ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 6, стр. 1109–1117

ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ МЕДЛЕННЫМ ЭЛЕКТРОНОМ ПРИ РАССЕЯНИИ НА КУЛОНОВСКОМ ЦЕНТРЕ

В. П. Крайнов *

Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 3 января 2001 г.

Получены простые аналитические выражения для вероятности вынужденного обратного тормозного поглощения в единицу времени при рассеянии электрона на кулоновском центре с зарядом Z в присутствии электромагнитного поля. Начальная и конечная энергия электрона предполагаются малыми по сравнению с ридберговской энергией Z^2 (всюду используются атомные единицы). Рассматриваются однофотонные процессы поглощения и вынужденного излучения фотона электроном. Предполагается, что частота электромагнитного поля ω достаточно мала, так что выполняется условие $Z\omega/p^3 \ll 1$, где p — импульс электрона, а также условие $\hbar\omega \ll p^2$. Однако эта частота предполагается достаточно большой по сравнению с частотой столкновения электрона с кулоновскими центрами: $\omega \gg \nu_{ei}$. Получены зависимости вероятностей поглощения и вынужденного излучения фотона от угла θ между направлением падающего электрона и вектором поляризации электромагнитного поля (предполагаемого линейно поляризованным). Показано, что при любых углах θ вероятность поглощения фотона больше вероятности вынужденного излучения, и, таким образом, эффект Маркуза для медленных электронов (усиление электромагнитного поля) отсутствует. Показано также, что медленный электрон в среднем поглощает удвоенную пондеромоторную энергию за одно столкновение с ионом (кулоновским центром) в максвелловской плазме. Это совпадает как с известными результатами расчетов для быстрых электронов, так и с известными результатами расчета, исходящего из классического кинетического уравнения Больцмана для плазмы.

PACS: 36.40.-c, 52.40.Nk, 61.46.+w

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что свободный электрон не может реально поглощать или излучать фотоны внешнего монохроматического электромагнитного поля. Однако в присутствии кулоновского центра с потенциалом Z/r такие процессы возможны (здесь и далее мы будем, как правило, использовать атомную систему единиц, $e = m_e = \hbar = 1$, сохраняя постоянную Планка в разд. 2). Предполагаем, что электромагнитное поле является достаточно слабым, так что имеют место только однофотонные процессы поглощения или вынужденного излучения фотонов (теория возмущений первого порядка по внешнему электромагнитному полю). Соответствующее ограничение сверху на напряженность поля будет дано ниже.

Вероятности поглощения и вынужденного испускания фотона были рассчитаны Маркузом [1] для быстрых электронов с использованием теории возмущений также и по кулоновскому потенциалу. Если обозначить через p импульс начального электрона (до рассеяния), а p' — импульс конечного электрона (после рассеяния), то условие применимости борновского приближения для кулоновского потенциала имеет вид $p \gg Z, p' \gg Z$. Детальное изложение соответствующих результатов Маркуза содержится в монографии [2]. Было найдено, что в определенной области углов θ между импульсом $\mathbf{p}$ начального электрона и вектором напряженности $\mathbf{E}$ электромагнитной волны (всюду будем предполагать электромагнитное поле линейно поляризованным) вероятность

*E-mail: krainov@cyberax.ru

поглощения фотона w_a меньше вероятности индуцированного излучения фотона w_e, так что электромагнитное излучение усиливается (это и есть так называемый эффект Маркуза). Однако при интегрировании по всем углам в предположении равномерного углового распределения электронов этот эффект пропадает, и, наоборот, электрон отбирает электромагнитную энергию от излучения, т. е. излучение поглощается. Если усреднить вероятность поглощения электромагнитной энергии по скоростям электронов в предположении их максвелловского распределения, то средняя энергия, поглощаемая электроном при одном соударении с кулоновским центром, равна $E^2/2\omega^2$, где ω — частота электромагнитного поля, т. е. равна удвоенной средней пондеромоторной энергии электрона $U_p = E^2/4\omega^2$. Это значение в точности совпадает с тем, что получается из уравнения Больцмана для упругого рассеяния классических электронов на многозарядных ионах в плазме [3, 4] при рассмотрении высокочастотной проводимости плазмы (высокочастотность здесь понимается в смысле выполнения неравенства $\omega \gg \nu_{ei}$, где ν_{ei} — частота столкновений электрона с ионами).

Данная работа посвящена исследованию противоположного предельного случая медленных электронов, $p \ll Z$, $p' \ll Z$, когда применимо квазиклассическое приближение. Конечно, всегда энергия фотона предполагается малой по сравнению с энергией электрона, т. е. $\hbar\omega \ll p^2$. Но, помимо этого критерия, имеется еще классический безразмерный параметр $\beta = Z\omega/p^3$, не содержащий постоянной Планка. В работе [5] рассматривался предельный случай больших частот: $Z\omega/p^3 \gg 1$ (он не противоречит упомянутому выше критерию $\hbar\omega \ll p^2$, так как $p \ll Z$). При этом существенно рассеяние электронов на большие углы.

На практике, однако, всегда реализуется обратный предельный случай низких частот излучения, $Z\omega/p^3 \ll 1$, если иметь в виду частоты типичных световых лазерных источников и электронные температуры многозарядной лазерной плазмы кластеров в десятки эВ и выше [6]. Поэтому здесь рассматривается задача для медленных электронов именно в указанном предельном низкочастотном случае $Z\omega/p^3 \ll 1$. При этом существенно рассеяние электронов на малые углы в процессе поглощения или испускания фотона.

Сначала обратимся к решению задачи в рамках классической теории поля (разд. 2). В учебниках по классической теории поля (см., например, [7]) можно найти результаты только для потерь электромагнитной энергии, усредненных по углу θ. Поэтому представляет интерес получить простые аналитические выражения для потерь энергии при фиксированном значении этого угла. Конечно, в рамках такого классического подхода вероятность индуцированного испускания и поглощения фотона равны друг другу, так как постоянная Планка равна нулю в рамках классической теории поля.

Впрочем, можно было бы вычислять работу электрона во внешнем поле и непосредственно, определяя тем самым напрямую разность между вероятностями поглощения и испускания фотона. Однако для этого следует решать линейное дифференциальное уравнение для малого возмущения координаты электрона, рассеивающегося на кулоновском центре, переменным электромагнитным полем, а это — достаточно сложная задача. Представляется более простым обратиться к известным результатам квантовой электродинамики [8] для спонтанного тормозного излучения при рассеянии электрона на кулоновском центре, перейдя с помощью хорошо известных правил к вынужденному излучению [2], и проводить необходимые упрощения результатов в квазиклассическом пределе. В разд. 3 это делается для полных вероятностей поглощения и испускания фотона, усредненных по углу θ, а в разд. 4 — для вероятностей при фиксированном значении этого угла между направлением падающего электрона и вектором поляризации электромагнитного поля. Попутно в целях сравнения всюду приводятся известные результаты Маркуза для быстрых электронов.

В заключение полученные результаты сравниваются с известными результатами для среднего набора энергии электрона в максвелловской плазме при одном столкновении с ионом в присутствии внешнего электромагнитного поля. Как для быстрых, так и для медленных электронов этот набор равен удвоенной средней пондеромоторной энергии, что находится в полном численном согласии с результатами расчета, основанного на кинетическом уравнении Больцмана для классических электронов [3, 4].

2. КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В рамках классической теории поля (см. формулу (67.10) в книге [7]) стартуем со спектральной плотности излучения. Деля ее на $\hbar\omega$, получим число фотонов с частотой ω, спонтанно испущенных электроном в телесный угол $d\Omega$:

$$dN_e = \frac{\omega^3}{2\pi^2 c^3 \hbar} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_\omega|^2 d\Omega\, d\omega. \tag{1}$$

Здесь величина $\mathbf{r}_\omega$ представляет собой фурье-компоненту классического радиуса-вектора электрона при его движении в поле притягивающего кулоновского центра с зарядом Z, $\mathbf{e}$ — вектор поляризации испущенного спонтанного фотона, c — скорость света.

При переходе к вынужденным процессам испускания или поглощения фотона в приведенном выражении (см. детально в монографии [2]) следует провести замену

$$d\Omega\, d\omega \to \frac{\pi^2 c^3 E^2}{\hbar\omega^3},$$

где E — амплитуда напряженности внешнего переменного электрического поля, а ω — его частота. Тогда получаем для числа вынужденно испущенных или поглощенных фотонов простое выражение

$$N_{e,a} = \frac{1}{4\hbar^2}|\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}_\omega|^2.$$

Будем полагать, что электрон рассеивается в плоскости xy. Тогда фурье-компонента его радиуса-вектора представляется в виде разложения по единичным векторам в этой плоскости:

$$\mathbf{r}_\omega = x_\omega \mathbf{i}_x + y_\omega \mathbf{i}_y.$$

Выражения для фурье-компонент проекций радиуса-вектора электрона хорошо известны [7]:

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\beta}^{(1)'}(i\beta\varepsilon),$$

$$y_\omega = -\frac{\pi a}{\omega}\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}\, H_{i\beta}^{(1)}(i\beta\varepsilon).$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = \frac{Z\omega}{p^3} \ll 1, \quad a = \frac{Z}{p^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}.$$

Величина ε характеризует эксцентриситет гиперболической траектории, по которой движется невозмущенный электрон в поле кулоновского центра. Функция $H_{i\beta}^{(1)}(x)$ — цилиндрическая функция Ханкеля, ρ — прицельный параметр рассеяния.

Единичные векторы вдоль осей x, y представим в виде

$$\mathbf{i}_x = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{2p\sin(\vartheta/2)}, \quad \mathbf{i}_y = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2p\cos(\vartheta/2)},$$

где ϑ — угол рассеяния электрона, т. е. угол между начальным импульсом электрона $\mathbf{p}$ и его конечным импульсом $\mathbf{p}'$. Тогда получим

$$\mathbf{r}_\omega\cdot\mathbf{E} = \frac{E}{2}\left[x_\omega\frac{\cos\theta'-\cos\theta}{\sin(\vartheta/2)} - y_\omega\frac{\cos\theta'+\cos\theta}{\cos(\vartheta/2)}\right].$$

Здесь θ' — угол между конечным импульсом электрона $\mathbf{p}'$ и вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Используя формулы сферической тригонометрии, связывающие друг с другом углы θ, θ' и ϑ, находим

$$\mathbf{r}_\omega\cdot\mathbf{E} = E\left[x_\omega\left(\cos\theta\sin\frac{\vartheta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi\right) - \right.$$
$$\left. - y_\omega\left(\cos\theta\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi\right)\right]. \quad (2)$$

Здесь φ — угол между проекцией вектора $\mathbf{p}'$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{p}$, и линией пересечения этой плоскости с плоскостью векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

Усреднение по углу φ элементарно, и из (1) и (2) получим

$$N_{e,a}(\theta,\vartheta) = \frac{E^2}{4\hbar^2}|x_\omega|^2 \times$$
$$\times\left(\cos^2\theta\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) +$$
$$+\frac{E^2}{4\hbar^2}|y_\omega|^2\left(\cos^2\theta\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\theta\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (3)$$

Угол кулоновского рассеяния электрона ϑ связан с прицельным параметром ρ и эксцентриситетом ε известными простыми соотношениями:

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\rho}{a}, \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Это позволяет свести усреднение вероятности (3) по углу ϑ к интегрированию по прицельному параметру ρ, для чего следует умножить безразмерное выражение (3) на $2\pi n_i p\rho\, d\rho$ и проинтегрировать его по всем прицельным параметрам. Здесь n_i — концентрация кулоновских центров в пространстве, на которых происходит рассеяние данного электрона. Далее от интегрирования по ρ перейдем к интегрированию по ε, используя соотношение $\rho\, d\rho = a^2\varepsilon\, d\varepsilon$.

В результате получаем число вынужденно испущенных (поглощенных) фотонов в единицу времени:

$$N_{e,a}(\theta) = \frac{\pi Z^2 n_i E^2}{2p^3\hbar^2} \times$$
$$\times\int_1^\infty \varepsilon\, d\varepsilon\left\{|x_\omega|^2\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin^2\theta\right] + \right.$$
$$\left. + |y_\omega|^2\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\sin^2\theta + \left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\cos^2\theta\right]\right\}. \quad (4)$$

Приведенные выше фурье-компоненты в пределе $\beta \ll 1$ упрощаются:

$$x_\omega = \frac{2a}{\omega}K_1(\beta\varepsilon), \quad y_\omega = \frac{2ia}{\omega}\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}\, K_0(\beta\varepsilon).$$

Здесь $K_0(x)$, $K_1(x)$ — функции Макдональда.

Подставляя эти значения в (4), вычисляем возникшие интегралы. При этом следует пренебречь частью членов в (4), содержащих малость порядка $\beta \ll 1$. Итак, получаем

$$N_{e,a}(\theta) = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{p\omega^4 \hbar^2} \times \\ \times \left\{ \cos^2\theta \int\limits_\beta^\infty t\,dt\,K_0^2(t) + \frac{1}{2}\int\limits_\beta^\infty t\,dt\,K_1^2(t) + \right. \\ \left. + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\beta^2 \int\limits_\beta^\infty dt\,K_1^2(t)\frac{1}{t} \right\}.$$

Вычисляем безразмерные интегралы с необходимой точностью относительно β:

$$\int\limits_\beta^\infty t\,dt\,K_0^2(t) = \frac{1}{2}, \quad \int\limits_\beta^\infty t\,dt\,K_1^2(t) = \ln\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_\beta^\infty \frac{1}{t}dt\,K_0^2(t) = \frac{1}{2\beta^2}.$$

Здесь $\gamma = 1.781\ldots = \exp C$, $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Получаем

$$N_{e,a}(\theta) = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{p\omega^4 \hbar^2} \times \\ \times \left[\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega} - 1\right)\sin^2\theta\right]. \quad (5)$$

Этот результат является новым и основным в данном разделе. Он дает угловое распределение для поглощения или вынужденного испускания фотона электроном при рассеянии на кулоновском центре в присутствии электромагнитного поля. Так как аргумент логарифма велик, то в основном процесс поглощения или испускания фотона имеет место, когда электрон движется перпендикулярно поляризации поля ($\theta = \pi/2$).

Отдельно взятое поглощение или вынужденное испускание может проявляться косвенным образом, например, в кинетическом уравнении Больцмана при рассмотрении радиационных процессов в плазме. Наибольший интерес, конечно, представляет их разность, которая пропорциональна измеряемому коэффициенту поглощения электромагнитной волны.

Усредняя выражение (5) по углу θ, получим

$$\overline{N}_{e,a} = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{3p\omega^4\hbar^2}\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega}. \quad (6)$$

При возврате от вынужденного излучения к спонтанному следует сделать замену [2]

$$E^2 \to \frac{8\omega^3\hbar\,d\omega}{\pi c^3},$$

и из (6) находим

$$\overline{N}_{e,a} = d\omega\frac{16Z^2 n_i}{3c^3\hbar p\omega}\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega}.$$

Энергия, излученная электроном в единицу времени (она не содержит постоянной Планка), получается из приведенной формулы умножением на $\hbar\omega$:

$$dE_\omega = d\omega\frac{16Z^2 n_i}{3c^3 p}\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega}.$$

Деля это выражение на $n_i p$, получаем в точности выражение (70.21) из книги [7] для эффективного излучения при малых частотах, как и должно быть.

3. КВАНТОВЫЙ ПОДХОД. ПОЛНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В квантовом подходе вероятности поглощения и вынужденного испускания фотона отличны друг от друга. В этом разделе рассматривается более простая задача расчета полной вероятности, проинтегрированной по углу θ между начальным направлением движения электрона и вектором поляризации электромагнитного излучения в предположении, что $\beta = Z\omega/p^3 \ll 1$. Сечение спонтанного излучения фотона электроном с начальным импульсом p и конечным импульсом p' при рассеянии на кулоновском центре с зарядом Z дается известным соотношением квантовой электродинамики [8] (далее всюду полагаем постоянную Планка равной единице):

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi^2 Z^2}{3c^3}\frac{p}{p(p-p')^2} \times \\ \times \frac{d|F(-x)|^2/dx}{[1-\exp(-2\pi\nu')]\,[\exp(2\pi\nu)-1]}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Здесь приняты обозначения

$$\nu = \frac{Z}{p} \gg 1, \quad \nu' = \frac{Z}{p'} \gg 1$$

и введены сокращенные обозначения для полной гипергеометрической функции $F(-x) = F(i\nu, i\nu', 1; -x)$ и ее аргумента

$$x = \frac{4pp'}{(p-p')^2} \gg 1.$$

Переход к вынужденному испусканию происходит путем замены [2]

$$d\omega \to \frac{\pi c^3 E^2}{8\omega^3}\,.$$

Тогда для вероятности вынужденного испускания фотона в единицу времени, усредненной по всем углам, получим компактное выражение

$$\overline{w}_e = n_i p\, d\sigma_\omega = \frac{8\pi^3 Z^2 n_i E^2 p' \exp(-2\pi\nu)}{3(p-p')^2\omega^4} \times \times \frac{d|F(-x)|^2}{dx}\,. \quad (7)$$

Вероятность поглощения фотона в единицу времени дается аналогичной формулой, в которой только надо заменить множитель $\exp(-2\pi\nu)$ на $\exp(-2\pi\nu')$ (см. подробное объяснение этого различия в книге [8] при обсуждении формулы (92.8)).

Гипергеометрическая функция, входящая в указанное выражение, может быть упрощена при условии $x \gg 1$ путем перехода к комбинации гипергеометрических функций с аргументом $1/x \ll 1$:

$$F(i\nu, i\nu', 1; -x) \approx \frac{\Gamma\left(i\left(\nu'-\nu\right)\right)}{\Gamma(i\nu')\Gamma(1-i\nu)} x^{-i\nu} + \frac{\Gamma\left(i\left(\nu-\nu'\right)\right)}{\Gamma(i\nu)\Gamma(1-i\nu')} x^{-i\nu'}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. При этом также использовано условие $\nu'-\nu \ll 1$, эквивалентное приведенному выше условию низкочастотности поля $Z\omega/p^3 \ll 1$.

Дальнейшее упрощение гипергеометрической функции достигается с помощью формулы Стирлинга для гамма-функций больших аргументов ν, $\nu' \gg 1$. Получаем

$$F(i\nu, i\nu', 1; -x) \approx \frac{i}{\pi} x^{-i\overline{\nu}} \exp\left(\pi\overline{\nu}\right) \ln \frac{\sqrt{x}}{\gamma\overline{\nu}}\,. \quad (8)$$

Здесь введено обозначение $\overline{\nu} = (\nu+\nu')/2$. Как и должно быть, асимптотическое представление (8) гипергеометрической функции симметрично относительно перестановки ее первых двух индексов $\nu \leftrightarrow \nu'$.

Поправки в (8) при вычислении вероятности (7) имеют относительную малость $1/\nu^2 \ll 1$, либо $(Z\omega/p^3)^2 \ll 1$. Таким образом, эти поправки не содержат членов линейных по частоте испускаемого фотона ω. Это весьма важно, так как при вычитании вероятности поглощения фотона из вероятности его вынужденного испускания основные части вероятностей взаимно уничтожаются и остаются как раз малые части, линейные по величине ω.

Подставляя (8) в (7), находим для вероятности вынужденного испускания фотона

$$\overline{w}_e = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2 \exp(\pi\nu' - \pi\nu)}{3p\omega^4} \ln \frac{2(pp')^{3/2}}{\gamma Z\omega}. \quad (9)$$

Здесь $p' \approx p - \omega/p$. Разлагая (9) по малой величине $Z\omega/p^3 \ll 1$, получим

$$\overline{w}_e = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{3p\omega^4}\left[\left(1+\frac{\pi Z\omega}{p^3}\right)\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega} - \frac{3\omega}{2p^2}\right]. \quad (10)$$

Аналогичным образом вычисляем вероятность поглощения фотона. Вместо (9) получим выражение, отличающееся только видом показателя экспоненты:

$$\overline{w}_a = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2 \exp(\pi\nu - \pi\nu')}{3p\omega^4} \ln \frac{2(pp')^{3/2}}{\gamma Z\omega}. \quad (11)$$

Теперь $p' \approx p + \omega/p$. Отметим, что здесь исправлена опечатка, допущенная в соответствующем выражении (56) работы [5]. Разлагая (11) по малой величине $Z\omega/p^3 \ll 1$, получим

$$\overline{w}_a = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{3p\omega^4}\left[\left(1+\frac{\pi Z\omega}{p^3}\right)\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega} + \frac{3\omega}{2p^2}\right]. \quad (12)$$

Видно, что в пренебрежении линейными по частоте добавками выражения (10) и (12) совпадают с классическим выражением (6), как и должно быть.

Вычитая (10) из (12), находим разность, определяющую вероятность вынужденного обратного тормозного поглощения в единицу времени, усредненную по всем углам:

$$\overline{w}_T = \overline{w}_a - \overline{w}_e = \frac{2\pi Z^2 n_i E^2}{p^3\omega^3}. \quad (13)$$

Умножая это выражение на частоту ω, получим энергию, поглощаемую электроном в единицу времени. Усредняя эту энергию с распределением Максвелла при некоторой средней температуре T электронов, получим (с логарифмической точностью) среднюю поглощаемую энергию в виде

$$\frac{dU}{dt} = \langle \omega \overline{w}_T \rangle = \frac{2\sqrt{2\pi}\, Z^2 n_i E^2}{3\omega^2 T^{3/2}} \ln \frac{T^{3/2}}{Z\omega}.$$

Так как среднее число столкновений электрона с кулоновскими центрами (ионами) в единицу времени дается известным соотношением кинетической теории плазмы [3, 4]

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}\, n_i Z^2}{3T^{3/2}} \ln\Lambda,$$

где $\Lambda = T^{3/2}/Z\omega$ — кулоновский логарифм (в случае плазмы кулоновский логарифм содержит вместо $Z\omega$ плазменную частоту, см. [4]), то предыдущее выражение может быть переписано в виде

$$\frac{dU}{dt} = \frac{E^2}{2\omega^2}\,\nu_{ei},$$

и, таким образом, величина $E^2/2\omega^2$ представляет собой среднюю энергию, поглощаемую медленным электроном при одном столкновении с кулоновским центром. Вспоминая обсуждение во Введении, можно сделать вывод, что она в точности равна соответствующей энергии для быстрого электрона, а также соответствующей энергии, получаемой из решения классического кинетического уравнения Больцмана для максвелловской плазмы [3, 4].

Этот результат справедлив в высокочастотном пределе $\omega \gg \nu_{ei}$, когда время между двумя последовательными столкновениями электрона с кулоновскими центрами много больше периода колебаний лазерного поля [4]. В противоположном пределе низкой частоты $\omega \ll \nu_{ei}$ в приведенном выражении следует заменить ω на ν_{ei} (см. вычисления в [6]). Тогда получим, что поглощение энергии не зависит от частоты электромагнитного поля и определяется выражением

$$\frac{dU}{dt} = \frac{16}{3\pi}\,\frac{E^2}{\nu_{ei}}.$$

В реальных случаях, например при взаимодействии сверхсильных ультракоротких лазерных импульсов с большими атомарными кластерами, могут реализовываться как высокочастотный, так и низкочастотный пределы по отношению к частоте столкновений свободных электронов с многозарядными ионами внутри кластера.

4. КВАНТОВЫЙ ПОДХОД. УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе, являющемся основным в данной работе, получены вероятности поглощения и вынужденного испускания фотона электроном, рассеивающимся на кулоновском центре в присутствии электромагнитного поля при фиксированном угле θ между начальным направлением импульса электрона $\mathbf{p}$ и вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

Вероятность перехода электрона в единицу времени из начального состояния с импульсом $\mathbf{p}$ в конечное состояние с импульсом $\mathbf{p}'$ в первом порядке теории возмущений по полю электромагнитной волны дается «золотым правилом Ферми»:

$$w(\mathbf{p}\to\mathbf{p}') = \frac{\pi}{2}\int |V(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')|^2 \times \\ \times\,\delta\left(\frac{p'^2}{2} - \frac{p^2}{2} \mp \omega\right) n_i \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \qquad (14)$$

Здесь возмущение имеет вид дипольного взаимодействия электрона с электромагнитным полем:

$$V = E\mathbf{e}\cdot\mathbf{r},$$

$\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации поля, а E — амплитуда его напряженности.

Так как матричный элемент оператора координаты связан с матричным элементом оператора импульса известным соотношением квантовой механики

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}') = i\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')/\omega,$$

то вероятность перехода (14) можно переписать в виде

$$w(\mathbf{p}\to\mathbf{p}') = \frac{E^2 n_i p'}{16\pi^2\omega^2}\int |\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')|^2\, d\Omega_{\mathbf{p}'}.$$

Выражение для матричного элемента оператора импульса приведено в [8]. Получаем (в случае вынужденного испускания)

$$|\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')| = \frac{8\pi^2\sqrt{\nu\nu'}\,\exp(-\pi\nu)}{\omega(p-p')^2}\times \\ \times\left|\frac{i\nu p(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{e}}{1+x}F(-x) + (p'\mathbf{p}\cdot\mathbf{e} - p\mathbf{p}'\cdot\mathbf{e})F'(-x)\right|.$$

Здесь, как и выше,

$$\nu = \frac{Z}{p} \gg 1, \quad \nu' = \frac{Z}{p'} \gg 1.$$

Кроме того, введено новое обозначение

$$x = 2\frac{pp' - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}{(p-p')^2} = \frac{4pp'}{(p-p')^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} > 0.$$

Угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ (угол рассеяния), как и выше, обозначен через ϑ. Расписывая скалярные произведения векторов, получим вероятность вынужденного испускания фотона (14) в виде

$$w_e(\theta) = \frac{4\pi^2E^2n_iZ^2\exp(-2\pi\nu)}{\omega^4p(p-p')^4}\times \\ \times\int\left|\frac{iZ}{1+x}(p'\cos\theta' - p\cos\theta)\,\times \right. \\ \left. \times\; F(-x) + pp'(\cos\theta - \cos\theta')F'(-x)\right|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'}.$$

Здесь в рассмотрение введен угол θ' между векторами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{e}$. Дифференциал телесного угла выразим через дифференциал переменной x:

$$d\Omega_{\mathbf{p}'} = \frac{(p-p')^2}{2pp'}dx\,d\varphi.$$

Выражая угол θ' через θ и ϑ с помощью формул сферической тригонометрии (как и в разд. 2) и интегрируя по углу φ (он определен так же, как и в разд. 2), получим вероятность вынужденного испускания фотона в виде

$$\begin{aligned} w_e(\theta) = \frac{4\pi^3 n_i E^2 Z^2 \exp(-2\pi\nu)}{\omega^4 p^2 p'(p-p')^2} \times \\ \times \int\limits_0^a dx \left\{ \cos^2\theta \left| \frac{iZ}{x}(p'\cos\vartheta - p)F(-x) + \right.\right. \\ \left. + 2pp'\sin^2\frac{\vartheta}{2}F'(-x) \right|^2 + \\ \left. + \frac{p'^2}{2}\sin^2\theta\sin^2\vartheta \left| \frac{iZ}{x}F(-x) - pF'(-x) \right|^2 \right\} = \\ = A\sin^2\theta + B\cos^2\theta. \quad (15)\end{aligned}$$

Здесь

$$a = \frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

В Приложении получено новое асимптотическое представление для полной гипергеометрической функции, адекватное для параметров в рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} F(-x) = F(i\nu, i\nu', 1; -x) \approx \\ \approx \frac{i}{\pi}\exp(\pi\overline{\nu})\, x^{-i\overline{\nu}} K_0\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right). \quad (16)\end{aligned}$$

Здесь, как и выше, $K_0(z)$ — функция Макдональда с нулевым индексом и

$$\overline{\nu} = \frac{\nu + \nu'}{2}.$$

Представление (16) справедливо с относительной точностью $(\nu - \nu')^2 \ll 1$, что позволяет корректно учесть не только главные члены в вероятности (15), но и поправки, линейные по частоте ω, которые и определяют разность вероятностей поглощения и вынужденного испускания фотона.

Обратимся сначала к слагаемому A в (15). Подставляя (16) в (15), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{iZ}{x}F(-x) - pF'(-x) \right|^2 = \frac{p^2\exp(2\pi\overline{\nu})}{(\pi x)^2} \times \\ \times \left[\frac{(\nu'-\nu)^2}{4}K_0^2\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right) + \frac{\overline{\nu}^2}{x}K_1^2\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right) \right].\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (15), легко проверить, что слагаемое с $K_0^2(2\overline{\nu}/\sqrt{x})$ дает малый вклад в вероятность вынужденного испускания фотона, пропорциональный ω^2. Пренебрегая им, получим

$$\begin{aligned} A = \frac{\pi E^2 n_i Z^2 \exp(2\pi\overline{\nu} - 2\pi\nu)}{\omega^4 p}\overline{\nu}^2 \times \\ \times \int\limits_b^\infty dt \left(t - \frac{b^2}{t}\right) K_1^2(\overline{\nu}t).\end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$b = \frac{p-p'}{\sqrt{pp'}} \ll 1.$$

Вычисление интеграла аналогично тому, что проводилось в разд. 2. Получаем

$$A = \frac{\pi E^2 n_i Z^2 \exp(2\pi\overline{\nu} - 2\pi\nu)}{\omega^4 p}\left(\ln\frac{2}{\gamma b\overline{\nu}} - 1\right).$$

Теперь обратимся к расчету B в (15). Подставляя (16) в первое слагаемое в (15), находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{iZ}{x}(p'\cos\vartheta - p)F(-x) + 2pp'\sin^2\frac{\vartheta}{2}F'(-x) \right|^2 = \\ = \left(\frac{pp'}{\pi x}\right)^2 \exp(2\pi\overline{\nu}) \times \\ \times \left[(\nu'-\nu)^2 K_0^2\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right) + (b\overline{\nu})^2 K_1^2\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right) \right].\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (15), находим

$$\begin{aligned} B = \frac{\pi E^2 n_i Z^4 \exp(2\pi\overline{\nu} - 2\pi\nu)}{\omega^4 p^2 p'} \times \\ \times \int\limits_b^\infty dt \left[2tK_0^2(\overline{\nu}t) + \left(\frac{\omega}{pp't}\right)^2 K_1^2(\overline{\nu}t) \right].\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы аналогично тому, как это делалось в разд. 2 (здесь оба интеграла вносят сравнимые друг с другом вклады), получим

$$B = \frac{2\pi E^2 n_i Z^2 \exp(2\pi\overline{\nu} - 2\pi\nu)}{\omega^4 p}.$$

Подставляя полученные результаты в (15) и проводя разложение по $\omega/p^2 \ll 1$ с точностью до линейных по частоте членов, находим вероятность вынужденного испускания фотона в единицу времени:

$$\begin{aligned} w_e(\theta) = \frac{\pi E^2 n_i Z^2}{\omega^4 p}\left(1 + \frac{\pi Z\omega}{p^3}\right) \times \\ \times \left[2\cos^2\theta + \left(\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega} - 1 - \frac{3\omega}{2p^2}\right)\sin^2\theta \right]. \quad (17)\end{aligned}$$

Аналогично находится вероятность поглощения фотона:

$$w_a(\theta) = \frac{\pi E^2 n_i Z^2}{\omega^4 p}\left(1+\frac{\pi Z\omega}{p^3}\right)\times$$
$$\times\left[2\cos^2\theta + \left(\ln\frac{2p^3}{\gamma Z\omega} - 1 + \frac{3\omega}{2p^2}\right)\sin^2\theta\right]. \qquad (18)$$

При усреднении по углу θ получим из (17) и (18) выражения предыдущего раздела соответственно (10) и (12), как и должно быть.

При вычитании (17) из (18) найдем вероятность вынужденного обратного тормозного поглощения в единицу времени:

$$w_T = w_a - w_e = \frac{3\pi E^2 n_i Z^2}{\omega^3 p^3}\sin^2\theta. \qquad (19)$$

Видно, что эта величина всегда положительна, т. е. эффект Маркуза для медленных электронов не реализуется. Усредняя (19) по углу θ, получим выражение (13) предыдущего раздела, как и должно быть.

Из (19) также видно, что вероятность вынужденного обратного тормозного поглощения максимальна, когда начальное направление электрона перпендикулярно поляризации электромагнитного поля.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе нагревания электронной компоненты кластеров в поле мощного лазерного излучения [6, 9, 10].

В заключение отметим, что определенный интерес представляет аналогичная задача, в которой имеется не одно, а два лазерных поля, причем одно из них значительно интенсивнее другого. Соответствующая задача поглощения и усиления слабого электромагнитного поля в кинетической теории плазмы рассматривалась в работе [11].

Автор выражает благодарность М. В. Федорову за ценные советы при выполнении данной работы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 99-02-17810 и № 01-02-16056).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим асимптотическое представление (16) для полной гипергеометрической функции, использованное в данной работе.

Гипергеометрическую функцию $F(i\nu, i\nu', 1; -x)$ с большим аргументом $x \gg 1$ целесообразно сначала разложить по гипергеометрическим функциям с малым аргументом:

$$F(i\nu, i\nu', 1; -x) = \frac{\Gamma\left(i\left(\nu'-\nu\right)\right)}{\Gamma(i\nu')\Gamma(1-i\nu)}x^{-i\nu}\times$$
$$\times F\left(i\nu, i\nu, 1+i(\nu-\nu'); -\frac{1}{x}\right) +$$
$$+\frac{\Gamma\left[i(\nu-\nu')\right]}{\Gamma(i\nu)\Gamma(1-i\nu')}x^{-i\nu'}F\left(i\nu', i\nu', 1+i(\nu'-\nu); -\frac{1}{x}\right).$$

Вводя в рассмотрение, как в разд. 2, малую разность $\Delta\nu = (\nu'-\nu)/2 \ll 1$ и среднее значение $\overline{\nu} = (\nu+\nu')/2$, перепишем это выражение, пренебрегая членами порядка $(\Delta\nu)^2 \ll 1$:

$$F(i\nu, i\nu', 1; -x) = \frac{\exp(\pi\overline{\nu})}{4\pi\Delta\nu}x^{-i\overline{\nu}}\times$$
$$\times\left[\sqrt{\frac{\nu'}{\nu}}\exp\left(-2i\Delta\nu\ln\frac{\gamma\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right)\times\right.$$
$$\times F\left(i\nu, i\nu, 1+i(\nu-\nu'); -\frac{1}{x}\right) -$$
$$-\sqrt{\frac{\nu}{\nu'}}\exp\left(2i\Delta\nu\ln\frac{\gamma\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right)\times$$
$$\left.\times F\left(i\nu', i\nu', 1+i(\nu'-\nu); -\frac{1}{x}\right)\right]. \qquad (\text{П}.1)$$

Теперь рассматриваем каждую из двух новых гипергеометрических функций:

$$F\left(i\nu, i\nu, 1+i(\nu-\nu'); -\frac{1}{x}\right) =$$
$$= 1 + \frac{\nu^2/x}{1!\left[1+i(\nu-\nu')\right]} +$$
$$+\frac{\nu^2(\nu-i)^2/x^2}{2!\left[1+i(\nu-\nu')\right]\left[2+i(\nu-\nu')\right]} + \ldots \qquad (\text{П}.2)$$

При $\nu \gg 1$ в нулевом приближении отсюда получим модифицированную функцию Бесселя

$$F^{(0)}\left(i\nu, i\nu, 1+i(\nu-\nu'); -\frac{1}{x}\right) = I_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right).$$

Поправка первого порядка по $\nu - \nu' \ll 1$ в знаменателе (П.2) дает следующую комбинацию модифицированных функций Бесселя:

$$F^{(1)}\left(i\nu, i\nu, 1+i(\nu-\nu'); -\frac{1}{x}\right) =$$
$$= i(\nu'-\nu)\left[K_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right) + \ln\frac{\gamma\nu}{\sqrt{x}}\, I_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right)\right].$$

Здесь, как и в основном тексте, величина γ представляет собой логарифм константы Эйлера. Поправка следующего порядка по $\nu - \nu' = Z\omega/p^3 \ll 1$ существенна и в сочетании с учтенными членами дает вклад в (П.1), квадратичный по частоте ω. Как и всюду выше, такой поправкой пренебрегаем.

Далее учитываем поправки первого порядка по $1/\nu \ll 1$ в числителе (П.2):

$$F^{(2)}\left(i\nu, i\nu, 1 + i(\nu - \nu'); -\frac{1}{x}\right) = -\frac{i}{x} I_2\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right).$$

Собирая все поправки первого порядка, получаем асимптотическое представление для первой гипергеометрической функции, входящей в (П.1):

$$F\left(i\nu, i\nu, 1 + i(\nu - \nu'); -\frac{1}{x}\right) = \\ = I_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right) - i\frac{\nu}{x} I_2\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right) + \\ + i(\nu - \nu')\left[K_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right) + \ln\frac{\gamma\nu}{\sqrt{x}} I_0\left(\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\right)\right]. \quad (\text{П.3})$$

Вторая гипергеометрическая функция в правой части (П.1) получается из (П.3) перестановкой индексов $\nu \leftrightarrow \nu'$.

Подставляя (П.3) и аналогичную вторую гипергеометрическую функцию в (П.1), после разложений по $\Delta\nu \ll 1$ получим

$$F\left(i\nu, i\nu', 1; -\frac{1}{x}\right) = \frac{\exp(\pi\overline{\nu})}{\pi} x^{-i\overline{\nu}} \times \\ \times \left\{ iK_0(z) + \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{z} I_0(z) - I_1(z) + \frac{z}{2} I_2(z) \ln\frac{2}{\gamma z}\right]\right\}.$$

Здесь $z = 2\overline{\nu}/\sqrt{x}$.

Нас интересуют следующие области аргумента и индексов гипергеометрической функции:

$$x \gg 1, \quad \nu, \nu' \gg 1, \\ |\nu - \nu'| \ll 1, \quad \sqrt{x} \gg \frac{\nu}{\ln \nu}. \quad (\text{П.4})$$

При этом величина $\sqrt{x}$ может быть как больше, так и меньше ν. Действительно, при вычислении интегралов от модифицированных функций Бесселя существенны значения переменной x порядка ν^2.

При выполнении этих условий можно пренебречь модифицированными функциями Бесселя I_0, I_1, I_2 в предыдущем выражении (они имеют малость порядка $1/\nu \ll 1$), и тогда получаем окончательное асимптотическое представление для полной гипергеометрической функции:

$$F\left(i\nu, i\nu', 1; -\frac{1}{x}\right) \approx i\frac{\exp(\pi\overline{\nu})}{\pi} x^{-i\overline{\nu}} K_0\left(\frac{2\overline{\nu}}{\sqrt{x}}\right), \quad (\text{П.5})$$

использованное в основном тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Marcuse, Bell Syst. Techn. J. **41**, 1557 (1962).
2. M. V. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Laser Field*, World Sci., Singapore (1997).
3. В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 2254 (1964).
4. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971), с. 141.
5. V. P. Krainov, J. Phys. B **33**, 1585 (2000).
6. В. П. Крайнов, М. Б. Смирнов, УФН **170**, 969 (2000).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988), с. 240.
8. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989), с. 439.
9. T. Ditmire, T. Donnelly, A. M. Rubenchik et al., Phys. Rev. A **53**, 3379 (1996).
10. J. Zweiback, T. E. Cowan, R. A. Smith et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 3640 (2000).
11. B. N. Chichkov and S. A. Uryupin, Phys. Rev. A **48**, 4659 (1993).