиваемого континуального подхода при $|\boldsymbol{\xi}| \ll a$ (точнее, по-прежнему при $|\delta\boldsymbol{\xi}| \ll a$, т. е. при малой разности между смещениями вихрей, находящихся в данном случае на существенно не превышающих b расстояниях и единственно дающих вклад в (20)) нетрудно учесть и нелинейные эффекты, достаточно лишь добавить в разложение (2) еще и следующий (квадратичный по смещению) член и повторить процедуру замены суммы интегралом, ранее приводившую к (11) (используя разложение $\delta\boldsymbol{\xi}$ в ряд Тейлора). В результате в правой части (20) появится новый член

$$\frac{R}{2} \, \mathbf{e}_z \times \nabla \left[(\hat{d}\boldsymbol{\xi})^2 + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta} \right] \tag{21}$$

(по повторяющимся греческим индексам, пробегающим значения $1, 2$, предполагается суммирование).

Вследствие малости коэффициента D на практике вполне может реализовываться случай, когда роль сжимаемости в динамике решетки оказывается много меньше роли нелинейности (при выполнении условия $b \gg \sqrt{a\lambda}$). Наиболее интересным здесь является вопрос, останавливает ли при этом нелинейность нарастание $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$, продуцируемое первым (линейным) членом в (20)? Ответ на него в общем случае отрицателен, более того, (21) способен даже ускорять этот процесс, вполне самостоятельно доводя его до взрывного режима.

Действительно, для чисто сдвиговых деформаций $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}_z \times \nabla\phi$ (т. е. с $\hat{d}\boldsymbol{\xi} \equiv 0$) соотношения (11) и (21) дают после однократного интегрирования по $\mathbf{r}$ (снятия $\mathbf{e}_z \times \nabla$) уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = R\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}\right)^2\right], \tag{22}$$

описывающее следующий эффект обращения амплитуды возмущений в бесконечность за конечное время (при $t \to t_0$) вблизи седловой точки (расположенной в $(0,0)$) поля $\boldsymbol{\xi}$:

$$\phi = -\frac{x^2y^2}{12R(t_0-t)}.$$

Разумеется, вблизи $t = t_0$ сделанное при выводе допущение ($|\boldsymbol{\xi}| \ll a$) перестает выполняться, так что речь идет об особенностях эффективного уравнения, а не физической системы, однако, во-первых, запас применимости формул может быть достаточно большим, а во-вторых, и чисто математические свойства вторичной гидродинамики также представляются нам интересными.

Выведенное уравнение позволяет также вычислить, например, такую важную для эволюции возмущений величину как нелинейную дисперсию рассматриваемых фононов. Одномерная бегущая волна $\boldsymbol{\xi}(x-ut)$ описывается системой

$$-u\,\frac{d\hat{d}\boldsymbol{\xi}}{dx} = D\,\frac{d^2\hat{r}\boldsymbol{\xi}}{dx^2},$$

$$u\,\frac{d\hat{r}\boldsymbol{\xi}}{dx} = R\,\frac{d^2[\hat{d}\boldsymbol{\xi} - (\hat{d}\boldsymbol{\xi})^2]}{dx^2},$$

которая после снятия двух производных дает

$$[\hat{d}\boldsymbol{\xi} - (\hat{d}\boldsymbol{\xi})^2]'' + \frac{u^2}{RD}\hat{d}\boldsymbol{\xi} = 0. \tag{23}$$

Проводя стандартную процедуру разложения по степеням малой амплитуды для нахождения поправок к монохроматической волне (см., например, [13]):

$$\hat{d}\boldsymbol{\xi} = d\cos(kx-\omega t), \quad \omega = ku = k^2\sqrt{RD} \quad (d \ll 1),$$

нетрудно получить, что первая неисчезающая добавка к частоте составляет $\delta\omega/\omega = -d^2/3$.

Далее можно, отказавшись от предположения о пренебрежимой малости нелинейности, строить решение в виде кноидальной волны. Более того, (23) полностью интегрируется в квадратурах:

$$(\hat{d}\boldsymbol{\xi})'^2 = \frac{u^2}{RD}\,\frac{(4/3)(\hat{d}\boldsymbol{\xi})^3 - (\hat{d}\boldsymbol{\xi})^2 + \mathrm{const}}{(2\hat{d}\boldsymbol{\xi}-1)^2}.$$

Последующее определение $\hat{r}\boldsymbol{\xi}$ и самого $\boldsymbol{\xi}$ достигается простым интегрированием полученных выражений.

Любопытно, что структурно похожее на (23) уравнение (правда, с кубической нелинейностью) выведено в [14] для (потенциального!) электрического поля высокочастотных (вблизи ω_{pi}) ионно-звуковых волн в плазме (обладающих совсем другой дисперсией: фактически временной, или частотный, и дисперсионный члены поменялись местами, и только весьма необычная нелинейность (21) восстанавливает статус-кво, естественно, только в смысле математики).

Из приведенных простых примеров следует, что предлагаемое эффективное уравнение хотя и нестандартно, но вполне пригодно для аналитических исследований и достаточно информативно.

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕШЕТКИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Продолжим изучение особенностей вторичной гидродинамики, рассмотрев вопрос о взаимодействии ансамблей точечных вихрей с распределенными макроскопическими вихрями. Последние продуцируют неоднородные бездивергентные течения текучей среды, очевидно, увлекающие их точечные аналоги и, следовательно, возмущающие исходную регулярность решеток. Эти течения следует аддитивным образом добавить в правую часть (20) (временная производная от смещения каждого вихря равна скорости течения в месте его расположения вне зависимости от того, что является источником $\mathbf{v}$). Мы будем пренебрегать обратным влиянием динамики решетки на распределенный вихрь, считая его плотность завихренности ρ, а значит, и создаваемое им течение ($\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \int \rho\psi\, d^2\mathbf{r}' \propto \mathbf{e}_z \times \nabla\rho$ — интересно, что в нашем случае любые достаточно плавные распределения ρ вполне стационарны, ср. с эволюцией магнитного поля в электронной плазме [7]), заданными функциями $\mathbf{r}$. В конечном счете, нас интересуют характерные черты динамики именно вихревых кристаллов, и их фононный отклик на неоднородные течения представляется вполне отвечающим поставленной задаче. В многокомпонентной плазме такой режим с заданными как бы внешними несжимаемыми потоками может быть реализован и в чистом виде — за счет пронизывающих ее пучков заряженных частиц (см. [7]).

Выберем простейшую геометрию такого течения:

$$\mathbf{v} = v(y)\mathbf{e}_x = v_0 \cos(ky)\mathbf{e}_x.$$

Линейное (следовательно, общий случай можно рассматривать с помощью разложения в интеграл Фурье) уравнение (20) с указанной модификацией, снова записанное в нормальных координатах, переходит в систему

$$\frac{\partial \hat{d}\boldsymbol{\xi}}{\partial t} = D\,\Delta \hat{r}\boldsymbol{\xi}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \hat{r}\boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -R\,\Delta \hat{d}\boldsymbol{\xi} + kv_0\sin(ky). \tag{25}$$

При нулевых начальных условиях (т. е. если при $t = 0$ деформация решетки отсутствует) она имеет следующее простое решение:

$$\hat{d}\boldsymbol{\xi} = \frac{v_0}{kR}[\cos(\omega t) - 1]\sin(ky),$$

$$\hat{r}\boldsymbol{\xi} = \frac{v_0}{k\sqrt{RD}}\sin(\omega t)\sin(ky),$$

откуда

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{v_0}{\omega}\left\{\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + \sqrt{\frac{D}{R}}[1-\cos(\omega t)]\mathbf{e}_y\right\}\cos(ky),$$

где, естественно, $\omega = \sqrt{RD}\,k^2$. Подобный же тип решения с пропорциональностью деформаций $v(y)$ наблюдается и при $v(y) \propto \exp(-ky)$. Для произвольных начальных условий ответы немногим сложнее.

Таким образом, неоднородные стационарные течения исходной сплошной среды действительно возбуждают вполне периодические во времени колебания вмороженных в нее решеток из точечных вихрей. Это обстоятельство говорит о том, что введенное В. К. Ткаченко (естественно, для нелокального случая) понятие упругости вихревых кристаллов [10], хотя и допустимо, но достаточно сильно отличается от привычных аналогов.

8. ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ ЦЕПОЧЕК

Еще одним примером общности поведения вихревых ансамблей одновременно с наличием специфических особенностей, определяемых их физической природой (потоковой функцией), может быть эволюция линейных одномерных цепочек — расположенных, скажем, вдоль прямой $y = 0$ на расстоянии a друг от друга бесконечных рядов одинаковых вихрей (как бы дискретных аналогов тангенциальных разрывов в обычной гидродинамике). Несжимаемость макроскопического течения здесь не приводит к вырождению даже в нелокальном пределе (двумерный вектор $\boldsymbol{\xi}(x,t)$, привязанный к оси абсцисс отнюдь не обязан быть бездивергентным), так что случаи различных $\psi(r)$ выглядят более похожими, чем у двумерных ансамблей.

Вариант с доминированием влияния двух ближайших соседей описывается теперь системой (условие $\lambda \gg a$ по-прежнему считается выполненным)

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial t} = q_0 a^2 A\,\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial t} = q_0 a^2 B\,\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \tag{27}$$

(здесь учтено, что $\partial^2\psi/\partial y^2|_{y=0} = (1/x)\partial\psi/\partial x|_{y=0}$), а нелокальный случай (для степенных ψ границей между режимами является теперь значение $\alpha = 1$)

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial t} = -q_0 a \int \xi_y(x-x')\,\frac{1}{x'}\,\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}\bigg|_{y=0} dx', \tag{28}$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial t} = -q_0 a \int \xi_x(x-x')\,\frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x'^2}\bigg|_{y=0} dx' \tag{29}$$

(здесь в отличие от предыдущих формул не использована замена $x \to r$ в $\psi|_{y=0}$, поскольку x может принимать и отрицательные значения), где интегралы понимаются в смысле главного значения.

Переход к локальному макроскопическому варианту от (28), (29) тривиален:

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial t} = q_0 a C_3 \xi_y, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial t} = -q_0 a C_4\,\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}. \tag{31}$$

Здесь

$$C_3 = -\int \frac{1}{x}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\bigg|_{y=0} dx, \quad C_4 = \int \psi|_{y=0}\,dx$$

— две положительные константы с соотношением $C_4 \sim C_3 b^2$ (возможные расходимости в нуле снимаются за счет стандартных математических интерпретаций «главного значения»).

Во всех случаях цепочки являются неустойчивыми образованиями. При $\psi = -\ln r$ инкремент, следующий из (28), (29), естественно, совпадает с классическим гидродинамическим выражением (см., например, [1], на самом деле ТФКП-методы позволяют здесь получать ответ для произвольных значений λ).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные полученные результаты.

1. Для разных классов вихрей (определяемых особенностями потоковых функций) выведены линейные уравнения, описывающие эволюцию длинноволновых возмущений в различных же двумерных решетках. С их помощью проанализированы дисперсионные и симметрийные свойства этих возмущений, схожих с акустическими волнами в обычных кристаллах.

2. Выявлены причины определяющей роли микроскопической дискретности вторичных вихревых сред в формировании акустических спектров даже в макроскопическом пределе.

3. Для наиболее устойчивой и симметричной треугольной решетки вихрей с потоковыми функциями из локального макроскопического класса выведено нелинейное фононное уравнение, обладающее очень своеобразной иерархией нелинейности и дисперсии, а также исследованы его простейшие свойства.

4. Изучен отклик вихревых решеток на попытку их деформации неоднородными течениями первичной среды, характеризующийся генерацией фононов даже в случае стационарного внешнего воздействия, подобно звучанию скрипичной струны при равномерном движении смычка.

Во избежание недоразумений еще раз подчеркнем, что достигнутая нами лишь приближенная оценка одного из коэффициентов в уравнениях (17) и (20) никак не сказывается ни на их виде, ни на обсуждаемых здесь их качественных и количественных свойствах. Для любой конкретной ψ этот коэффициент, кстати, может быть весьма быстро вычислен с помощью компьютера.

Таким образом, в настоящей работе продемонстрировано, что развитая идеология, декларирующая единый подход к вихревым задачам, действительно позволяет выяснить общие закономерности поведения ансамблей точечных вихрей одновременно с выявлением высокой чувствительности картины процессов к физическим и геометрическим особенностям конкретных систем. Выведенные эффективные уравнения для макроскопической эволюции регулярных решеток могут с успехом использоваться для изучения специфических черт различных явлений, связанных с внешними воздействиями на эти своеобразные кристаллы. Соответствующая динамика оказывается весьма сильно (часто — качественно) отличной от фононной динамики обычных твердых тел.

Авторы очень признательны И. А. Ивонину за ценные обсуждения, стимулировавшие наши исследования. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки РФ (программа «Нелинейная динамика») и фонда INTAS (грант 97-0021).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный мир, Москва (2000), с. 1.

2. В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск (1998), с. 1.

3. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein et al., Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).

4. B. Nienhuis, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz, Academic, New York (1987), Vol. 11, p. 1.

5. R. N. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 547 (1980).

6. В. И. Петвиашвили, В. В. Яньков, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. Б. Б. Кадомцева, Энергоатомиздат, Москва (1985), вып. 14, с. 3.

7. А. С. Кингсеп, К. В. Чукбар, В. В. Яньков, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. Б. Б. Кадомцева, Энергоатомиздат, Москва (1987), вып. 16, с. 209.

8. В. К. Ткаченко, ЖЭТФ **49**, 1875 (1965).

9. В. К. Ткаченко, ЖЭТФ **50**, 1573 (1966).

10. В. К. Ткаченко, ЖЭТФ **56**, 1763 (1969).

11. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987), с. 1.

12. К. В. Чукбар, Физика плазмы **25**, 83 (1999).

13. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977), гл. 13.

14. Л. И. Рудаков, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **75**, 1618 (1978).