ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 3, стр. 442–451

ОПЕРАТОР КВАЗИЭНЕРГИИ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА В ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОМ КЛАССИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Г. П. Мирошниченко[*], *М. З. Смирнов*

Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет) 197101, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 10 августа 2000 г.

Развита теория возмущений для построения оператора квазиэнергии Q гамильтониана Тависа–Каммингса с включением в него взаимодействия атомов с классическим квазимонохроматическим полем. Оператор Q первого порядка по взаимодействию δ атома с модой резонатора имеет вид обобщенного гамильтониана Тависа–Каммингса (в представлении взаимодействия), в который добавлены противовращающие слагаемые с измененной константой взаимодействия. Такой гамильтониан имеет сингулярную (по безразмерной амплитуде классического поля σ) точку, при приближении к которой его спектр стремится к сплошному, а степень сжатия полевых квадратур (в его собственных состояниях) неограниченно возрастает. Для случая одного атома и бигармонического возмущения оператор Q найден до третьего порядка теории возмущений. Исследована спектральная задача для Q. Особенности зависимости спектра квазиэнергий от σ объясняются наличием эффективного барьера между областями «координатного» пространства. Выяснено, что отмеченная выше критическая точка имеет смысл начала зоны параметрического резонанса. Приведены аналитические выражения для верха и дна этой зоны (на плоскости $\delta\sigma$).

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Ct, 42.50.Hz

1. ВВЕДЕНИЕ

Известная модель Джейнса–Каммингса (ДКМ), описывающая взаимодействие квантованной полевой моды с двухуровневым атомом [1], приобрела особую значимость в связи с прогрессом экспериментальных возможностей в квантовой оптике. Так, успехи резонаторной квантовой электродинамики позволили создать уникальные установки — микромазеры и микролазеры, — работающие на калиброванных, разреженных, охлажденных, специально приготовленных внешним возбуждением атомных пучках [1]. Ряд квантовых эффектов, предсказанных в приближении ДКМ, обнаружен экспериментально. Это коллапсы и восстановления (collapses and revivals) атомной инверсии [1], сжатые (squeezed) состояния света [2], шредингеровские cat-состояния [3], захваченные (trapping) состояния микромазера [4], фоковские состояния квантовой моды [5] и прочие (подробный обзор можно найти, например, в книге [1]).

В последние годы новое применение модели связано с развитием техники лазерного охлаждения атомных пучков и созданием ионных и атомных магнитооптических ловушек. Так, в работе [6] показано, что в присутствии классической бегущей или стоячей волны возникает эффективное взаимодействие координаты центра масс иона, захваченного параболическим потенциалом ловушки, с его внутренними степенями свободы. Такое взаимодействие при определенных условиях (предел Лэмба–Дике) описывается приближением ДКМ. Здесь роль бозонной переменной играет координата центра масс, и поэтому квантовые эффекты, найденные ранее для полевой моды, в этой связи приобретают новый смысл. Так, были предсказаны и обнаружены в экспериментах с ловушками такие неклассические состояния движения иона, как фоковские, шредингеровские cat-состояния, четные и нечетные когерентные состояния и другие (ссылки можно найти в работах [7]).

Отмеченные выше квантовые свойства поля и ионов находят свое применение, например, при проведении неразрушающих измерений [8]. Предметом

[*]E-mail: mirosh@mkk.ifmo.ru

нового направления, названного в [9] инженерией квантовых состояний и основанного на обобщениях ДКМ, является разработка схем генерации и контроля новых неклассических состояний поля и атомов с заданными свойствами. Так, в работах [10, 11] в качестве регулирующего устройства в ДКМ включено классическое поле, параметры которого — длительность и форма серии импульсов в [10], форма и скорость изменения амплитуды в [11] — подбираются должным образом для получения требуемого эффекта.

В данной работе, являющейся продолжением работ [12], предложено еще одно обобщение ДКМ, основанное на включении в гамильтониан классического квазимонохроматического поля, несущая частота которого близка к резонансу с частотой атомного перехода. При определенном выборе периодически изменяющейся огибающей оператор квазиэнергии ДКМ (в первом приближении теории возмущений) имеет вид обобщенного гамильтониана Джейнса–Каммингса, который отличается от обычного (записанного в представлении взаимодействия) добавлением противовращающих слагаемых с измененной константой взаимодействия. Такой оператор имеет ряд необычных свойств, в частности, полевая часть его собственных векторов представляет собой сжатые состояния [13], степень сжатия которых определяется амплитудой и частотой модуляции классического поля.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА КВАЗИЭНЕРГИИ

Метод квазиэнергий применяется для анализа нестационарных квантовомеханических задач с периодическим по времени гамильтонианом

$$H(t) = H(t+T),$$

где T — временной период [14]. В этом методе обобщаются идеи работ, посвященных параметрическому резонансу, взаимодействию «медленных» и «быстрых» движений в линейных и нелинейных системах классической механики [15, 16].

Рассмотрим уравнение Шредингера для оператора развития $U(t)$:

$$i\frac{d}{dt}U(t) = H(t)U(t), \quad U(0) = I, \tag{1}$$

где I — единичный оператор (далее предполагается $\hbar = 1$). Согласно теории Флоке–Ляпунова [15], в силу периодичности оператор развития имеет представление

$$U(t) = u(t)\exp(-iQt). \tag{2}$$

Здесь $u(t) = u(t+T)$ — периодический оператор, Q — не зависящий от времени оператор квазиэнергии, действующий в пространстве состояний квантовомеханической системы. Выбор Q неоднозначен из-за зонной структуры спектра [14], вся информация о спектре содержится в основной зоне Бриллюэна.

Предположим, что в $H(t)$ имеется малый параметр и $H(t)$ разбивается на два слагаемых — гамильтониан нулевого приближения $H_0(t)$ и возмущение $V(t)$:

$$H(t) = H_0(t) + V(t). \tag{3}$$

Допустим, что задача на квазиэнергию для $H_0(t)$ решена, т. е. найдено разбиение невозмущенного оператора развития $U_0(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$H_0(t)U_0(t) = i\frac{d}{dt}U_0(t), \quad U_0(t) = I, \tag{4}$$

на два сомножителя:

$$U_0(t) = u_0(t)\exp(-iQ_0t). \tag{5}$$

Здесь $u_0(t)$ и Q_0 — соответственно периодический оператор развития и оператор квазиэнергии нулевого приближения. Тогда решение задач (1) и (2) можно строить с помощью последовательных приближений, используя метод усреднений Боголюбова–Митропольского (его квантовомеханический аналог) [16]. Для этого перепишем (1), (2) в виде уравнений, определяющих $u(t)$ и Q (периодическое временное представление):

$$H(t)u(t) = i\frac{d}{dt}u(t) + u(t)Q, \tag{6}$$

$$Q = M\left\{u^+(t)\left(H(t) - i\frac{d}{dt}\right)u(t)\right\}, \tag{7}$$

$$u(0) = I. \tag{8}$$

Здесь введено обозначение оператора усреднений по периоду:

$$M\{\Phi(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t)dt.$$

Перейдем в (6)–(8) в новое временное представление — периодическое представление взаимодействия — с помощью оператора $u(t)$:

$$\begin{aligned} &u(t) = u_0(t)W(t), \\ &V_I(t) = u_0^+(t)V(t)u_0(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (4)–(8) получаем уравнения для периодического оператора $W(t)$ и оператора Q:

$$Q_0 W(t) - W(t)Q + V_I(t)W(t) = i\frac{d}{dt}W(t), \tag{10}$$

$$Q = M\left\{W^+(t)\left(Q_0 + V_I(t) - i\frac{d}{dt}\right)W(t)\right\}. \tag{11}$$

Для получения рекуррентной схемы последовательных вычислений удобно решать уравнения (10), (11) при дополнительном условии

$$M\{W(t)\} = I \tag{12}$$

вместо обычного условия $W(0) = I$.

Введем обозначения последовательных приближений для $W(t)$ и Q:

$$W(t) = I + W_1(t) + \ldots, \quad Q = Q_0 + Q_1 + \ldots, \tag{13}$$

подставим ряды в (10)–(12) и получим искомые рекуррентные формулы:

$$Q_n = M\{V_I(t)W_{n-1}(t)\}, \tag{14}$$

$$i\frac{d}{dt}W_n(t) - [Q_0, W_n(t)] = Y_n(t) = \\ = V_I(t)W_{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} W_j(t)Q_{n-j}, \tag{15}$$

$$M\{W_n(t)\} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Сделаем несколько замечаний к изложенной выше процедуре. Отметим символом «волна» решения системы уравнений (14)–(16): $\tilde{W}(t)$ и $\tilde{Q}$. Схема последовательных вычислений замкнута, так как для определения n-го порядка $\tilde{Q}_n$ необходимо знание $n-1$-го порядка $\tilde{W}_{n-1}(t)$, а в уравнение (15) для вычисления $\tilde{W}_n(t)$ входит приближение $\tilde{Q}_n$ и не старше. Дополнительное условие (12), (16) существенно упрощает рекуррентную схему, но найденные при этом решения не обладают свойствами унитарности, $\tilde{W}^{-1}(t) \neq \tilde{W}^+(t)$, и эрмитовости, $\tilde{Q} \neq \tilde{Q}^+$. Для получения окончательного вида операторов Q и $W(t)$ необходимо выполнить следующие преобразования:

$$Q = \tilde{W}(0)\tilde{Q}\tilde{W}^{-1}(0), \tag{17}$$

$$W(t) = \tilde{W}(t)\tilde{W}^{-1}(0). \tag{18}$$

Эти операторы являются решениями уравнений (6)–(9) и обладают требуемыми свойствами.

Для неоднородного уравнения (15) ищется частное периодическое решение, найти которое можно следующим способом. Обозначим $W_n^{(k)}$ оператор k-ой гармоники оператора развития $\tilde{W}_n(t)$, $Y_n^{(k)}$ — оператор k-ой гармоники правой части (15):

$$\tilde{W}_n(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} W_n^{(k)} \exp(ik\Omega t),$$

$$Y_n(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} Y_n^{(k)} \exp(ik\Omega t).$$

Подставим ряды в (15), получим стационарное операторное уравнение для $W_n^{(k)}$:

$$-\Omega k W_n^{(k)} - \left[Q_0, W_n^{(k)}\right] = Y_n^{(k)}, \\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{19}$$

Предполагая решенной задачу на собственные векторы и собственные числа для оператора $Q_0(Q_0|\phi_\alpha\rangle = E_\alpha|\phi_\alpha\rangle)$, получаем решение (19) в виде

$$\langle\phi_\alpha|W_n^{(k)}|\phi_\beta\rangle = \frac{\langle\phi_\alpha|Y_n^{(k)}|\phi_\beta\rangle}{E_{0\beta} - E_{0\alpha} - k\Omega}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что трудность метода может быть связана с появлением малого резонансного знаменателя. Такая возможность всегда возникнет, например, при наличии у Q_0 сплошного спектра. Если в силу каких-либо приближений Q_0 обладает только дискретным спектром, то резонанса можно избежать, изменив Q_0, не меняя разбиение $H(t)$ (3), определяемое, как правило, физическим смыслом задачи. Согласно (5), изменять Q_0 можно одновременно с изменением $u_0(t)$ так, чтобы не изменился $U_0(t)$. Так, к Q_0 можно добавить оператор

$$\sum_\alpha \Omega k(\alpha)|\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|,$$

где $k(\alpha)$ — целочисленная функция от α, имеющий спектр, кратный частоте Ω. Таким образом, спектр Q_0 можно разместить в основной зоне Бриллюэна шириной Ω. Если, к примеру, оператор Q_0 содержит два уровня, то можно выбрать начало зоны так, чтобы расстояние между этими уровнями было меньше половины Ω, и резонансный знаменатель не появится. Назовем такой выбор Q_0 правильным, в этом случае параметром теории является малое отношение

$$|\langle\phi_\alpha|V_I(t)|\phi_\beta\rangle|/\Omega \ll 1.$$

3. ОПЕРАТОР КВАЗИЭНЕРГИИ «ОТКРЫТОЙ» МОДЕЛИ ТАВИСА–КАММИНГСА

Применим метод квазиэнергий к задаче о взаимодействии N двухуровневых атомов с квантованной полевой модой резонатора и с классическим квазимонохроматическим электромагнитным полем. Условия применимости модели Тависа–Каммингса (ТКМ), изложенные в [17], предполагаются выполненными. Далее такая модель именуется «открытой». Гамильтониан рассматриваемой системы $H_s(t)$ имеет вид

$$H_s(t) = \omega_0 S_3 + (g(t)\exp(-i\omega_c t)S_+ + \text{H.c.}) + \\ + \omega a^+ a + \kappa(S_+ a + S_- a^+). \quad (21)$$

Здесь ω_0, ω_c, ω — соответственно часто́ты перехода, несущей гармоники и квантовой моды; H.c. — операция эрмитового сопряжения; $g(t)$ — комплексная «медленная» огибающая взаимодействия атомов с классическим полем; κ — константа взаимодействия атома с квантованной модой; S_3, S_+, S_- — коллективные атомные операторы алгебры $SU(2)$; a, a^+ — фотонные операторы квантовой моды. Далее $g(t)$ предполагается периодичной функцией времени:

$$g(t) = g(t+T).$$

Обозначим $U_s(t)$ оператор развития системы и перейдем в уравнении Шредингера во вращающуюся на несущей частоте ω_c систему отсчета с помощью унитарного оператора $U_R(t)$:

$$U_R(t) = \exp\left\{-i\omega_c(S_3 + a^+a)t\right\}.$$

Гамильтониан задачи $H(t)$ во вращающейся системе становится периодичным с периодом T, что позволяет для поиска оператора развития $U(t)$ во вращающейся системе

$$U(t) = U_R^+(t)U_s(t) \quad (22)$$

применить метод квазиэнергий. Разобьем $H(t)$ на два слагаемых:

$$H(t) = H_0(t) + V(t). \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} &H_0(t) = H_{0at}(t) + H_{0f}(t), \\ &H_{0at}(t) = (\omega_0 - \omega_c)S_3 + (g(t)S_+ + \text{H.c.}), \\ &H_{0f} = (\omega - \omega_c)a^+a, \\ &V(t) = \kappa(a^+S_- + \text{H.c.}). \end{aligned} \quad (24)$$

Параметр взаимодействия κ считается малым по сравнению с частотой $\Omega = 2\pi/T$. Далее, задавшись конкретным видом $g(t)$, последовательно применяя формулы предыдущего раздела, можно построить оператор Q и периодичный оператор $u(t)$ атомно-полевой системы в виде степенного ряда по параметру $\delta = \kappa/\Omega$.

В излагаемой постановке, согласно (24), оператор квазиэнергии нулевого приближения Q_0 (5) имеет вид суммы атомного Q_{0at} и полевого Q_{0f} операторов:

$$Q_0 = Q_{0at} + Q_{0f}, \quad (25)$$

а периодичный оператор нулевого приближения $u_0(t)$ (5) имеет вид произведения:

$$u_0(t) = u_{0at}(t)u_{0f}(t). \quad (26)$$

Уравнения нулевого приближения для $u_{0at}(t)$ и Q_{0at} имеют вид

$$H_{0at}(t)u_{0at}(t) = i\frac{d}{dt}u_{0at}(t) + \\ + u_{0at}(t)Q_{0at}, \quad u_{0at}(0) = I, \quad (27)$$

$$Q_{0at} = M\left\{u_{0at}^+(t)\left(H_{0at}(t) - i\frac{d}{dt}\right)u_{0at}(t)\right\}. \quad (28)$$

Для многоатомного случая и для произвольного $g(t)$ решение этой задачи неизвестно. Задача нулевого порядка на полевую квазиэнергию имеет решение:

$$\begin{aligned} &u_{0f}(t)\exp(-in\Omega a^+at), \\ &Q_{0f} = (\omega - \omega_c - n\Omega)a^+a. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь, ради общности, предполагается, что n квантов с частотой модуляции огибающей Ω примерно равны одному кванту отстройки $\omega - \omega_c$ квантовой моды от несущей частоты. При поиске решения в нулевом приближении следует помнить, как отмечено в конце предыдущего раздела, о правильном выборе периодических операторов $u_{0at}(t)$ и $u_{0f}(t)$.

Особой простотой обладает случай точного резонанса $\omega = \omega_c$ (совпадение частоты несущей гармоники и частоты квантовой моды, при этом никаких дополнительных ограничений на частоту атомного перехода ω_0 не накладывается). В этом случае оператор первого приближения Q_1 представляет собой линейную форму по операторам a и a^+ общего вида:

$$Q_1 = (a + a^+)\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{S} + i(a - a^+)\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{S}. \quad (30)$$

Параметры формы — вещественные векторы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ — являются функциями параметров гамильтониана (21) и могут иметь произвольные длины и направления, $\mathbf{S}$ — векторный атомный оператор обобщенного спина с компонентами S_x, S_y, S_3.

Задача на собственные функции для Q_1 (30) наиболее просто решается при условии перестановочности атомных операторов:

$$[(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{S}), (\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{S})] = i\,(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{S}) = 0. \quad (31)$$

Правая часть (31) равна нулю в трех случаях:

$$\boldsymbol{\mu}=0, \quad \boldsymbol{\nu}=0, \quad \boldsymbol{\mu} \parallel \boldsymbol{\nu}. \tag{32}$$

Это особые случаи. Собственные векторы (30) факторизованы на атомный и полевой сомножители, спектр задачи сплошной. Полевые собственные векторы представляют собой сжатые состояния для одной из полевых квадратур с бесконечной степенью сжатия. Если условия (32) не выполнены, то существует другая возможность: преобразованием сжатия [13] оператор (30) может быть трансформирован к форме гамильтониана Тависа–Каммингса (в представлении взаимодействия, в условиях точного резонанса). Унитарный оператор преобразования имеет вид

$$G=\exp(-i\varphi a^+a)\exp\left\{-\xi(aa-a^+a^+)/2\right\}. \tag{33}$$

Здесь φ, ξ — произвольные вещественные параметры. Оператор Q_1 сохраняет свой вид:

$$Q_1'=G^+Q_1G=(a+a^+)\boldsymbol{\mu}'\cdot\mathbf{S}+i(a-a^+)\boldsymbol{\nu}'\cdot\mathbf{S}.$$

Векторы $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ заменяются на новые $\boldsymbol{\mu}'$ и $\boldsymbol{\nu}'$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}'&=(\boldsymbol{\mu}\cos\varphi+\boldsymbol{\nu}\sin\varphi)\exp\xi,\\ \boldsymbol{\nu}'&=(\boldsymbol{\mu}\sin\varphi-\boldsymbol{\nu}\cos\varphi)\exp(-\xi).\end{aligned} \tag{34}$$

Оператор Q_1' принимает вид гамильтониана Тависа–Каммингса, если параметры φ, ξ связаны так, чтобы одновременно выполнились два условия:

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu}=0, \quad |\boldsymbol{\mu}'|=|\boldsymbol{\nu}'|. \tag{35}$$

Формулы (35) отвечают следующему выбору параметров φ, ξ:

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu}}{|\boldsymbol{\mu}|^2-|\boldsymbol{\nu}|^2}, \tag{36}$$

$$\exp(-4|\xi|)= \\ =\frac{|\boldsymbol{\mu}|^2+|\boldsymbol{\nu}|^2-\sqrt{(|\boldsymbol{\mu}|^2-|\boldsymbol{\nu}|^2)^2+4(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu})^2}}{|\boldsymbol{\mu}|^2+|\boldsymbol{\nu}|^2+\sqrt{(|\boldsymbol{\mu}|^2-|\boldsymbol{\nu}|^2)^2+4(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu})^2}}. \tag{37}$$

Из (34), (36) и (37) получаем

$$|\boldsymbol{\mu}'|=|\boldsymbol{\nu}'|=D=\sqrt{|\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\nu}|}. \tag{38}$$

Направив оси координат по взаимно ортогональным векторам $\boldsymbol{\mu}'$, $\boldsymbol{\nu}'$, получим канонический вид оператора Q_1':

$$Q_1'=D(a^+S_-+aS_+). \tag{39}$$

Здесь сохранены обозначения S_- и S_+ для атомных операторов в новых координатных осях. Собственные функции $|\Psi_{\pm n}\rangle$ и спектр $E_{\pm n}$, $n=0,1,2,\ldots$, (39) известны [18] и для случая одного атома имеют вид

$$E_{\pm n}=\pm D\sqrt{n}, \tag{40}$$

$$|\Psi_{\pm n}\rangle=\left(|n\rangle|{-1/2}\rangle\pm|n-1\rangle|1/2\rangle\right)/\sqrt{2}. \tag{41}$$

Здесь $|n\rangle$ и $|\pm1/2\rangle$ — собственные функции соответственно операторов a^+a и S_3. Из (38), (39) видно, что при приближении параметров задачи к критическим значениям (выполнение условий (32)) расстояние между квазиуровнями стремится к нулю и спектр Q_1 переходит в сплошной. При этом параметр сжатия ξ (37) устремляется к ∞, так что одна квадратура моды становится сильно сжатой, а дисперсия второй квадратуры — очень большой. Собственные функции оператора Q_1 (30), согласно (33), (41), имеют вид

$$|\Psi_{\xi,\pm n}\rangle=\left(|\xi,n\rangle|{-1/2}\rangle\pm|\xi,n-1\rangle|1/2\rangle\right)/\sqrt{2}. \tag{42}$$

Здесь введено обозначение сжатых фоковских состояний:

$$|\xi,n\rangle=G|n\rangle.$$

4. ОПЕРАТОР КВАЗИЭНЕРГИИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

В качестве примера рассмотрим случай бигармонического возмущения, две частоты которого равны $\omega_c\pm\Omega$, а $g(t)$ имеет вид

$$g(t)=F\cos(\Omega t).$$

Для точного резонанса с несущей частотой $\omega_0-\omega_c=0$, $\omega-\omega_c=0$ имеем искомые решения нулевого приближения (25)–(29):

$$Q_{0at}=0, \quad u_{0at}(t)=\exp\left\{-i\Phi(t)S_x\right\},$$

$$\Phi(t)=\sigma\sin(\Omega t),$$

$$Q_{0f}=0, \quad u_{0f}=I, \quad Q_0=0, \quad \sigma=2F/\Omega.$$

Далее параметр σ назван (безразмерной) амплитудой классического поля. Подставив эти решения в (14)–(16), получаем оператор квазиэнергии первого приближения:

$$Q_1=\sqrt{2}\,\kappa\left(pS_x+xS_yJ_0(\sigma)\right). \tag{43}$$

Здесь $J_n(z)$ — функция Бесселя. В приведенных формулах для краткости записи введены полевые операторы (квадратуры)

$$x = \frac{i(a-a^+)}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}.$$

Сравнивая (43) с (30), получаем соотношения для параметров $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \kappa \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\nu} = \kappa \mathbf{e}_y J_0(\sigma).$$

Так как $\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$, угол $\varphi = 0$ (36), а параметры ξ и D определяются соотношениями

$$\exp(2\xi) = J_0(\sigma), \quad D = \kappa\sqrt{J_0(\sigma)}. \qquad (44)$$

Как следует из (38), (39), (44), сингулярная точка, где спектр Q_1 становится сплошным, отвечает нулю функции Бесселя:

$$\sigma = 2F/\Omega = 2.4048\ldots$$

Анализ высших порядков задачи показывает, что оператор Q можно представить в эквивалентной форме Q_E, удобной для вычисления его спектра:

$$Q = LQ_EL^+.$$

Здесь унитарный оператор L и эквивалентный оператор квазиэнергии Q_E, найденные до третьего порядка по κ включительно, имеют вид

$$Q_E = Q_1 + Q_{E3}, \qquad (45)$$

$$Q_{E3} = \sqrt{2}\,\kappa\delta^2\left(xpxS_xF_1(\sigma) - x^3S_yF_2(\sigma)/2\right),$$

$$L = \exp\left(i\sqrt{2}\,\delta xS_3f_1\right)\exp\left\{-i\delta^2(px+xp)S_3f_2\right\},$$

$$\delta = \kappa/\Omega.$$

Параметры f_1, f_2, $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ представляют собой ряды по функциям Бесселя целого индекса от аргумента $\sigma = 2F/\Omega$. Приведем необходимые для последующих вычислений выражения для $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$:

$$F_1(\sigma) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{J_k(\sigma)}{k}\right)^2,$$

$$F_2(\sigma) = 2\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}\frac{J_{2k'+1}(\sigma)J_{2k+1}(\sigma)J_{2k+2k'+2}(\sigma)}{(2k+1)(2k'+1)} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,k'=-\infty\\ k\neq0,k'\neq0\\ k+k'\neq0}}^{\infty}\frac{J_{2k'}(\sigma)J_{2k}(\sigma)J_{2k+2k'}(\sigma)}{2k\cdot 2k'}.$$

Здесь

$$J_k(\sigma) = (-1)^kJ_{-k}(\sigma).$$

Оператор Q_{E3} нелинеен по «координате» x и, следовательно, определяет асимптотику собственных функций оператора Q_E при $|x|\to\infty$. Очевидно, асимптотика может измениться при учете высших порядков теории возмущений. Далее рассмотрены некоторые особенности спектра оператора Q_E как целого, без предположения малости Q_{E3} по отношению к Q_1. Не все результаты такого подхода безупречны в количественном отношении и требуют проверки при помощи численных методов.

Рассмотрим возможность линеаризации Q_E по «координате» x. Нелинейные слагаемые малы, и ими можно пренебречь в области малых $x\approx 0$. Назовем эту область центральной «ямой». Здесь $Q_E\approx Q_1$ (43), его спектральные свойства изучены выше (см. (40)–(42), (44)). В областях больших $|x|$ при значениях амплитуды σ из интервала $0\le\sigma\le 2.4048\ldots$ преобразованием сдвига

$$\exp(ix_0p)x\exp(-ix_0p) = x + x_0$$

оператор Q_E может быть линеаризован при следующем выборе параметра x_0:

$$|x_0| = \sqrt{2J_0(\sigma)/\delta^2F_2(\sigma)}. \qquad (46)$$

Линеаризованный Q_E (обозначение Q_E^{lin}) имеет вид

$$Q_E^{lin} = \sqrt{2}\,\kappa\left(pS_xJ(\sigma) - 2xS_yJ_0(\sigma)\right), \qquad (47)$$

$$J(\sigma) = 1 + 2F_1(\sigma)J_0(\sigma)/F_2(\sigma).$$

Q_E^{lin} определяет квазиэнергетические состояния атомно-полевой системы в областях $x\approx\pm|x_0|$, называемых далее боковыми «ямами»:

$$\begin{aligned}&E_{\pm n}^{lin} = \pm D\sqrt{n}, \quad D = \kappa\sqrt{2J_0(\sigma)J(\sigma)},\\ &|\Psi_{\xi,\pm n}^{x_0}\rangle =\\ &= \left(|x_0,\xi,n\rangle|-1/2\rangle \pm |x_0,\xi,n-1\rangle|1/2\rangle\right)/\sqrt{2}.\end{aligned} \qquad (48)$$

Здесь введено обозначение сдвинутого (когерентного) сжатого фоковского состояния поля:

$$|x_0,\xi,n\rangle = \exp(-ix_0p)G|n\rangle.$$

Параметр сжатия (33), (44) ξ определяется соотношением

$$\exp(-2\xi) = J(\sigma)/2J_0(\sigma).$$

Итак, анализ показывает, что в третьем порядке теории возмущений имеются три области значений x, где квазиэнергетические состояния атомно-полевой системы описываются обобщенным гамильтонианом Джейнса–Каммингса (30). На рис. 1

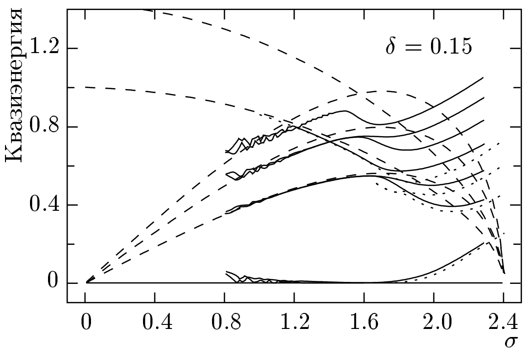

Рис. 1. Уровни оператора квазиэнергии «открытой» ДКМ в бигармоническом поле в зависимости от амплитуды классического поля σ. Штриховые кривые — уровни невзаимодействующих «ям» (метод линеаризации). Сплошные кривые — третий порядок теории возмущений. Пунктирные кривые — расчет с помощью оператора монодромии. $n_{max} = 150$, $\delta = 0.15$

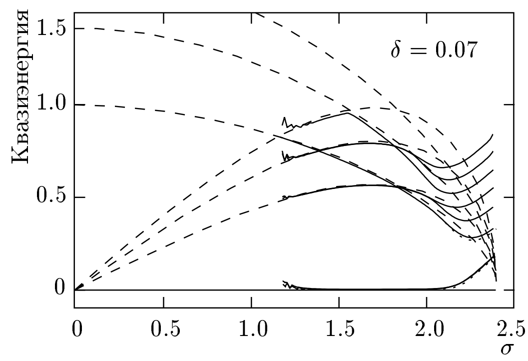

Рис. 2. То же , что и рис. 1, но для $\delta = 0.07$

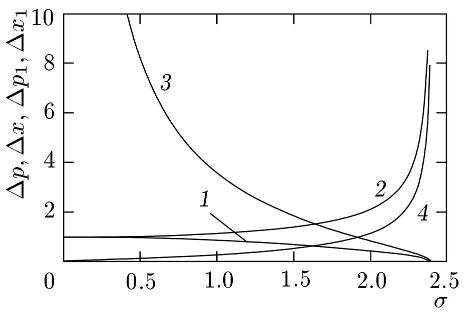

Рис. 3. Амплитуды колебаний по «координате» x и по «импульсу» p для невзаимодействующих центральной $(\Delta x, \Delta p)$ и боковых $(\Delta x_1, \Delta p_1)$ «ям» в зависимости от амплитуды классического поля σ: *1* — Δp, *2* — Δx, *3* — Δp_1, *4* — Δx_1

и 2 представлены графики зависимостей от амплитуды σ (соответственно для $\delta = 0.15$ и $\delta = 0.07$) некоторых квазиэнергетических уровней, полученные тремя методами. Штриховые, монотонно убывающие кривые, сходящиеся в сингулярной точке $\sigma \approx 2.4048\ldots$, дают квазиуровни линеаризованного оператора квазиэнергии в центральной «яме» Q_1 (40), (44). Пучок штриховых кривых, выходящих из точки $\sigma = 0$ и сходящихся в точке $\sigma = 2.4048\ldots$, представляет (дважды вырожденные) квазиуровни Q_E^{lin} (боковые «ямы») (48). Сплошные кривые соответствуют уровням оператора Q_E (45) (третий порядок теории возмущений), полученным с помощью численной диагонализации его матрицы в фоковском базисе. Размерность базиса ограничивалась параметром n_{max} равным 150. Пунктирные кривые изображают квазиуровни точного оператора квазиэнергии Q изучаемой задачи (гамильтониан $H(t)$ (23)), найденного численными методами по известной формуле [15]

$$Q = \frac{i\Omega}{2\pi}\mathrm{Ln}\,(U(T))\,.$$

Здесь $U(T)$ — оператор развития (22) на период T. Размерность матрицы Q также ограничивалась параметром n_{max}. Как следует из рис. 1 и 2, расчет по третьему порядку теории возмущений и точный расчет количественно согласуются друг с другом. Согласие увеличивается с уменьшением параметра теории возмущений δ. Графики квазиуровней, полученные методом линеаризации, имеют качественные отличия от графиков, полученных более точными методами. Это касается прежде всего областей пересечения уровней центральной и боковых «ям». При уточнении расчета пересечения уровней заменяются их антипересечениями. Кроме того, при приближении к сингулярности снимается двойное вырождение уровней боковых «ям».

Для выяснения причины отмеченных различий рассмотрим более детально особенности «движения» поля в окрестностях указанных «ям». На рис. 3 дано сравнение амплитуд колебаний по «координате» x и «импульсу» p для центральной «ямы», Δx и Δp (гамильтониан Q_1 (43)), и для боковых «ям», Δx_1 и Δp_1 (гамильтониан Q_E^{lin} (47)), в зависимости от σ. Оценка показывает, что амплитуды определяются соотношениями

$$\Delta x = \sqrt{1/J_0(\sigma)}\,, \quad \Delta p = 1/\Delta x,$$
$$\Delta x_1 = \sqrt{J(\sigma)/2J_0(\sigma)}\,, \quad \Delta p_1 = 1/\Delta x_1.$$

Как следует из рис. 3, в области $\sigma \approx 0$ сильно сжата квадратура x для колебаний в боковых

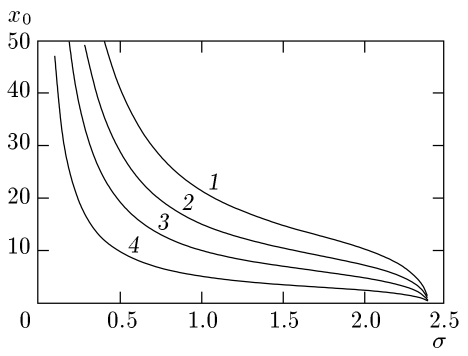

Рис. 4. Параметр смещения x_0 боковых «ям» от центральной в зависимости от амплитуды классического поля σ: $\delta = 0.07$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.15 (*3*), 0.3 (*4*)

«ямах». Вблизи $\sigma \approx 2.4048\ldots$ сильно сжата квадратура p для колебаний в центральной и боковых «ямах». В выбранной системе единиц отсутствию сжатия соответствуют области, где значения амплитуд близки к единице. На рис. 4 приведен график зависимости от σ сдвига боковых «ям» $|x_0|$ (46) при нескольких значениях параметра взаимодействия $\delta = \kappa/\Omega$. Из сравнения рис. 3 и рис. 4 следует, что при достаточно малых значениях δ собственные функции полевой моды в x-представлении сильно локализованы в областях трех «ям»:

$$x \approx 0, \pm|x_0|.$$

Перекрытие «ям» возникает вблизи значения $\sigma \approx 2.4048\ldots$. Боковые «ямы» отделены от центральной барьером, прозрачность B которого определяется параметрами σ и δ:

$$B = \exp\left\{-4J_0(\sigma)x_0^2/3\right\}. \tag{49}$$

С ростом амплитуды σ при фиксированном δ прозрачность барьера возрастает. Квазиэнергетические состояния, локализованные в центральной «яме», становятся квазистационарными с константой распада R, оцениваемой, согласно [19], по формуле

$$R = \kappa\sqrt{J_0(\sigma)}\,B/4\pi.$$

«Ямы» вблизи сингулярной точки начинают взаимодействовать. Это объясняет снятие вырождения квазиуровней.

Ширина барьера (по «координате» x) между центральной и боковыми «ямами» имеет порядок величины сдвига $|x_0|$ (46) и стремится к бесконечности с уменьшением σ. Это обстоятельство существенно влияет на результат численного анализа, так как из-за ограничения размерности фоковского базиса ($n \le n_{max}$) ограничивается и область изменения «координаты» ($0 \le |x| \le x_{max} \approx \sqrt{n_{max}}$). Как следствие, график зависимости от σ любой физической величины, построенный при фиксированном значении параметра обрезания n_{max}, имеет две области, разделенные граничным значением σ_0. Для области $0 \le \sigma \le \sigma_0$ ширина барьера превышает x_{max} и влияние боковых «ям» полностью исключено. Для $\sigma \ge \sigma_0$ боковые «ямы» учитываются в расчете, что приводит к резкой модификации графика при переходе через σ_0. Параметр σ_0 в зависимости от δ определяется соотношением

$$\delta = \frac{J_0(\sigma_0)}{\sqrt{n_{max}F_2(\sigma_0)}}.$$

Так, для рис. 1 имеем $\sigma_0 \approx 0.8$, а для рис. 2 имеем $\sigma_0 \approx 1.2$. Отмеченный эффект проявляется на этих рисунках как неустойчивость вычислений при приближении к σ_0 слева.

Наличие граничного значения σ_0 необходимо учитывать и при численном решении задачи о параметрическом возбуждении квантованной полевой моды резонатора, выполняемом с помощью классического поля с плавно нарастающей от нуля амплитудой. В этом случае неточность, связанная с обрезанием фоковского базиса, может быть устранена, если предположить, что скорость включения на интервале $0 \le \sigma \le \sigma_0$ достаточно велика (скорость включения больше скорости распада R), так что процесс туннелирования не успеет произойти. Другими словами, скорость начального участка огибающей импульса классического поля необходимо согласовывать с параметром обрезания базиса n_{max}. Процесс параметрического возбуждения квантовой моды резонатора классическим полем, амплитуда которого далека от критического значения, носит характер подбарьерного перехода. Зафиксировав прозрачность B (49) барьера на уровне 0.1, получим оценку для нижней границы (дна) $\delta_b(\sigma)$ зоны параметрического возбуждения на плоскости $\delta\sigma$:

$$\delta_b(\sigma) = \sqrt{\frac{8J_0^2(\sigma)}{3F_2(\sigma)\,\mathrm{Ln}\,10}}. \tag{50}$$

Как показывает анализ, правее сингулярной точки $\sigma \ge 2.4048\ldots$ пограничная кривая (верх зоны параметрического возбуждения) $\delta_t(\sigma)$ дается соотношением

$$\delta_t(\sigma) = \sqrt{\frac{4J_0^2(\sigma)}{F_1(\sigma)J_0(\sigma) - 3F_2(\sigma)/2}}. \tag{51}$$

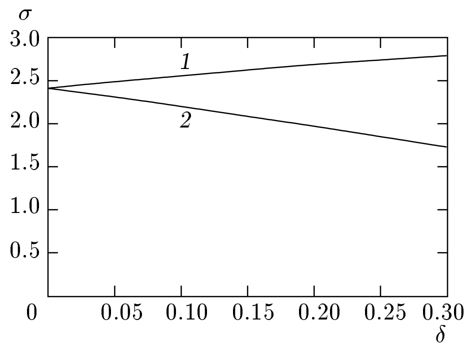

Рис. 5. Зона параметрического резонанса в «открытой» модели ДКМ в бигармоническом поле на плоскости $\delta\sigma$: *1* — верх зоны (формула (48)), *2* — низ зоны (формула (47))

На рис. 5 представлен график зоны параметрического резонанса. Сингулярная точка $\sigma = 2.4048\ldots$ имеет смысл начала зоны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о параметрическом возбуждении квантованной полевой моды полихроматическим квазимонохроматическим классическим полем. Параметрические процессы с участием электромагнитного излучения имеют большое прикладное значение, и им уделяется внимание в литературе, см. [15, 20, 21]. Согласно [21, стр. 303], под параметрическими процессами следует понимать процессы с обменом энергией между колебательными системами, который обусловлен связью через нелинейный недиссипативный элемент. В рассмотренной задаче связь полей — классического и квантового — осуществляется через их взаимодействие с двухуровневыми атомами, помещенными в резонатор. Поля и атомы образуют единую квантовую систему, гамильтониан которой зависит от времени. Предполагается, что он может быть промоделирован гамильтонианом «открытой» ТКМ. В данной работе особое внимание уделено статистическим свойствам состояний квантованной моды, обусловленным рассматриваемым параметрическим процессом.

Развита теория возмущений для построения оператора квазиэнергии Q задачи. В качестве параметра малости δ выбрано отношение константы взаимодействия моды и атома к частоте модуляции амплитуды бигармонического классического поля. Оператор Q найден до третьего порядка по δ включительно. Спектральная задача для Q исследовалась аналитически с помощью линеаризации и численно, путем диагонализации его матрицы. Матрица Q строилась в третьем порядке, а также точно (в усеченном базисе) с помощью найденного численными методами оператора монодромии. Нами исследован предел малых значений параметра δ. Противоположный случай малых частот Ω более прост для анализа и, по-видимому, не представляет особого интереса, так как свойства сжатия квадратур в этом пределе отсутствуют. Вопрос о сходимости построенных рядов теории возмущений остается открытым. Не исключено, что изучаемый оператор квазиэнергии обладает сплошным спектром, а в этом случае ряд может рассматриваться только как асимптотический и, возможно, расходящийся.

Применение метода линеаризации к эквивалентному оператору Q_E (в «координатном» представлении) выявило особенность задачи: наличие эффективного барьера, разделяющего центральную и боковые «ямы». Термином «ямы» названы области изменения «координаты», где применим обобщенный гамильтониан ДКМ Q_1 (30). Полевая часть собственных функций Q_1 имеет интересные статистические свойства, а именно, представляет собой сжатые (по одной из квадратур) полевые состояния квантовой оптики. Степень сжатия можно регулировать, изменяя параметры задачи: амплитуду и частоту модуляции Ω классического поля. Наличие барьера отражается на особенностях спектра Q (эффект туннелирования приводит к взаимодействию «ям», снятию вырождения квазиуровней, замене их пересечения на антипересечение), а также на динамике параметрического возбуждения квантованной полевой моды. Начальный этап возбуждения носит характер подбарьерного перехода, а потому маловероятен. С исчезновением барьера (при увеличении амплитуды классического поля) связано образование зоны параметрического резонанса на плоскости $\delta\sigma$. Временная динамика параметрического процесса требует отдельного изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of quantum optics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, N.Y. (1998).

2. P. Meystre, E. Geneux, A. Quattrapani, and A. Faist, Nuovo Cimento B **25**, 21 (1975).

3. B. Yurke, W. Schleich, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **42**, 1703 (1990).

4. M. Weidinger, B. T. H. Varcoe, R. Heerlein, and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **82**, 3795 (1999).
5. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Opt. Commun. **58**, 327 (1986).
6. C. A. Blockley, D. F. Wolls, and H. Risken, Europhys. Lett. **17**, 509 (1992).
7. Shi-Biao Zheng, Phys. Lett. A **245**, 11 (1998); Xueli Luo, Xiwen Zhu, and Ying Wu, Phys. Lett. A **237**, 354 (1998).
8. A. Sinatra, J. F. Roch, and K. Vigneron, Phys. Rev. A **57**, 2980 (1998).
9. K. Vogel, V. M. Akulin, and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **71**, 1816 (1993).
10. C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **76**, 1055 (1996).
11. A. S. Parkins, P. Marte, and P. Zoller, Phys. Rev. A **51**, 1578 (1995).
12. М. З. Смирнов, ЖЭТФ **85**, 441 (1997); М. З. Смирнов, ЖЭТФ **87**, 260 (1998); M. Z. Smirnov, Quantum Semiclass. Opt. **10**, 765 (1998); M. Z. Smirnov, Phys. Rev. A **52**, 2195 (1995); М. З. Смирнов, Квант. электр. **25**, 871 (1995).
13. H. P. Yuen, Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976).
14. Я. Б. Зельдович, УФН **16**, 427 (1973).
15. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).
16. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
17. M. Tavis and F. W. Cummings, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
18. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
19. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, Наука, Москва (1976).
20. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
21. А. Ярив, *Квантовая электроника и нелинейная оптика*, Наука, Москва (1973).