ЖЭТФ, 2000, том 118, вып. 4 (10), стр. 877–884

ДИНАМИКА МАГНИТНОГО МОМЕНТА В ПОЛЯРИЗОВАННОМ БОЛЬЦМАНОВСКОМ ГАЗЕ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ

*Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 марта 2000 г.

В работе выводится уравнение динамики спинового магнитного момента в поляризованном больцмановском газе с учетом процессов гибели спина. Используется общий вид T-матрицы столкновений двух частиц со спином 1/2 с учетом неупругих процессов. Показано, что скорость гибели спина зависит от степени поляризации газа. Вследствие этого затухание отклонений магнитного момента от среднего значения становится анизотропным, причем степень анизотропии зависит от величины амплитуды неупругого рассеяния атомов на нулевой угол.

PACS: 34.10.+x

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время среди спин-поляризованных газов особое место занимают пары щелочных металлов (рубидий, цезий) при температурах, близких к комнатной. Эти газы являются хорошими донорами при передаче электронной поляризации атома щелочного металла на ядерный спин He^3, позволяющими получать большие концентрации поляризованного гелия. В свою очередь, поляризованный He^3 является уникальным объектом как для исследования фундаментальных явлений в ядерной физике, так и для медицинских приложений [1, 2]. С нашей точки зрения пары́ щелочных металлов представляют и самостоятельный интерес. Связано это с тем, что в таких газах, которые являются типичными больцмановскими газами, при наличии поляризации возможно распространение слабо затухающих спиновых волн [3]. До сих пор считалось, что в больцмановском газе единственной распространяющейся коллективной модой является звуковая волна. Параметры, характеризующие спектр спиновых волн в больцмановском газе, могут быть выражены через точную матрицу рассеяния атомов. В пара́х щелочных металлов, в отличие от He^3, становятся существенными процессы гибели электронного спина при столкновениях атомов ($\uparrow\uparrow\to\uparrow\downarrow$).

В настоящей работе выводятся уравнения динамики спинового магнитного момента в поляризованном больцмановском газе с учетом процессов гибели спина. Оказалось, что скорость гибели спина зависит от степени поляризации газа. Вследствие этого затухание малых отклонений магнитного момента от среднего значения становится анизотропным, причем степень анизотропии зависит от величины амплитуды неупругого рассеяния атомов на нулевой угол.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ

Интеграл столкновений для матрицы Вигнера удобно записать в следующем инвариантном виде [4]:

$$\begin{aligned}\mathrm{St}\, f(p) = (2\pi)^3\hbar^2\, \mathrm{Tr}_1\langle p| - iTff_1 + iff_1T^+|p\rangle + \\ + (2\pi)^4\hbar^2\, \mathrm{Tr}_1\langle p|Tff_1\Delta(P,E)T^+|p\rangle. \quad (1)\end{aligned}$$

Здесь $f(p)$ — функция Вигнера (матрица в пространстве внутренних состояний частицы), p — импульс частицы (ради краткости зависимость f от координаты x явно не указана), $f_1 = f(p_1)$ (p_1 — импульс налетающей частицы), Tr означает взятие следа по импульсу и квантовым числам внутреннего состояния частицы (Tr_1 относится к налетающей частице),

*E-mail: rubin@sci.lebedev.ru

T — T-матрица рассеяния, «$^+$» — символ эрмитовского сопряжения; используются дираковские обозначения для матричных элементов и, наконец,

$$\Delta(P,E) = \delta(P-P')\delta(E-E'),$$

где P и P' — относительные импульсы сталкивающихся частиц:

$$P = p - p_1, \quad P' = p' - p_1',$$

а $E = P^2/4m$, $E' = {P'}^2/4m$ — соответствующие энергии ($m/2$ — приведенная масса сталкивающихся одинаковых частиц). Произведение ff_1 — это прямое произведение операторов, образующее оператор в пространстве переменных двух частиц, поэтому f и f_1 можно считать коммутирующими. Отметим, что первое слагаемое в правой части формулы (1) содержит интегрирование только по импульсу налетающей частицы p_1, в то время как во втором слагаемом присутствует дополнительное интегрирование по импульсу рассеянной частицы p', поскольку T-матрица является двухчастичным оператором:

$$T_{\alpha\alpha_1\alpha'\alpha_1'}(p-p_1, p'-p_1') = T(\alpha p, \alpha_1 p_1 | \alpha' p', \alpha_1', p_1').$$

Отметим, что формула (1) относится к системе, вырожденной по внутренним квантовым числам, т. е. все уровни энергии E_α одинаковы.

Пусть $\hat{A}$ — оператор, который по отношению к импульсной переменной, как и матрица Вигнера, является умножением, т. е.

$$\hat{A}\psi = A_{\alpha\beta}(p)\psi_\beta(p).$$

(ψ — волновая функция атома). Речь пойдет о среднем значении $\hat{A}$, т. е. о величине

$$A = \langle\langle \hat{A} \rangle\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{A}f).$$

Пользуясь кинетическим уравнением для матрицы Вигнера

$$\frac{df}{dt} = \mathrm{St}\, f(p), \tag{2}$$

получаем уравнение для среднего значения величины A:

$$\frac{d\langle\langle A\rangle\rangle}{dt} = \mathrm{Tr}[A\,\mathrm{St}(f)] = -i(2\pi)^3\hbar^2 \times \times [\hat{\mathrm{Tr}}(ATff_1) - \hat{\mathrm{Tr}}(Aff_1T^+)] + + (2\pi)^4\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}[ATff_1\Delta(P,E)T^+]. \tag{3}$$

Здесь $\hat{\mathrm{Tr}}$ — полный след в совокупности обоих пространств, включая интегрирование по импульсам. При изменении нумерации частиц T-матрица не меняется:

$$T(\xi,\xi_1|\xi',\xi_1') = T(\xi_1,\xi|\xi_1',\xi')$$

($\xi = \{\alpha, p\}$). Поэтому в (1) можно заменить A на A_1 и, тем самым, на

$$\tilde{A} = (A + A_1)/2.$$

Теперь вместо (1) можно написать более симметричную формулу:

$$\frac{d\langle\langle A\rangle\rangle}{dt} = -i(2\pi)^3\hbar^2[\hat{\mathrm{Tr}}(\tilde{A}Tff_1) - \hat{\mathrm{Tr}}(\tilde{A}ff_1T^+)] + + (2\pi)^4\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}[\tilde{A}Tff_1\Delta(P,E)T^+]. \tag{4}$$

Дальнейшее преобразование формулы производится заменой

$$\tilde{A}T = [\tilde{A}, T] + T\tilde{A}$$

(символ $[\,\ldots,\ldots\,]$ обозначает коммутатор) и использованием обобщенной оптической теоремы на энергетической поверхности [5]:

$$T_{gg'} - T^*_{g'g} = -2\pi i \int \delta(E_g - E_h) T_{gh} T^*_{g'h}.$$

Здесь g, g', h — полная совокупность квантовых чисел состояния частиц, включая импульс, звездочка — знак комплексного сопряжения, E_g — полная энергия частицы в состоянии g и предполагается $E_g = E_g'$. В итоге получаем

$$\frac{d\langle\langle A\rangle\rangle}{dt} = -(2\pi)^3\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}(i[\tilde{A},T]ff_1) + + (2\pi)^4\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}\{[\tilde{A},T]ff_1\Delta(P,E)T^+\}. \tag{5}$$

Если $[\tilde{A}, T] = 0$, то обе части равенства (5) равны нулю, что означает неизменность среднего значения величины, сохраняющейся при столкновениях.

На первый взгляд правая часть (3) не обязательно вещественна. Однако совершенно аналогичным преобразованием ее можно привести к виду

$$\frac{d\langle\langle A\rangle\rangle}{dt} = -(2\pi)^3\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}(i[\tilde{A},T^+]ff_1) + + (2\pi)^4\hbar^2\hat{\mathrm{Tr}}\{Tff_1\Delta(P,E)[T^+,\tilde{A}]\}. \tag{6}$$

Полусумма правых частей двух последних равенств представляет собой след эрмитова оператора (оператор $\tilde{A}$ — эрмитов как оператор наблюдаемой величины) и поэтому вещественна. Можно поступить и иначе — просто сразу взять вещественную часть правой части (3) и написать

$$\frac{d\langle\langle A\rangle\rangle}{dt} = (2\pi)^3\hbar^2\ \mathrm{Re}\{\hat{\mathrm{Tr}}(-i[\tilde{A},T]ff_1)\} - \\ -(2\pi)^4\hbar^2\ \mathrm{Im}\left[\hat{\mathrm{Tr}}\{\frac{[\tilde{A},T]}{i}ff_1\Delta(P,E)T^+\}\right]. \quad (7)$$

Поскольку операторы f и A диагональны по импульсу, в первом слагаемом в правой части здесь фигурирует T-матрица рассеяния на нулевой угол.

3. РЕЛАКСАЦИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА В ПОЛЯРИЗОВАННОМ ГАЗЕ

Процесс релаксации магнитного момента в поляризованном газе описывается уравнением (7), в котором в качестве оператора A фигурирует спиновый магнитный момент атома (в единицах $\hbar/2$) $\hat{m} = \sigma$, где σ — вектор матриц Паули. При этом магнитный момент единицы объема газа — это

$$M = \langle\langle f\hat{m}\rangle\rangle \quad (8)$$

(имеется в виду интегрирование по импульсам и суммирование по квантовым числам внутреннего состояния атома). В настоящей работе рассматривается только спиновый момент, т. е. атомы в S-состоянии.

Релаксация магнитного момента при столкновениях атомов со спином $1/2$ определяется релятивистскими взаимодействиями, не сохраняющими спин. Матрица рассеяния T при этом имеет следующий вид [6]:

$$T = T_0 + Q_{ij}\sigma_i^1\sigma_j^2. \quad (9)$$

Здесь T_0 — матрица упругого рассеяния, сохраняющая спин ($[T_0, \hat{m} + \hat{m}_1] = 0$) и

$$Q_{ii} = 0, \quad Q_{ij} = Q_{ji}.$$

Основной вклад в T_0 вносят обычные упругие столкновения с учетом обмена (см. [3]). Строго говоря, сюда же вносят вклад и релятивистские добавки, сохраняющие спин. Единственное не сохраняющее спин слагаемое — это последнее слагаемое в правой части (9).

Структура матрицы Вигнера в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$f(p) = \frac{n_0(p)}{2}[R(p) + S_i(p)\sigma_i],$$

где $n_0(p)$ — максвелловская функция распределения по импульсам с нормировкой

$$\int n_0(p)\,dp = N$$

(N — локальная плотность частиц). В равновесном состоянии в поляризованном газе без учета затухания спина

$$f = f_0 = \frac{n_0(p)}{2}[1 + M_i\sigma_i]. \quad (10)$$

Как обычно, усреднение с помощью $f_0(p)$ должно давать те же результаты, что и точная функция $f(p)$, поэтому

$$R(p) = 1, \quad S(p) = M.$$

Чтобы получить уравнение динамики магнитного момента, нужно найти коммутатор

$$[(\sigma_i^1 + \sigma_i^2)/2, T] = 2iK_{ipq}\sigma_p^1\sigma_q^2, \quad (11)$$

где

$$K_{ijk} = \varepsilon_{is(j}Q_{k)s}. \quad (12)$$

По индексам, окруженным круглыми скобками, подразумевается симметризация. В формуле (11) ради наглядности нумерация частиц изменена: вместо неиндексированной (основной) и первой (возмущающей) частиц здесь фигурируют первая и вторая. Из (11) и (12) следует выражение для первого слагаемого в формуле (7):

$$-i\hat{\mathrm{Tr}}([\tilde{\sigma}_i, T]ff_1) = 2\left\langle\varepsilon_{is(j}Q^0_{k)s}S_jS_k^1\right\rangle. \quad (13)$$

Здесь уже обычная в кинетике нумерация частиц, угловыми скобками обозначено интегрирование по импульсам или, точнее, — след по импульсным переменным, Q^0 означает амплитуду неупругого рассеяния на нулевой угол.

Аналогичным образом вычисляется второе слагаемое, которое имеет вид

$$\mathrm{Im}\left[\hat{\mathrm{Tr}}\{\frac{[\tilde{A},T]}{i}ff_1\Delta(P,E)T^+\}\right] = \\ = -4\,\mathrm{Re}[\langle Q_{qr}(RS_i^1 + R^1S_i)Q_{qr}^*\rangle - \\ - \langle Q_{qr}(RS_r^1 + R^1S_r)Q_{qi}^*\rangle]. \quad (14)$$

Таким образом, полное уравнение релаксации магнитного момента M имеет вид

$$\frac{dM_i}{dt} = 16\pi^3\hbar^2\,\mathrm{Re}\{\left\langle\varepsilon_{is(j}Q^0_{k)s}S_jS_k^1\right\rangle + \\ + 4\pi[\langle Q_{qr}(RS_i^1 + R^1S_i)Q_{qr}^*\rangle - \\ - \langle Q_{qr}(RS_r^1 + R^1S_r)Q_{qi}^*\rangle]\}. \quad (15)$$

Для вычисления функций $R(p,t)$ и $S(P,t)$, определяющих динамику магнитного момента, необходимо использовать кинетическое уравнение (2). При этом функцию $f(p,t)$ удобно представить в виде

$$f = f_0 + \phi, \tag{16}$$

где ϕ — малая добавка к функции f_0, имеющая ту же самую структуру:

$$\phi = \frac{n_0(p)}{2}[\rho(p) + s_i(p)\sigma_i].$$

Уравнение при этом принимает вид

$$\frac{d}{dt}(f_0 + \phi) = \mathrm{St}_0(f_0 + \phi) + \mathrm{st}(f_0).$$

Здесь St_0 — интеграл столкновений, описывающих чисто упругое рассеяние, при котором спин сохраняется (матрица рассеяния T_0), а st — релаксационная часть интеграла столкновений, в которую входит только малая по величине неупругая часть T-матрицы (см. (9)). Вследствие этого обстоятельства под знаком st оставлена только основная часть функции Вигнера f_0.

Оператор $\mathrm{St}_0(f_0+\phi)$ можно представить следующим образом:

$$\mathrm{St}_0(f_0 + \phi) = J(\phi),$$

где $J(\phi)$ — линеаризованный оператор столкновений, поскольку $\mathrm{St}_0(f_0) \equiv 0$. С учетом этого обстоятельства кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}(f_0 + \phi) = J(\phi) + \mathrm{st}(f_0). \tag{17}$$

Напомним, что оператор упругих столкновений J эрмитов при соответствующем определении скалярного произведения (см., например, [3]). Он имеет восьмикратно вырожденное нулевое собственное значение, что соответствует законам сохранения числа частиц, энергии, импульса и спина (по три компоненты). Эти восемь функций образуют линейное пространство, которому принадлежит функция f_0. Разбиение (16) предполагается таким, что функция ϕ ортогональна ядру (нулевому собственному подпространству) оператора J. В итоге уравнение для ϕ принимает вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = J(\phi) + \hat{P}\mathrm{st}(f_0).$$

Здесь $\hat{P}$ — оператор проектирования на подпространство, ортогональное ядру J.

Поскольку релаксация магнитного момента процесс относительно медленный, в последнем уравнении можно пренебречь производной по времени:

$$\phi = -J^{-1}\hat{P}\,\mathrm{st}(f_0).$$

Оператор J^{-1} — это обращение J на подпространстве, ортогональном ядру. Для векторной составляющей ϕ при этом получается

$$s(p) = \mathrm{tr}[-J^{-1}\hat{P}\,\mathrm{st}(f_0)\sigma],$$

где tr — след по спиновым переменным (но не по импульсам).

Оператор упругих столкновений в поляризованном газе J, подробно рассмотренный в работе [3], имеет вид

$$\hat{J}\begin{pmatrix}\rho\\ s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & MJ_3\\ MJ_4 & J_2 + M\times J_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ s\end{pmatrix}.$$

Подробное выражение интегральных операторов J_n ($n = 1,\ldots,5$) через T-матрицу упругого рассеяния приведено в Приложении.

Напомним, что в неполяризованном газе ненулевые собственные значения оператора $\hat{J}$ порядка газокинетических частот столкновений ν_s, хотя и отличаются для скалярной J_1 и векторной J_2 составляющих функции Вигнера. В случае поляризованного газа спектр оператора $\hat{J}$ существенно меняется. Наиболее важное изменение сводится к появлению собственных значений порядка ν_{ex} (оператор J_5) — так называемой «обменной» частоты [3], которая гораздо больше газокинетической частоты ν_s по крайней мере при комнатной температуре.

Векторная часть оператора $\mathrm{st}(f_0)$ имеет вид

$$\mathrm{tr}[\mathrm{st}(f_0)\sigma_i] = A_{ik}M_k + B_{ijk}M_jM_k.$$

Здесь

$$A_{ik}(p) = 128\pi^4\hbar^2\,\mathrm{Re}[Q_{qr}Q^*_{qr}\delta_{ik} - Q_{qk}Q^*_{qi}], \tag{18}$$

$$B_{ijk} = 16\pi^3\hbar^2\,\mathrm{Re}[\varepsilon_{is(j}Q^0_{k)s}]. \tag{19}$$

Тензоры $A_{ik} = A_{ik}(p)$ и $B_{ijk} = B_{ijk}(p)$ выражаются через T-матрицу диссипативного процесса столкновений, не сохраняющих спин (но сохраняющих число частиц) $Q_{pq}\sigma_p\sigma_q$. Тензор A_{ik} пропорционален сечению диссипативного процесса, а тензор B_{ijk} пропорционален вещественной части амплитуды рассеяния на угол 0. Для малой поправки s теперь можно дать оценку:

$$s_\alpha \simeq \sum_\beta \frac{\overline{A}_{\alpha\beta}}{\nu_\alpha}M_\beta + \sum_{\beta\gamma}\frac{\overline{B}_{\alpha\beta\gamma}}{\nu_\alpha}M_\beta M_\gamma. \tag{20}$$

Черта над A и B означает, что соответствующие величины подвергнуты действию оператора $\hat{P}$. Использование греческих индексов в последней формуле означает переход к циклическим компонентам векторов и тензоров, поскольку именно в этом базисе в поляризованном газе диагонализуется оператор упругих столкновений J [3].

Величина ν_α для продольной компоненты имеет порядок газокинетической частоты столкновений ν_s, а для поперечной — это значительно бо̀льшая «обменная» частота $\nu_{ex} = 16\pi^3\hbar^2 n \operatorname{Re} T_0$[1] ($T_0$ — амплитуда упругого рассеяния на нулевой угол). В силу этого обстоятельства $\nu_{ex} \gg \nu_s$, и поэтому учитываются только поправки, включающие величину ν_s [3]. Подставляя выражение (20) в формулу (15), получим затухание магнитного момента:

$$\begin{gathered}
-\dot{M}_\alpha = a_{\tau\beta}\,A_{\alpha\tau}\,M_\beta + A_{\alpha\tau}\,b_{\tau\beta\gamma}\,M_\beta\,M_\gamma + \\
+\,a_{\sigma\kappa}\,a_{\tau\beta}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\beta\,M_\kappa + a_{\sigma\kappa}\,b_{\tau\beta\gamma}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\beta\,M_\gamma\,M_\kappa + \\
+\,a_{\tau\beta}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\beta\,M_\sigma + b_{\tau\beta\gamma}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\beta\,M_\gamma\,M_\sigma + \\
+\,A_{\alpha\tau}\,M_\tau + a_{\sigma\kappa}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\kappa\,M_\tau + B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\sigma\,M_\tau + \\
+\,a_{\tau\beta}\,b_{\sigma\varphi\chi}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\beta\,M_\varphi\,M_\chi + b_{\sigma\varphi\chi}\,B_{\alpha\tau\sigma}\,M_\tau\,M_\varphi\,M_\chi.
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\overline{A}_{\alpha\beta}}{\nu_\alpha}, \quad b_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\overline{B}_{\alpha\beta\gamma}}{\nu_\alpha}.$$

При этом

$$M = \int n_0(p) S(p)\, dp = \int n_0(p)\,[S_0 + s(p)]\, dp.$$

Из соображений симметрии следует, что формула (21) может содержать только нечетные степени компонент вектора магнитного момента M_α. Следовательно, скорость затухания магнитного момента может быть представлена формулой

$$\dot{M}_\alpha = -\gamma(M) M_\alpha. \tag{22}$$

Здесь $\gamma(M)$ может быть представлена в виде

$$\gamma(M) = A(1+a) + (bB + abB)M^2 = \gamma_0 + \gamma_1(M), \tag{23}$$

где

$$\gamma^0\ (\text{c}^{-1}) = A(1+a), \quad \gamma_1(M) = (bB + abB)M^2.$$

Величина $\gamma_0 \sim A$ (c^{-1}) определяет затухание магнитного момента в неполяризованном газе и пропорциональна сечению соответствующего процесса (см. (14)). Малый параметр a учитывает влияние упругих столкновений на процесс релаксации спина и по порядку величины равен

$$a \sim \frac{A}{\nu_s} \ll 1.$$

Он представляет собой отношение сечений неупругого и упругого рассеяний. Далее, снова по порядку величины,

$$\gamma_1 \sim bBM^2 \sim \gamma_n^0 \frac{\gamma_n^0}{\nu_s},$$

где величина $\gamma_n^0 (\text{c}^{-1}) \sim C|M| \operatorname{Re} Q^0$ (Q^0 — неупругая часть T-матрицы при рассеянии на нулевой угол). Здесь C — константа размерности частоты, определяемая первым слагаемым в правой части уравнения (15). Поскольку $a \ll 1$, второе слагаемое в формуле (23) можно заменить просто на bBM^2 и при этом

$$\gamma_1 \sim bBM^2 \sim \gamma_n^0 \frac{\gamma_n^0}{\nu_s}. \tag{24}$$

Для малого отклонения магнитного момента m от стационарного среднего значения M^0 имеет место следующее уравнение:

$$\frac{dm_i}{dt} = -(\gamma_0 + \gamma_1) m_i - 2\gamma_1 \frac{M_i^0 M_k^0}{M_0^2} m_k. \tag{25}$$

Как видно из уравнения (25), скорость релаксации продольных компонент магнитного момента отличается от поперечных в $(\gamma_0 + 3\gamma_1)/(\gamma_0 + \gamma_1)$ раз за счет второго слагаемого в правой части формулы.

4. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

Динамика магнитного момента в поляризованном больцмановском газе при учете только упругих столкновений подробно рассматривалась в нашей предыдущей работе [3]. Из полученных там микроскопических уравнений с учетом результатов настоящей работы, учитывающих неупругие процессы, можно написать полное макроскопическое уравнение динамики магнитного момента:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_0 \frac{\partial M_i}{\partial x_j}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_1 M_i \frac{\partial M^2}{\partial x_j}\right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[D_2\, \varepsilon_{ikl} M_l \frac{\partial M_k}{\partial x_j}\right] = -\gamma(M) M_i.
\end{gathered} \tag{26}$$

Микроскопические выражения для коэффициентов D_0, D_1, D_2 могут быть найдены путем сопоставления решений линеаризованного уравнения (26)

[1] Здесь в отличие от предыдущих работ [3] в определение ν_{ex} не вносится множитель $|M|$.

с аналогичными решениями, полученными с помощью кинетического уравнения [3]. При этом получается

$$D_0 = \mathrm{Re} \left\langle f_+ | \hat{v} J_+^{-1} \hat{v} | f_+ \right\rangle, \tag{27}$$

$$D_2 = \frac{\mathrm{Im} \left\langle f_+ | \hat{v} J_+^{-1} \hat{v} | f_+ \right\rangle}{M}, \tag{28}$$

$$D_1 = \frac{\left\langle f_{||} | \hat{v} \hat{J}_{||}^{-1} \hat{v} | f_{||} \right\rangle - D_0}{M^2}. \tag{29}$$

Здесь

$$\hat{J}_{||} \begin{pmatrix} \rho \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & MJ_3 \\ MJ_4 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ s \end{pmatrix},$$

$$J_\pm = U_\pm (J_2 + M \times J_5) U_\pm^{-1} = J_2 \mp iMJ_5,$$

где U — оператор преобразования от декартовых компонент вектора s к циклическим. Операторы $J_\pm$ действуют в векторном подпространстве функций Вигнера, где они диагональны по отношению к циклическим компонентам s, и подразумевается, что J_2 и J_5 действуют на циклические компоненты векторов так же, как и на исходные декартовы (см. Приложение); $\hat{v}$ — умножение на скорость частицы (рассматриваемое как оператор); $\langle f_+|$ и $\langle f_{||}|$ — собственные функции поперечной и продольной составляющих магнитного момента (подробнее см. [3]). Формулы (27)–(29) в принципе решают вопрос о микроскопическом вычислении коэффициентов диффузии в поляризованном больцмановском газе.

Приведем оценки коэффициентов D_0 и D_2, пользуясь их микроскопическими представлениями (27), (28) и полученными ранее оценками [3]:

$$D_0 \simeq \frac{D}{1 + M^2 (\nu_{ex}/\nu_s)^2}, \tag{30}$$

$$D_2 \simeq \frac{D(\nu_{ex}/\nu_s)}{1 + M^2 (\nu_{ex}/\nu_s)^2}. \tag{31}$$

Здесь $D = (kv)^2/\nu_s$ — коэффициент диффузии спина в неполяризованном газе.

Из общего уравнения (26) нетрудно получить линеаризованное уравнение динамики малых возмущений магнитного момента $m_\alpha = M_\alpha - \langle M_\alpha \rangle$ (эти компоненты удобнее рассматривать в циклических координатах):

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial t} + D_{\alpha\beta} \Delta m_\beta = -\gamma_{\alpha\beta} m_\beta. \tag{32}$$

В этом базисе тензоры D и γ диагональны. При этом

$$D_{00} = D_0 + D_1 M^2 \simeq D(1 + cM^2),$$

$$D_\pm = D_0 \pm iMD_2 \simeq D \frac{1 \mp iM(\nu_{ex}/\nu_s)}{1 + M^2(\nu_{ex}/\nu_s)^2}.$$

Здесь D — коэффициент диффузии в неполяризованном газе, по порядку величины он равен $\langle v^2 \rangle / 3\nu_s$, c — безразмерная константа. Как было показано ранее,

$$\nu_{ex}/\nu_s \sim |U| a_0 / \hbar \langle v \rangle \gg 1,$$

поскольку множитель $|U| a_0 / \hbar \langle v \rangle$ представляет собой так называемый «борновский параметр» [3], который в классических газах обычно велик. Оценка величин $D_\pm$ и D_{00} при не слишком малых $|M|$ дает [3]

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{Re}\, D_\pm}{D_{00}} \simeq \left(\frac{\nu_s}{\nu_{ex}} \right)^2 \frac{1}{M^2} \ll 1, \\ \mathrm{Im}\, D_\pm \simeq \pm \frac{(kv)^2}{3\nu_{ex}|M|}. \end{gathered} \tag{33}$$

Полученные результаты приводят к хорошо известному дисперсионному соотношению для спиновых волн. Частоту и затухание спиновых волн определяют соответственно мнимая и вещественная части $D_\pm$.

Для тензора γ имеет место

$$\gamma_\pm = \gamma_0 + \gamma_1, \quad \gamma_{00} = \gamma_0 + 3\gamma_1. \tag{34}$$

Отметим, что частоты γ_0 и γ_1 много меньше газокинетической частоты столкновений ν_s, но соотношение их друг с другом может быть произвольным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Операторная запись интеграла столкновений с использованием обобщенной оптической теоремы (уравнение (7)) позволила получить универсальное уравнение для диссипации магнитного момента вырожденных систем: используется общий вид T-матрицы для столкновения двух частиц со спином 1/2 с учетом неупругих процессов [6]. Уравнение в явном виде содержит только неупругую часть T-матрицы, поскольку ее упругая часть T_0 коммутирует с оператором спина. Тем не менее роль упругих процессов в релаксации спина не теряется, а проявляется благодаря их влиянию на неравновесную функцию распределения частиц по скоростям.

Основным результатом работы является уравнение динамики макроскопического магнитного момента в поляризованном газе с учетом релаксации спина (7). Левая часть уравнения по форме совпадает с уравнением Леггетта [7], а правая описывает затухание магнитного момента. Для коэффициентов D_0, D_1 и D_2 в левой части уравнения найдены микроскопические выражения, содержащие элементы T-матрицы упругого рассеяния (27)–(29), тогда как в работе Леггетта эти коэффициенты носят феноменологический характер. Микроскопические выражения для коэффициентов диффузии в газах, полученные в работе [8], отличаются от (27)–(29), что связано с различиями в используемой форме интеграла столкновений (в [8] используется s-рассеяние). Тем не менее при соответствующей замене параметров: $\mu \to \nu_{ex}/\nu_s$ (Леггетт) и $\Omega_{int}\,\tau_\perp \to \nu_{ex}/\nu_s$ [8], спектр спиновых волн во всех трех случаях совпадает.

В работе [9] также использован микроскопический подход к вычислению коэффициентов диффузии и динамике спина в квантовых газах при произвольной T-матрице. Однако полученные в [9] оценки коэффициентов диффузии в больцмановском пределе не согласуются с результатами настоящей работы (см. (27) – (29)). В частности, наше условие $\nu_{ex}/\nu_s \gg 1$, определяющее возможность распространения спиновых волн в больцмановском газе, сводится в работе [9] к условию «квантовости» газа (де-бройлевская длина волны много больше длины рассеяния), что делает распространение спиновых волн в больцмановском газе невозможным. Более подробное сопоставление результатов настоящей работы с [9] требует отдельного рассмотрения.

Отметим, что скорость затухания магнитного момента γ в поляризованном газе зависит от его величины. Это обстоятельство является следствием отклонения матрицы Вигнера от равновесной (диагональной) в результате неупругих столкновений, нарушающих сохранение спина. Возмущенная матрица Вигнера, вообще говоря, недиагональна по спиновым переменным, вследствие чего скорость релаксации $\gamma(M)$ зависит не только от сечения диссипативного процесса, но и от вещественной части амплитуды рассеяния на нулевой угол — обстоятельство, которое невозможно в чисто балансной форме уравнения Больцмана. Затухание малых возмущений магнитного момента в поляризованном газе анизотропно, как было впервые отмечено Снайдером [10]. В связи с этим представляется возможным объяснить отмеченное ранее расхождение (примерно на порядок) между наблюдаемой скоростью релаксации магнитного момента в пара́х поляризованного Rb и расчетом соответствующего сечения релаксации [2]: $\sigma \sim 10^{-17}$ см^2 согласно [1, 11] (эксперимент), $\sigma \le 10^{-18}$ см^2 согласно [12] (расчет).

Как было показано выше, описание релаксации магнитного момента только с помощью сечения, вообще говоря, недостаточно, поскольку скорость как продольной, так и поперечной релаксаций момента зависит не только от сечения, но и от вещественной части амплитуды неупругого рассеяния на нулевой угол (34), причем соотношение между ними (γ_0 и γ_1) априори неизвестно и может быть определено экспериментально по соотношению скоростей затухания поляризации в продольном и поперечном направлениях относительно вектора поляризации газа. Отметим, что анизотропия коэффициентов диффузии в поляризованном больцмановском газе может быть очень велика (см. (33)), а анизотропия коэффициента затухания поляризации меняется в пределах 1–3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16304).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Операторы J_n $(n = 1, \ldots, 5)$ имеют следующий вид [3]:

$$J_1(\rho) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp'_1 W(p, p_1|p', p'_1) \times \\ \times A_0 \left[\rho(p') + \rho(p'_1) - \rho(p) - \rho(p_1)\right],$$

$$J_2(s) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp'_1 W(p, p_1|p', p'_1) \times \\ \times \left[A_1 s(p'_1) + A_2\, s(p') - A_3\, s(p_1) - A_0\, s(p)\right],$$

$$J_3(s) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp'_1 W(p, p_1|p', p'_1) \times \\ \times A_3 M \left[s(p') + s(p'_1) - s(p) - s(p_1)\right],$$

$$J_4(\rho) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp'_1 W(p, p_1|p', p'_1) \times \\ \times M \left[A_1\rho(p') + A_2\rho(p'_1) - A_0\rho(p_1) - A_3\rho(p)\right],$$

$$J_5(s) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp'_1 W(p, p_1|p', p'_1) \times \\ \times A_4 \left[s(p'_1) - s(p')\right] + 16\pi^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p) f^{(0)}(p_1) \times$$

$$\times \mathrm{Re}\left[t_1\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right)-t_2\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right)\right]\times \\ \times\left[s(p)-s(p_1)\right].$$

Здесь

$$W(p,p_1|p',p_1') = f^{(0)}(p_1)\delta(p+p_1-p'-p_1')\times \\ \times\delta\left[(p-p_1)^2/4m-(p'-p_1')^2/4m\right],$$

а коэффициенты $A_0 - A_4$, t_1 и t_2 выражаются непосредственно через элементы T-матрицы упругого рассеяния [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. M. E. Wagshui and T. E. Chupp, Phys. Rev. A **49**, 3854 (1994).
2. N. N. Kolachevsky, A. A. Papchenko, Yu. V. Procofichev, V. R. Skoy, I. I. Sobelman, and V. N. Sorokin, Preprint FIAN №39, Moscow (1999). Yu. V. Bogdanov, K. V. Volodchenko, S. I. Kanorskii, I. I. Sobelman, V. N. Sorokin, I. I. Struk, and E. A. Yukov, Preprint FIAN №129, Moscow (1991).
3. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, Письма в ЖЭТФ **67**, 777 (1998). Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, ЖЭТФ **115**, 865 (1999).
4. R. F. Snider, J. Chem. Phys. **32**, 1051 (1960).
5. М. Гольдбергер, К. Ватсон, *Теория столкновений*, Мир, Москва (1967).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматгиз, Москва (1963), с. 623.
7. A. J. Leggett, J. Phys. C: Solid St. Physics, **3**, 448 (1970).
8. A. E. Meyerovich, J. H. Naish, J. R. Owers-Bradly, and A. Stepaniants, Fiz. Nizk. Temp. **23**, 553 (1997).
9. J. W. Jeon and W. J. Mullin, J. Low Temp. Phys. **88**, 483 (1992).
10. F. M. Chen and R. F. Snider, J. Chem. Phys. **46**, 3937 (1967).
11. R. J. Knise, Phys. Rev. A **40**, 6219 (1989).
12. Е. И. Дашевская, Опт. и спектр. **51**, 71 (1978).