ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 1, стр. 71–79

СПОНТАННОЕ МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Е. В. Ткаля *

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 августа 2000 г.

В рамках теории возмущений для квантовой электродинамики найдена вероятность спонтанного электромагнитного излучения произвольной мультипольности в неограниченной однородной изотропной непоглощающей конденсированной среде с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями. В моделях реальной и виртуальной полостей вычислено локальное поле внутри сферы для полей произвольной конфигурации в среде.

PACS: 32.30.Jc, 42.50.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Вероятность спонтанного дипольного излучения атомов и молекул зависит от электронных свойств окружающей среды. Экспериментально доказано, что неограниченная однородная непоглощающая диэлектрическая среда, имеющая показатель преломления n на частоте излучения, ускоряет электродипольные ($E1$) переходы примерно в n раз [1, 2], а магнитодипольные ($M1$) — в n^3 раз [1] по сравнению с аналогичными переходами в вакууме.

Установлено также, что в случае $E1$-излучения локальное электрическое поле $\mathbf{E}_{loc}$, воздействующее на излучающий атом, несколько отличается от среднего значения электрической компоненты макроскопического электромагнитного поля в среде, $\mathbf{E}_m$, и связано с ним соотношением $\mathbf{E}_{loc} = f(n)\mathbf{E}_m$. С экспериментальными данными работ [1, 2] хорошо согласуется функция $f(n)$, которая получается в рамках так называемой модели «реальной», или «пустой» полости, детально исследованной в [3]. Вторая популярная модель «виртуальной» полости, или полости Лоренца [4] (подробнее [5, гл. 2]), также имеет определенные экспериментальные обоснования [6]. Достаточно полное описание обоих подходов к проблеме локального поля и соответствующие списки литературы можно найти в [7–10].

*E-mail: tkalya@ibrae.ac.ru

Экспериментальные результаты [1, 2] подтвердили предсказанную еще в работах [3, 11] зависимость вероятности спонтанных дипольных переходов от диэлектрических свойств среды. Различным аспектам данной проблемы, в том числе квантованию электромагнитного поля в поглощающих и непоглощающих диэлектриках, спонтанному распаду возбужденных состояний, диполь-дипольному взаимодействию, коэффициентам Эйнштейна и т. п., в последние годы было посвящено значительное число теоретических публикаций [3, 7–25]. Существенные результаты были получены также при исследовании влияния периодической структуры неограниченного диэлектрика на его оптические свойства. Указанные вещества, получившие название «фотонные кристаллы», подробно описаны в [26–33]. Наконец, в двух работах [34, 35] теоретически изучалось влияние однородной и изотропной диэлектрической среды на вероятность спонтанного ядерного излучения оптического диапазона, возникающего при распаде аномально низколежащего уровня $3/2^+(3.5 \pm 1.0$ эВ) в ядре ^{229}Th.

В однозарядных ионах относительно недавно экспериментально обнаружены оптические переходы $E2$ [36] и даже $E3$ [37, 38]. В связи с этим в настоящей работе выводятся формулы для вероятности излучения произвольной мультипольности в непоглощающей однородной и изотропной среде с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Для моделей реальной и виртуальной полостей в ближней зоне излучения найдена связь среднего поля произвольной конфигурации в среде с локальным полем внутри сферы с диэлектрической и магнитной проницаемостями отличными от ϵ и μ среды. Среда при этом предполагается неограниченной, а расстояние между атомами вещества — существенно меньшим длины волны излучения. Принята система единиц $\hbar = c = 1$.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

Для вычисления вероятностей спонтанного излучения воспользуемся аппаратом теории возмущений для квантовой электродинамики (КЭД), основанном на приближении невзаимодействующих полей.

Элемент S-матрицы первого порядка, соответствующий процессу излучения фотона связанной системой (это может быть атом, ион, молекула, ядро и т. п.), имеет вид

$$S^{(1)} = -i \int H_{int}(t)dt \,, \qquad (1)$$

где $H_{int}(t)$ — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия. Он связан с плотностью функции Лагранжа $\mathcal{L}_{int}(x)$, где $x = (t, \mathbf{r})$, описывающей взаимодействие электронного тока перехода, $j^\nu_{fi}(x)$ с фотонным полем $A_\nu(x)$,

$$\mathcal{L}_{int}(x) = j^\nu_{fi}(x) A_\nu(x) \,, \qquad (2)$$

соотношением (см., например, в [39, 40])

$$H_{int}(t) = -\int \mathcal{L}_{int}(t, \mathbf{r}) d^3 r \,. \qquad (3)$$

Оператор плотности тока в представлении взаимодействия из уравнения (2), когда речь идет о взаимодействии фотона с электроном атома или иона, может быть взят, например, в одночастичном приближении и записан как

$$j^\nu_{fi}(x) = e\bar{\psi}_f(x)\gamma^\nu\psi_i(x),$$

где e — заряд электрона, γ^ν — матрицы Дирака, а $\psi(x)$ — операторы дираковских спиноров. С другой стороны, это может быть и ядерный ток, описывающий некий коллективный переход. В любом случае в нашей задаче $j^\nu_{fi}(x)$ — сторонний ток [41], свойства которого в рассматриваемом приближении слабо зависят от параметров среды.

Операторы электронного и фотонного полей в представлении взаимодействия, $\psi(x)$ и $A_\nu(x)$ из (2), удовлетворяют тем же уравнениям движения и тем же перестановочным соотношениям, что и операторы свободных (не взаимодействующих друг с другом) электронного и фотонного полей в представлении Гейзенберга [39, 40]. Поэтому, чтобы получить уравнение для оператора электромагнитного поля, из которого строится лагранжиан $\mathcal{L}_{int}(x)$ в (2), поступим стандартным образом. Сначала из уравнений Максвелла найдем классическое уравнение движения для вектор-потенциала электромагнитного поля в среде в присутствии сторонних токов и построим лагранжиан системы. Затем, используя формальное совпадение классических уравнений с уравнениями движения для операторов поля в представлении Гейзенберга, получим однородное уравнение для оператора $A_\nu(x)$. Решение указанного уравнения будет зависеть от заданных свойств той области пространства, где распространяется поле. Это могут быть и упоминавшаяся выше периодичность, приводящая к образованию оптической зонной структуры [26, 27], и границы области, когда при определенных соотношениях между длиной волны и размерами области возможны эффекты как резкого замедления распада, так и значительного увеличения вероятности спонтанного излучения [42–44], и какие-то другие эффекты. В настоящей работе нас будет интересовать зависимость $A_\nu(x)$ от ϵ и μ, т. е. от электронных свойств самой среды.

Эволюция вектора состояния системы в представлении взаимодействия определяется S-матрицей. Записанная в общем виде через T-экспоненту [39, 40],

$$S = T \exp\left(i \int \mathcal{L}_{int}(x) d^4 x \right),$$

S-матрица раскладывается в ряд теории возмущений. Элемент S-матрицы первого порядка (1) описывает излучение (или поглощение) фотонов связанной системой.

Вероятность излучения фотона в единицу времени рассчитывается исходя из формулы [45]

$$W = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i, M_f, \lambda} \int \frac{|S^{(1)}|^2}{t} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \qquad (4)$$

где выполнены усреднение по начальным и суммирование по конечным состояниям излучающей системы, а также суммирование по поляризациям и интегрирование по импульсу фотона. В уравнении (4) t — большой, но конечный интервал времени. Он сокращается с аналогичным интервалом времени, возникающим в числителе при расчете $|S^{(1)}|^2$ [45].

Таким образом, электромагнитное поле, изначально связанное в исходных уравнениях движения в представлении Гейзенберга с током перехода, преобразуется в представлении взаимодействия в свободное, т. е. подчиняющееся однородному уравнению движения, поле $A_\nu(x)$. При этом, однако, поле $A_\nu(x)$ несет в себе всю информацию об электронных свойствах среды. Далее, через соотношения (1)–(4) от указанных свойств среды оказывается зависящей и вероятность излучения.

Представленное пояснение является, по-видимому, простейшим по сравнению с уже имеющимися в журнальных публикациях, но вполне достаточным, чтобы зависимость вероятности спонтанного излучения от ϵ и μ стала очевидной еще до вывода каких-либо формул. В том или ином виде такие рассуждения содержатся в первых параграфах практически любого курса по квантовой электродинамике. Именно в рамках приближения невзаимодействующих полей уже в первом порядке теории возмущений для КЭД рассчитываются основные количественные закономерности процесса излучения фотона связанной системой. С другой стороны, давно и хорошо известно, что компоненты свободного электромагнитного поля в конденсированной среде отличаются от компонент поля в вакууме [41]. Поэтому в силу формул (2) и (4) можно заранее ожидать зависимости вероятности излучения от ϵ и μ уже в результате расчета диаграммы первого порядка. Более высокие порядки теории возмущений дадут поправки, важные при изучении разного рода тонких эффектов, но не принципиальные для рассматриваемого случая.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ

Уравнение для векторной части потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$,

$$\Delta\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) - \epsilon\mu\partial_t^2\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = -\mu\mathbf{j}, \tag{5}$$

следует непосредственно из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в однородной среде с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями в присутствии стороннего по отношению к среде тока $\mathbf{j}$ [41]. Для вывода уравнения (5) использовалось стандартное определение электрического поля и магнитной индукции через $A_\nu = (A_0, \mathbf{A})$

$$\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A} - \mathrm{grad}A_0, \quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \tag{6}$$

при условии $A_0 = 0$ и кулоновской калибровке $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$. Здесь электрическая $\mathbf{D}$ и магнитная $\mathbf{B}$ индукции есть $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

Прямым вычислением легко убедиться, что уравнение (5) следует из лагранжиана (см., например, [23])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\epsilon(\partial_t\mathbf{A})^2 - \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2\right] + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}.$$

Слагаемое $\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}$ описывает взаимодействие стороннего тока с электромагнитным полем в среде. В принятой здесь калибровке потенциалов и при отсутствии сторонних зарядов это выражение совпадает с лагранжианом взаимодействия в формуле (2).

Продолжая следовать намеченной выше программе, рассмотрим теперь уравнение для свободного электромагнитного поля в среде. Это — уравнение (5), но без правой части. Классическое решение такого однородного уравнения в виде разложения по плоским волнам квантуется путем замены коэффициентов Фурье операторами рождения $\hat{a}^+_{\mathbf{k},\lambda}$ и уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ фотонов, для которых должны выполняться известные перестановочные соотношения. В результате вектор-потенциал записывается следующим образом:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \\ = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda=1,2}\left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \hat{a}^+_{\mathbf{k},\lambda}\mathbf{A}^*_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right], \tag{7}$$

где функции

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon\omega}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{8}$$

образуют фундаментальный набор решений векторного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9}$$

с дополнительным условием $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$. В уравнении (9) введено обозначение

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2. \tag{10}$$

Импульс $\mathbf{k}$, использовавшийся выше для описания плоских волн, связан с введенным параметром k соотношением $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$, в котором $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$. В уравнении (8) $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}$ — единичный вектор поляризации плоской волны, причем $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} = 0$. В уравнении (7) $\sum_{\lambda=1,2}$ означает суммирование по двум поляризациям фотона. Нормировочный объем взят равным единице.

Множитель $\sqrt{2\pi/\epsilon\omega}$ в плоской волне (8) получается при расчете энергии электромагнитного поля в среде,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})d^3r,$$

с помощью соотношений (6) и классического решения уравнения (5) с равной нулю правой частью.

Волновые функции излучателя в выражении для тока перехода, $j^{\nu}_{fi}(x)$, в формуле (2) представляют собой связанные состояния. Такие волновые функции не являются собственными функциями оператора импульса. Сохраняющееся квантовое число — квадрат углового момента. Поэтому для расчета соответствующих матричных элементов разложим плоскую волну (8) по мультиполям [46]:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon\omega}}\lambda\sum_{Lm}\sqrt{2\pi(2L+1)}i^L \times \\ \times D^L_{m\lambda}(\varphi_{\mathbf{k}}, \vartheta_{\mathbf{k}}, 0)\left[\mathbf{A}^M_{Lm}(k,\mathbf{r}) + i\lambda\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})\right]. \quad (11)$$

Функции $\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}^M_{Lm}(k,\mathbf{r})$ называются соответственно электрическим и магнитным мультиполями и представляют собой вместе с продольным мультиполем $\mathbf{A}^Y_{Lm}(k,\mathbf{r})$ еще один фундаментальный набор решений уравнения (9). В (11) $D^L_{m\lambda}(\varphi_{\mathbf{k}}, \vartheta_{\mathbf{k}}, 0)$ — D-функции Вигнера, $\vartheta_{\mathbf{k}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}}$ — углы, определяющие направление $\mathbf{k}$ в заданной системе координат.

Явный вид полей $\mathbf{A}^{E,M,Y}_{Lm}(k,\mathbf{r})$ известен [46]:

$$\mathbf{A}^M_{Lm}(k,\mathbf{r}) = j_L(kr)\mathbf{Y}_{LL;m}(\mathbf{n_r}), \quad (12)$$

$$\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}j_{L-1}(kr)\mathbf{Y}_{LL-1;m}(\mathbf{n_r}) - \\ - \sqrt{\frac{L}{2L+1}}j_{L+1}(kr)\mathbf{Y}_{LL+1;m}(\mathbf{n_r}), \quad (13)$$

$$\mathbf{A}^Y_{Lm}(k,\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{L}{2L+1}}j_{L-1}(kr)\mathbf{Y}_{LL-1;m}(\mathbf{n_r}) + \\ + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}j_{L+1}(kr)\mathbf{Y}_{LL+1;m}(\mathbf{n_r}). \quad (14)$$

Здесь $j_L(kr)$ — сферические функции Бесселя [47], а $\mathbf{Y}_{JL;m}(\mathbf{n_r})$ — векторные сферические гармоники, определенные соотношением [46]

$$\mathbf{Y}_{JL;m}(\mathbf{n_r}) = \sum_{m'\lambda} C^{Jm}_{Lm'1\lambda} Y_{Lm'}(\mathbf{n_r})\mathbf{e}_\lambda,$$

где $C^{Jm}_{Lm'1\lambda}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, $Y_{Lm}(\mathbf{n_r})$ — сферические функции.

Потенциалы $\mathbf{A}^{E,M}_{Lm}(k,\mathbf{r})$, входящие в разложение плоской волны (11), удовлетворяют условию [46]

$$\mathrm{div}\mathbf{A}^{E,M}_{Lm}(k,\mathbf{r}) = 0.$$

Продольный потенциал $\mathbf{A}^Y_{Lm}(k,\mathbf{r})$ в (14) рассчитывается с помощью градиентной формулы [46] исходя из определения

$$\mathbf{A}^Y_{Lm}(k,\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\mathrm{grad}\left[j_L(kr)Y_{Lm}(\mathbf{n_r})\right]. \quad (15)$$

Поэтому условие поперечности для него не выполняется [46].

В рассматриваемой задаче свойства стороннего тока $j^{\nu}_{fi}(t,\mathbf{r})$ слабо зависят от параметров среды. Поэтому в длинноволновом приближении соответствующие матричные элементы, как будет показано ниже, выражаются через матричные элементы перехода в вакууме. Можно не конкретизировать и природу (атомный, ядерный и т. д.) тока перехода, вызывающего излучение. Важно лишь, что для него, как для электромагнитного тока, выполняется уравнение непрерывности

$$\mathrm{div}\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) = i\omega_{fi}j^0_{fi}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где ω_{fi} — энергия перехода.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА

Гамильтониан взаимодействия для EL-излучения получается из формул (2), (3) путем подстановки в них выражений (7) и (11):

$$H^{EL}_{int}(t) = e^{i(\omega-\omega_{fi})t}\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon\omega}}\sqrt{2\pi(2L+1)}(-i)^{L+1} \times \\ \times \sum_m D^{L^*}_{m\lambda}(\varphi_{\mathbf{k}}, \vartheta_{\mathbf{k}}, 0)\int \mathbf{A}^{E^*}_{Lm}(k,\mathbf{r})\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})d^3r. \quad (17)$$

Используя длинноволновое приближение, $kr \ll \ll 1$, заведомо справедливое в оптической области энергий фотонов, преобразуем часть гамильтониана, стоящую под знаком интеграла в (17). Для этого в выражениях (13), (14) отбросим слагаемые с $j_{L+1}(kr)$, которые малы по сравнению со слагаемыми с $j_{L-1}(kr)$ в силу известного поведения функций Бесселя при $kr \ll 1$ [47]. Учитывая далее формулу (15), для электрического потенциала получим

$$\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) \approx \sqrt{\frac{L+1}{L}}\mathbf{A}^Y_{Lm}(k,\mathbf{r}) = \\ = \sqrt{\frac{L+1}{L}}\frac{1}{k}\mathrm{grad}\left[j_L(kr)Y_{Lm}(\mathbf{n_r})\right]. \quad (18)$$

С помощью (18) и (16) интегрированием по частям рассматриваемую часть гамильтониана легко преобразовать к виду

$$\int \mathbf{A}_{Lm}^{E^*}(k,\mathbf{r})\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})d^3r \approx -i\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{L+1}{L}} \times$$
$$\times \int j_L(kr)Y_{Lm}(\mathbf{n_r})j_{fi}^0(\mathbf{r})d^3r. \quad (19)$$

Далее, разложив функцию Бесселя в (19) [47]

$$j_L(kr) \approx \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!}$$

и подставив полученный результат в (17), найдем связь гамильтониана взаимодействия в среде, $(H_{int}^{EL})_m$, с гамильтонианом взаимодействия в вакууме, $(H_{int}^{EL})_{vac}$. С учетом (10) получаем

$$(H_{int}^{EL})_m = \epsilon^{(L-3)/2}\mu^{(L-1)/2}(H_{int}^{EL})_{vac}.$$

Фазовый объем тоже зависит от ϵ и μ. Выражение d^3k в (4) даст множитель $\epsilon^{3/2}\mu^{3/2}$ по сравнению с аналогичным выражением для вакуума.

Эффект локального поля, о котором говорилось во Введении, учтем формально. Для этого выразим действующее на излучающий объект локальное электрическое поле $(\mathbf{E}_L)_{loc}$ через среднее поле в среде $(\mathbf{E}_L)_m$ с помощью соотношения

$$(\mathbf{E}_L)_{loc} = f_L(\epsilon)(\mathbf{E}_L)_m, \quad (20)$$

не конкретизируя пока явный вид функции $f_L(\epsilon)$, точное выражение для которой будет дано ниже.

Подставим полученные соотношения в (4). Окончательную формулу, связывающую вероятности спонтанного распада с излучением фотона EL-типа в среде и в вакууме, запишем в виде

$$W_m^{EL} = f_L^2(\epsilon)\epsilon^{L-1/2}\mu^{L+1/2}W_{vac}^{EL}. \quad (21)$$

5. ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО ТИПА

Гамильтониан взаимодействия для ML-излучения строится по аналогии с $H_{int}^{EL}(t)$. Проделав соответствующие подстановки, получим

$$H_{int}^{ML}(t) = \exp\left[i(\omega-\omega_{fi})t\right]\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon\omega}}\sqrt{2\pi(2L+1)} \times$$
$$\times \lambda(-i)^L \sum_m D_{m\lambda}^{L^*}(\varphi_\mathbf{k},\vartheta_\mathbf{k},0)\int \mathbf{A}_{Lm}^{M^*}(k,\mathbf{r})\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})d^3r.$$

Используем выражение (12) для вектор-потенциала $\mathbf{A}_{Lm}^M(k,\mathbf{r})$. Разлагая функцию Бесселя $j_L(kr)$ по малому аргументу, найдем связь в длинноволновом приближении между гамильтонианами взаимодействия в среде и в вакууме:

$$(H_{int}^{ML})_m = \epsilon^{(L-1)/2}\mu^{L/2}(H_{int}^{ML})_{vac}.$$

Далее, с помощью формулы (4) для вероятности излучения выразим вероятность спонтанного распада с излучением фотона ML-типа в среде через вероятность излучения в вакууме:

$$W_m^{ML} = f_L^2(\mu)\epsilon^{L+1/2}\mu^{L+3/2}W_{vac}^{ML}. \quad (22)$$

Введенная здесь функция $f_L(\mu)$ для магнитной среды связывает локальное магнитное поле со средним магнитным полем в среде и является полным аналогом функции $f_L(\epsilon)$ для диэлектрика.

Формулы (21) и (22) не симметричны относительно замены $\epsilon \leftrightarrow \mu$ и мультипольностей перехода $E \leftrightarrow M$. Это связано с тем известным фактом, что аналогом напряженности $\mathbf{E}_m$ электрического поля в среде является именно магнитная индукция $\mathbf{B}_m$ [41], а не напряженность $\mathbf{H}_m$ магнитного поля.

Выражение для вероятности спонтанного магнитодипольного излучения, следующее из (22), совпадает с результатом работы [11] и переходит в формулу для $M1$-излучения в диэлектрической среде из [34], но отличается от выражения, полученного в [3]. Причины различия с результатом работы [3], где для диэлектрика была получена зависимость $W_m^{M1}/W_{vac}^{M1} = \epsilon^{1/2}$ вместо необходимого $\epsilon^{3/2}$, подробно обсуждались в [34].

6. ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ В МОДЕЛЯХ РЕАЛЬНОЙ И ВИРТУАЛЬНОЙ ПОЛОСТЕЙ

Локальное поле, т. е. поле действующее в конденсированной среде на излучающий объект, отличается по величине от поля электромагнитной волны, распространяющейся в данной среде [1, 2]. Тема локального поля и его связи с электрическим полем в диэлектрике в той или иной степени затрагивалась или являлась основным предметом рассмотрения во многих теоретических работах [1–5, 7–10, 13–15, 18, 22, 48, 49].

Эффект локального поля в расчетах вероятностей переходов или энергий диполь-дипольных взаимодействий в среде обычно учитывается соотношением (20). Выполненные относительно недавно эксперименты [1, 2] показали, что результатам измерений вероятностей $E1$-переходов в атомах и ионах наилучшим образом соответствует функция

$$f(\epsilon) = 3\epsilon/(2\epsilon+1).$$

Точно такая функция $f(\epsilon)$ получается в рамках модели реальной полости [3, 41]. Для $M1$-перехода в диэлектрике обнаружено, что $f(\epsilon) = 1$ [1]. Результат совершенно естественный: магнитная компонента электромагнитного поля не перенормируется диэлектрической средой. В связи с этим отметим, что функция $f_L(\epsilon)$ для переходов электрического типа не должна зависеть от магнитной проницаемости среды μ. И наоборот, функция $f_L(\mu)$ для переходов магнитного типа не должна зависеть от ϵ.

Итак, предположим, что излучающий объект находится внутри реальной сферической полости малого радиуса, встроенной в диэлектрик. Внутри полости — вакуум. Радиус сферы велик по сравнению с линейными размерами излучающего объекта, но много меньше длины волны излучения.

В модели реальной полости предполагается, что как вне, так и внутри полости существуют электромагнитные поля, подчиняющиеся уравнениям Максвелла и квантующиеся в соответствии с обычными правилами. Решение задачи о величине локального поля дает сшивка соответствующих компонент полей на границе полости и среды. При этом установившееся результирующее поле в среде отличается от имевшегося до образования полости среднего электромагнитного поля (т. е. начальное поле в среде изменяется при образовании полости).

Определим функцию $f_L(\epsilon)$ для излучения электрического типа произвольной мультипольности. Решение уравнения Гельмгольца (9) вне сферической полости запишем в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) + b\mathbf{B}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}),$$

где вектор-потенциал $\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ соответствует начальному невозмущенному полю в среде, а потенциал $\mathbf{B}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ описывает изменение, вносимое малой полостью. Вектор-потенциал $\mathbf{B}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ отличается от $\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ из уравнения (13) заменой сферической функции Бесселя первого рода $j_L(kr)$ на сферическую функцию Неймана, $n_L(kr)$ (она же функция Бесселя второго рода) [47]. Импульс k по-прежнему определяется соотношением (10).

Решение уравнения (9) внутри вакуумной сферической полости будем искать в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = a\mathbf{A}^E_{Lm}(p,\mathbf{r})\,,$$

где импульс фотона $|\mathbf{p}| \equiv p = \omega$.

Электрическое поле мультиполя определяется, согласно (6), как

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(t,k,\mathbf{r}) = -\partial_t \exp(-i\omega t)\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}),$$

что приводит к выражению [46]

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{A}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}). \qquad (23)$$

По условию задачи вся сферическая полость находится в ближней, или статической, зоне излучения. Здесь с учетом соотношений (18) и (23) можно ввести потенциал $\varphi^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ так, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi^E_{Lm}(k,\mathbf{r}).$$

Потенциалы вне и внутри сферической полости запишем в виде

$$\varphi^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = -i\omega\sqrt{\frac{L+1}{L}}\,\frac{1}{k}Y_{Lm}(\mathbf{n_r}) \times \\ \times \left[j_L(kr) + bn_L(kr)\right], \quad r \ge R,$$

$$\varphi^E_{Lm}(p,\mathbf{r}) = -i\omega\sqrt{\frac{L+1}{L}}\,\frac{1}{p}Y_{Lm}(\mathbf{n_r})aj_L(pr), \\ r \le R.$$

Первое уравнение для коэффициентов a и b следует из условия непрерывности потенциала на границе области [41]:

$$\varphi^E_{Lm}(k,R) = \varphi^E_{Lm}(p,R).$$

Разлагая функции Бесселя и Неймана по малому параметру, получим

$$a = (\epsilon\mu)^{(L-1)/2} - \frac{b}{(\omega R)^{2L+1}}\,\frac{(2L-1)!!(2L+1)!!}{(\epsilon\mu)^{(L+2)/2}}. \qquad (24)$$

Помимо потенциала, на границе непрерывна радиальная компонента вектора электрической индукции [41]:

$$(\mathbf{D}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}))_r = \epsilon(\mathbf{E}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}))_r = -\epsilon\partial_r\varphi^E_{Lm}(k,\mathbf{r}).$$

Используя рекуррентные соотношения для производных сферических функций Бесселя [47],

$$(2L+1)\frac{d\phi_L(x)}{dx} = L\phi_{L-1}(x) - (L+1)\phi_{L+1}(x),$$

и пренебрегая $j_{L+1}(x)$ и $n_{L-1}(x)$ по сравнению соответственно с $j_{L-1}(x)$ и $n_{L+1}(x)$, для радиальных компонент векторов электрической индукции будем иметь

$$(\mathbf{D}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}))_r = i\epsilon\omega\sqrt{\frac{L+1}{L}}Y_{Lm}(\mathbf{n_r}) \times \\ \times \left[\frac{L}{2L+1}j_{L-1}(kr) - b\frac{L+1}{2L+1}n_{L+1}(kr)\right], \quad r \ge R, \qquad (25)$$

$$(\mathbf{D}^E_{Lm}(p,\mathbf{r}))_r = i\omega\sqrt{\frac{L+1}{L}}Y_{Lm}(\mathbf{n_r}) \times \\ \times\left[a\frac{L}{2L+1}j_{L-1}(pr)\right], \quad r \le R. \quad (26)$$

Снова прибегая к разложению $j_{L-1}(x)$ и $n_{L+1}(x)$ в (25), (26), получим второе уравнение для коэффициентов a и b:

$$a = \frac{1}{\mu}\left[(\epsilon\mu)^{(L+1)/2} + \\ + \frac{b}{(\omega R)^{2L+1}}\frac{L+1}{L}\frac{(2L-1)!!(2L+1)!!}{(\epsilon\mu)^{L/2}}\right]. \quad (27)$$

Решение уравнений сшивки (24) и (27) дает

$$a = (\epsilon\mu)^{(L-1)/2}\frac{\epsilon(2L+1)}{\epsilon(L+1)+L}. \quad (28)$$

В ближней зоне излучения потенциал и напряженность невозмущенного (т. е. в отсутствие полости) поля в среде имеют вид

$$\tilde{\varphi}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = -i\sqrt{\frac{L+1}{L}}Y_{Lm}(\mathbf{n_r}) \times \\ \times\frac{(\omega r)^L}{(2L+1)!!}(\epsilon\mu)^{(L-1)/2},$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}) = i\omega^L\sqrt{\frac{L+1}{L}}\frac{(\epsilon\mu)^{(L-1)/2}}{(2L+1)!!} \times \\ \times \operatorname{grad}[r^L Y_{Lm}(\mathbf{n_r})]. \quad (29)$$

Сравнивая формулу (29) для $\tilde{\mathbf{E}}^E_{Lm}(k,\mathbf{r})$ с выражением для электрического поля в полости,

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(p,\mathbf{r}) = i\omega^L\sqrt{\frac{L+1}{L}}\frac{a}{(2L+1)!!} \times \\ \times \operatorname{grad}[r^L Y_{Lm}(\mathbf{n_r})],$$

получаем их связь:

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(p,\mathbf{r}) = \frac{a}{(\epsilon\mu)^{(L-1)/2}}\tilde{\mathbf{E}}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}).$$

Отсюда с помощью (28) сразу находим, что

$$\mathbf{E}^E_{Lm}(p,\mathbf{r}) = f_L(\epsilon)\tilde{\mathbf{E}}^E_{Lm}(k,\mathbf{r}),$$

где

$$f_L(\epsilon) = \frac{\epsilon(2L+1)}{\epsilon(L+1)+L}. \quad (30)$$

Поле внутри сферы, $\mathbf{E}^E_{Lm}(p,\mathbf{r})$, очевидно, и есть то локальное поле, которое взаимодействует с током перехода. Легко видеть, что функция $f_1(\epsilon)$ из (30) совпадает с приводившимся в начале данного раздела выражением для $f(\epsilon)$, справедливость которого подтверждена экспериментально [1, 2].

В заключение — одно замечание к выводу формулы (30). При расчете полей использовалась непрерывность потенциала, а не тангенциальных компонент электрического поля на границе среды и области. Это было сделано специально. Задача для диэлектрической сферы в постоянном внешнем электрическом поле разобрана в [41, гл. 2]. Результат (30) можно рассматривать как обобщение указанной задачи на поля произвольной конфигурации. (Действительно, решения (12)–(14) образуют полный набор, и с их помощью моделируется любое поле.) Поэтому ход рассуждений был выбран по возможности близкий к [41]. Отметим также, что если бы сфера была заполнена диэлектрической средой с показателем преломления ϵ', то соотношение (30) приняло бы вид

$$f_L(\epsilon,\epsilon') = \frac{\epsilon(2L+1)}{\epsilon(L+1)+\epsilon' L}.$$

Функция $f_L(\mu)$, связывающая магнитные поля в среде с отличной от единицы величиной магнитной проницаемости μ и в немагнитной сферической реальной полости, рассчитывается аналогично [41] и имеет вид

$$f_L(\mu) = \frac{\mu(2L+1)}{\mu(L+1)+L}. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь кратко модель так называемой виртуальной полости. Ее принципиальное отличие от предыдущей состоит в следующем: образование полости в диэлектрической среде, где уже существует некоторое среднее поле $\mathbf{E}_m$, не приводит к изменению поля $\mathbf{E}_m$ вне полости.

Известны разные рецепты вычисления функции $f_1(\epsilon)$ в рамках модели виртуальной полости [5, 7]. В [5, гл. 2], например, используется метод «дополнительной» конфигурации: поле внутри полости рассчитывается с помощью дополнительного потенциала, создаваемого в вакууме поляризованной диэлектрической сферой. В [5] приведена формула для локального поля для случая однородной поляризации среды $\mathbf{P}_m$:

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_m + (4\pi/3)\mathbf{P}_m.$$

Это выражение легко обобщается методом, описанным в [5], на случай поляризации произвольного вида. В терминах искомой нами функции $f_L^{virt}(\epsilon)$ будем иметь

$$f_L^{virt}(\epsilon) = \frac{\epsilon L + L + 1}{2L+1}.$$

Полученная формула, очевидно, переходит в известное выражение для функции $f_1^{virt}(\epsilon)$ в модели виртуальной полости [7–10].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В атомах, ионах и молекулах преобладают, как известно, $E1$-переходы и, в частности, электродипольное излучение. $M1$-переходы в указанных системах весьма редки. Их изучение требует значительных усилий. Создать же условия для наблюдения, например, $E2$- и $E3$-переходов еще сложнее. Однако такие работы ведутся. В ионах $^{172}\mathrm{Yb}^+$ в 1995 г. удалось наблюдать $E2$-переход с длиной волны 411 нм [36]. Несколько лет спустя уже $E3$-переход с длиной волны 467 нм наблюдался в ионах $^{171,172}\mathrm{Yb}^+$ [37, 38]. Поэтому проверка соотношений (21) и (22) для ширин EL- и ML-переходов, а также формул (30), (31) для функций $f_L(\epsilon)$ и $f_L(\mu)$ представляется делом хотя и весьма непростым, но не безнадежным. Другим перспективным направлением могло бы стать исследование оптических переходов (в том числе спонтанного излучения) в магнитных материалах, в частности, в магнитных диэлектриках.

Мультипольное излучение существует в атомных ядрах. Однако энергии ядерных переходов, как правило, слишком велики, для того чтобы имела место какая-либо зависимость вероятности распада от электронных свойств среды. И все же одно исключение имеется: это — оптический переход в ядре $^{229}\mathrm{Th}$. Энергия изомерного перехода между первым возбужденным уровнем и основным состоянием ядра $^{229}\mathrm{Th}$ лежит в диапазоне 3.5 ± 1.0 эВ [50], а преобладающая мультипольность излучения — $M1$ (вероятность $E2$-излучения меньше примерно на одиннадцать порядков величины). В работах [34, 35] обсуждается возможность обнаружения n^3-зависимости вероятности распада указанного низколежащего изомера $^{229}\mathrm{Th}^m(3/2^+, 3.5 \pm 1.0$ эВ) в диэлектрике $^{229}\mathrm{ThO}_2$. Для двуокиси тория показатель преломления $n = 2$ [51] для фотонов с энергиями $\omega = 3.1$ эВ. Ожидаемый период полураспада изомерного состояния лежит в интервале от 10 мин до 1 ч в зависимости от длины волны [34, 35]. В рамках приближений, использующихся в настоящей работе, какой-то принципиальной разницы по сравнению с излучением атома в прозрачной диэлектрической среде здесь, по-видимому, нет. Тем не менее сравнение локальных полей, действующих на атом и на ядро может дать и неожиданный результат.

Автор благодарит А. О. Барвинского, А. М. Дыхне, А. Н. Жерихина и М. А. Листенгартена за полезные консультации и замечания. Настоящая работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 98-02-16070а) и грантом поддержки Ведущих научных школ (№ 00-15-96651).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. J. A. Rikken and Y. A. R. R. Kessener, Phys. Rev. Lett. **74**, 880 (1995).
2. F. J. P. Schuurmans, D. T. N. de Lang, G. H. Wegdam, R. Sprik, and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **80**, 5077 (1998).
3. R. J. Glauber and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **43**, 467 (1991).
4. Г. Лоренц, *Теория электронов*, Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, Москва (1956).
5. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
6. J. J. Maki, M. S. Malcuit, J. E. Sipe, and R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **67**, 972 (1991).
7. S. M. Barnett, B. Huttner, R. Loudon, and R. Matloob, J. Phys. B **29**, 3763 (1996).
8. P. de Vries and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **81**, 1381 (1998).
9. S. Schell, L. Knöll and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **60**, 4094 (1999).
10. S. Schell, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **60**, 1590 (1999).
11. G. Nienhuis and C. Th. J. Alkemade, Physica C **81**, 181 (1976).
12. L. A. Dissado, J. Phys. C **3**, 94 (1970).
13. E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and R. Bhat, Phys. Rev. Lett. **61**, 2546 (1988).
14. J. Knoester and S. Mukamel, Phys. Rev. A **40**, 7065 (1989).
15. S. M. Barnett, B. Huttner, and R. Loudon, Phys. Rev. Lett. **68**, 3698 (1992).
16. B. Huttner and S. M. Barnett, Phys. Rev. A **46**, 4306 (1992).
17. S. T. Ho and P. Kumar, J. Opt. Soc. Amer. B **10**, 1620 (1993).

18. G. Juzeliūnas and D. L. Andrews, Phys. Rev. A **49**, 8751 (1994).

19. R. Matloob, R. Loudon, S. M. Barnett, and J. Jeffers, Phys. Rev. A **52**, 4823 (1995).

20. T. Gruner and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **53**, 1818 (1996).

21. R. Matloob and R. Loudon, Phys. Rev. A **53**, 4567 (1996).

22. G. Juzeliūnas, Phys. Rev. A **55**, R4015 (1997).

23. A. Tip, Phys. Rev. A **56**, 5022 (1997).

24. H. T. Dung, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **57**, 3931 (1998).

25. S. Schell, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **58**, 700 (1998).

26. E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2058 (1987).

27. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).

28. E. Yablonovitch and T. J. Gmitter, Phys. Rev. Lett. **63**, 1950 (1989).

29. G. Kurizki, Phys. Rev. A **42**, 2915 (1990).

30. E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and K. M. Leung, Phys. Rev. Lett. **67**, 2295 (1991).

31. E. P. Petrov, V. N. Bogomolov, I. I. Kalosha, and S. V. Gaponenko, Phys. Rev. Lett. **81**, 77 (1998).

32. S.-Y. Zhu, Y. Yang, H. Chen, H. Zheng, and M. S. Zubairy, Phys. Rev. Lett. **84**, 2136 (2000).

33. Z.-Y. Li, L.-L. Lin, and Z.-Q. Zhang, Phys. Rev. Lett. **84**, 4341 (2000).

34. Е. В. Ткаля, Письма в ЖЭТФ **71**, 449 (2000).

35. E. V. Tkalya, A. N. Zherikhin, and V. I. Zhudov, Phys. Rev. C **61**, 064308 (2000).

36. P. Gill, H. A. Klein, A. P. Levick, M. Roberts, W. R. C. Rowley, and P. Taylor, Phys. Rev. A **52**, R909 (1995).

37. M. Roberts, P. Taylor, G. P. Barwood, P. Gill, H. A. Klein, and W. R. C. Rowley. Phys. Rev. Lett. **78**, 1876 (1997).

38. M. Roberts, P. Taylor, G. P. Barwood, W. R. C. Rowley, and P. Gill, Phys. Rev. A **62**, 020501(R) (2000).

39. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).

40. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).

41. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

42. E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).

43. P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **50**, 1903 (1983).

44. R. G. Hulet, E. S. Hilfer, and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985).

45. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).

46. И. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействия*, Атомиздат, Москва (1973).

47. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

48. D. L. Dexter, Phys. Rev. **101**, 48 (1956).

49. В. М. Агранович, М. Д. Галанин, *Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах*, Наука, Москва (1978).

50. R. G. Helmer and C. W. Reich, Phys. Rev. C **49**, 1845 (1994).

51. А. И. Свиридова, И. В. Суйковская, Опт. и спектр. **22**, 940 (1967).