ЖЭТФ, 2000, том 118, вып. 4 (10), стр. 798–805

ВЫНУЖДЕННОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ ДЛЯ НАБОРА ТРЕХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков*

Государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2000 г.

N трехуровневых атомов взаимодействуют одновременно с классическими и квантованным полями, квазирезонансными различным атомным переходам. При этом классические и квантованное поля обмениваются фотонами с помощью атомов. Показано, что этот процесс при определенных условиях имеет коллективный характер. Число фотонов в квантованной моде осциллирует, причем амплитуда этих осцилляций пропорциональна N^2. Частота осцилляций определяется частотами классических и внешних полей.

PACS: 42.50.Fx, 32.80.-t

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика двух- и трехуровневых атомов под воздействием квазирезонансных классических полей играет важную роль во многих задачах квантовой оптики и лазерной спектроскопии и к настоящему времени хорошо изучена (см., например, [1, 2]). В то же время динамика квантовых систем, состоящих из атомов, взаимодействующих одновременно с классическими и квантованным полями, исследована существенно меньше. В работах [3–9] обсуждались различные физические аспекты динамики двухуровневого атома, взаимодействующего одновременно с классическим и квантованным полями. В данной работе мы рассмотрим ситуацию, когда с внешними полями взаимодействует набор трехуровневых атомов.

Пусть трехуровневый атом взаимодействует одновременно с классическими полями I_2 и I_3 и квантованной модой I_q, которые квазирезонансны различным атомным переходам (см. схему уровней и полей на рис. 1). Ранее было показано [6–8], что при определенных условиях в таких физических системах происходит обмен фотонами между классическими и квантованным полями. При этом атом можно рассматривать в качестве посредника при таком обмене. В данной работе мы обсудим ситуацию, когда $N > 1$ трехуровневых атомов взаимодействуют с классическими и квантованным полями. Наша цель — показать, что при этом обмен фотонами приобретает коллективный характер. Аналогичная задача для набора двухуровневых атомов обсуждалась в [10]. Отметим, что хотя число атомов предполагается достаточно большим, в то же время оно считается существенно меньшим числа Авогадро. При этом можно не учитывать обратного влияния атомов на амплитуду классических полей.

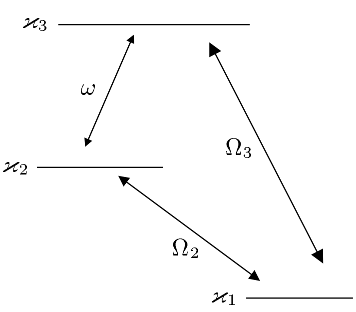

Рис. 1. Схема уровней и полей (см. пояснения в тексте)

Мы полагаем, что все атомы одинаковы и не обсуждаем пространственные эффекты. Это означает, что атомы локализованы в области, размеры которой в соответствующих направлениях много меньше, чем длины волн рассматриваемых полей. Пос-

*E-mail: akazak@mail.ru

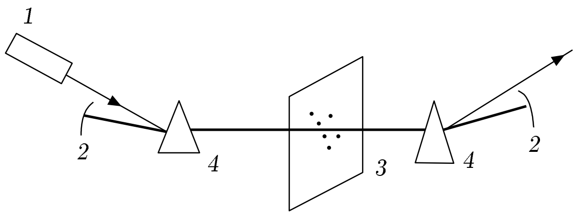

Рис. 2. Физическая схема: *1* — источник внешнего излучения, *2* — зеркала резонатора, *3* — плоскость с закрепленными атомами, *4* — оптические элементы

леднее условие может быть реализовано различными способами. Например, можно поместить атомы на плоскости, перпендикулярной направлению распространения полей (см. рис. 2).

Мы начнем с обсуждения ситуации, когда электромагнитные поля взаимодействуют с одним атомом. Взаимодействие внешних полей с атомом можно описать с помощью соответствующих параметров Раби, которые зависят от произведения амплитуды поля на величину соответствующего матричного элемента. Обычно параметр Раби классического поля значительно превосходит таковой для квантованного поля. Мы будем обсуждать нашу задачу именно в этом предположении. При этом динамику нашей квантовой системы можно «расщепить» на две части. С одной стороны, взаимодействие с классическими полями определяет соответствующие «быстрые» осцилляции в поведении квантовой системы. С другой стороны, на этом фоне присутствует «медленная» эволюция квантовой системы, определяемая взаимодействием атома с квантованной модой. Используя надлежащую процедуру усреднения (соответствующие математические детали обсуждались в [9]), мы выведем гамильтониан, управляющий «медленной» динамикой нашей системы. С помощью формализма Баргманна—Фока мы получим решение соответствующей начальной задачи. Затем мы перенесем эти результаты для случая $N > 1$. В итоге мы вычислим число фотонов в квантованной моде $n(t)$ и покажем, что оно осциллирует с амплитудой, пропорциональной N^2. Этот факт свидетельствует, что взаимодействие атомов с квантованной модой в нашей ситуации носит коллективный характер. Разумеется, полученные результаты справедливы лишь в рамках сделанных предположений, в том числе при учете указанного выше соотношения между параметрами Раби классических и квантованного полей.

Обсудим вкратце физическую реализуемость схемы рис. 1. Как известно, для свободных атомов, взаимодействующих с внешними полями в дипольном приближении, описанные в этой схеме три перехода не могут быть одновременно оптически открытыми. Однако можно считать, что один из атомных переходов взаимодействует с внешним классическим полем в квадрупольном приближении. Иной вариант реализации такой схемы уровней и полей предоставляют трехуровневые системы, реализованные на основе (асимметричных) квантовых ям — при этом нет симметрийных ограничений и все три атомных перехода могут быть оптически открытыми в дипольном приближении. Мы не будем различать эти две возможности, обсуждая их в рамках общего подхода.

2. ОДИН АТОМ

Динамику трехуровневого атома, взаимодействующего с классическими и квантованным полями согласно схеме рис. 1, можно описать с помощью гамильтониана

$$H = \omega a^+ a + \mathrm{diag}\{\kappa_3, \kappa_2, \kappa_1\} + \zeta(a^+ J_- + a J_+) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_3 \exp(-i\Omega_3 t) \\ 0 & 0 & \mu_2 \exp(-i\Omega_2 t) \\ \mu_3 \exp(i\Omega_3 t) & \mu_2 \exp(i\Omega_2 t) & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(мы используем обычное в квантовой оптике приближение вращающейся волны). Здесь

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_+ = J_-^T,$$

$\kappa_m, m = 1, 2, 3,$ — энергии атомных уровней, Ω_3, Ω_2 и ω — частоты соответственно классических монохроматических полей и квантованной моды, параметры μ_3, μ_2 и ζ характеризуют взаимодействие атома с этими полями. Параметры μ_3, μ_2 имеют смысл параметров Раби классических полей. С помощью сдвига по шкале энергий можно добиться того, что $\kappa_1 = 0$. Гамильтониан (1) действует в пространстве $F \otimes C^3$, где F — фоковское пространство, C — комплексная плоскость. Нас интересует решение соответствующего уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H \Psi(t).$$

Пусть $J_0 = \mathrm{diag}\{1, -1, 0\}$. Подстановка

$$\Psi(t) = \exp\left[-i\omega t \left(a^+a + \frac{J_0}{2}\right)\right]\Phi(t) \qquad (2)$$

отделяет оптическую частоту, и мы получаем

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \left[\zeta(a^+J_- + aJ_+) + \begin{pmatrix} \Delta_3 - \nu_3 & 0 & \mu_3 \exp[i\nu_3 t] \\ 0 & \Delta_2 - \nu_2 & \mu_2 \exp[i\nu_2 t] \\ \mu_3 \exp[-i\nu_3 t] & \mu_2 \exp[-i\nu_2 t] & 0 \end{pmatrix}\right]\Phi(t). \qquad (3)$$

Здесь и ниже

$$\nu_3 = \omega/2 - \Omega_3, \quad \nu_2 = -\omega/2 - \Omega_2,$$

$$\Delta_3 = \kappa_3 - \Omega_3, \quad \Delta_2 = \kappa_2 - \Omega_2.$$

Обсудим сначала решение следующей начальной задачи:

$$i\frac{\partial \Xi(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \Delta_3 - \nu_3 & 0 & \mu_3 \exp[i\nu_3 t] \\ 0 & \Delta_2 - \nu_2 & \mu_2 \exp[i\nu_2 t] \\ \mu_3 \exp[-i\nu_3 t] & \mu_2 \exp[-i\nu_2 t] & 0 \end{pmatrix}\Xi(t), \quad \Xi(0) = E, \qquad (4)$$

где E — единичная матрица. Матрица $\Xi(t)$ описывает динамику трехуровневого атома, взаимодействующего только с классическими полями. После подстановки

$$\tilde{\Xi}(t) = \exp\left[\mathrm{diag}\{-i\nu_3, -i\nu_2, 0\}t\right]\Xi(t)$$

находим

$$i\frac{\partial \tilde{\Xi}(t)}{\partial t} = \Lambda\tilde{\Xi}(t), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Delta_3 & 0 & \mu_3 \\ 0 & \Delta_2 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Λ имеет три вещественных собственных значения λ_1, λ_2, λ_3 (нас сейчас не интересуют их точные значения). Вообще говоря, они различны и имеют тот же порядок величины, что и μ_3, μ_2 (или, в иных терминах, R_2, R_3). При этом они существенно превосходят R_q, эффективный параметр Раби квантованной моды. Введем соответствующие собственные векторы

$$e_m = (e_{m3}, e_{m2}, e_{m1})^T, \quad m = 1, 2, 3,$$

нормированные на единицу, так что

$$e_{m3}^2 + e_{m2}^2 + e_{m1}^2 = 1.$$

Из вида матрицы Λ следует, что эти векторы ортогональны и образуют базис в C^3. Нетрудно показать, что в общей ситуации (когда $\mu_3\mu_2 \neq 0$)

$$e_{m2}e_{m3} \neq 0, \quad e_{m1}e_{m2}e_{m3} \neq 0.$$

Из наших рассмотрений следует, что решение начальной задачи (4) описывается соотношением

$$\Xi(t) = \exp\left[\mathrm{diag}\{\nu_3, \nu_2, 0\}it\right]U \times \times \exp\left[-\mathrm{diag}\{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1\}it\right]U^{-1}, \qquad (5)$$

причем

$$U = \begin{pmatrix} e_{33} & e_{23} & e_{13} \\ e_{32} & e_{22} & e_{12} \\ e_{31} & e_{21} & e_{11} \end{pmatrix}$$

— унитарная матрица, $U^{-1} = U^T$ (здесь мы используем нормировку векторов e_m).

Мы расщепим динамику квантовой системы с помощью подстановки в уравнение (3)

$$\Phi(t) = \Xi(t)\varphi(t). \qquad (6)$$

Тогда для функции $\varphi(t)$ получим

$$i\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \zeta\Xi^{-1}(t)(a^+J_- + aJ_+)\Xi(t)\varphi(t). \qquad (7)$$

Левая часть уравнения (7) пропорциональна R_q. Это означает, что данное уравнение описывает «медленную» эволюцию нашей системы. При этом соотношение (6) описывает волновую функцию в виде произведения «быстрого» и «медленного» сомножителей.

Для того чтобы описать динамику квантовой системы в старшем асимптотическом порядке (относительно малого параметра $R_q/(R_2, R_3)$) нам надлежит усреднить уравнение (7). Пусть

$$\nu = \nu_3 - \nu_2 = \omega + \Omega_2 - \Omega_3.$$

Тогда операторы $\Xi^{-1}(t)(a^+J_-+aJ_+)\Xi(t)$ (мы опускаем их точные громоздкие выражения) имеют гармоники с частотами $\pm[\nu \pm (\lambda_m - \lambda_g)]$, где $j, m = 1, 2, 3$. Устраняя «быстрые» гармоники (см. детали в [9]), мы получим усредненный гамильтониан

$$H_{an} = \zeta\langle\Xi^{-1}(t)(a^+J_- + aJ_+)\Xi(t)\rangle,$$

который управляет «медленной» эволюцией квантовой системы. При этом возможны два случая.

1. $|\nu \pm (\lambda_m - \lambda_j)| \ll \mu_{2,3}$ для некоторых $m \neq j$. В этом случае мы приходим (с точностью до простых преобразований) к обычной модели Джейнса—Каммингса.

2. Мы в дальнейшем будем обсуждать другую ситуацию, когда

$$|\nu| \ll \mu_{2,3}. \tag{8}$$

При этом мы имеем

$$H_{av} = \zeta\left[a\exp(-i\nu t) + a^+\exp(i\nu t)\right]S,$$

где

$$S = U\mathrm{diag}\{e_{33}e_{32}, e_{23}e_{22}, e_{13}e_{12}\}U^{-1}, \quad \mathrm{rank}\, S = 3.$$

Нас интересует решение соответствующего уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = H_{av}\varphi(t).$$

При этом числа $s_m = e_{m2}e_{m3}$ являются собственными значениями матрицы S. Введем соответствующие собственные векторы $e_m, m = 1.2, 3$. Набор этих векторов образует базис в C^3. Тогда

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{3}\eta_m(t)e_m,$$

причем функции $\eta_m(t)$ принимают значения в фоковском пространстве. Они являются решениями уравнения

$$i\frac{\partial\eta_m(t)}{\partial t} = \zeta s_m\left[a\exp(-i\nu t) + a^+\exp(i\nu t)\right]\eta_m(t). \tag{9}$$

Такие уравнения обсуждались в [8, 9]. Их решения были построены с помощью формализма Баргмана—Фока. При этом волновая функция представляется в виде аналитической функции $f(z)$ и $a \to d/dz$, $a^+ \to z$ (детали см., например, в [11]). Пусть

$$\varphi(0, z) = (\varphi_3(0, z), \varphi_2(0, z), \varphi_1(0, z))^T$$

— начальное состояние, где функции $\varphi_m(0, z)$, $m = 1, 2, 3$, — компоненты вектора $\varphi(0, z)$. Тогда

$$\varphi(0, z) = \sum_{m=1}^{3} Q_m(z)e_m,$$

где

$$(Q_3, Q_2, Q_1) = (\varphi_3(0, z), \varphi_2(0, z), \varphi_1(0, z))\, U,$$

и решение соответствующей начальной задачи для уравнения (9) описывается соотношением

$$\eta_m(t, z) = \\ = \exp\left[\zeta s_m(1 - e^{i\nu t})\frac{z}{\nu} + \frac{\zeta^2 s_m^2(e^{-i\nu t} + i\nu t - 1)}{\nu^2}\right] \times \\ \times Q_m\left[z - \frac{\zeta s_m(1 - e^{-i\nu t})}{\nu}\right].$$

Отметим, что операторы $\Xi(t)$ (см. соотношение (5)) и $\exp[-i\omega t(a^+a + J_0/2)]$ унитарны. Учитывая соотношения (2), (6), мы приходим к выводу, что волновые функции $\Psi(t)$ и $\varphi(t)$ связаны унитарным преобразованием. Далее, фоковские операторы a^+ и a коммутируют с матричным операторами $\Xi(t)$ и $\exp[-i\omega t J_0/2]$. Следовательно, если оператор G полиномиален по a^+a и не имеет матричной структуры, то

$$\langle G\rangle = \langle\overline{\Psi(t)}, G\Psi(t)\rangle = \\ = \int dz\, d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\overline{\varphi(z, t)}G\varphi(z, t) = \\ = \sum_{m=1}^{3}\int dz\, d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\overline{\eta_m(z, t)}G\eta_m(z, t).$$

Пусть, к примеру,

$$\varphi_3(0, z) = \varphi_2(0, z) = 0, \quad \varphi_1(0, z) = \psi(z),$$

так что только уровень 1 заселен в начальный момент. Тогда

$$Q_3(z) = \psi(z)\sin\chi\sin\tau, \quad Q_2(z) = \psi(z)\cos\chi\sin\tau,$$

$$Q_1(z) = \psi(z)\cos\tau,$$

где параметры τ, χ определяются соотношениями

$$\sin\chi\sin\tau = e_{13}, \quad \cos\chi\sin\tau = e_{12}, \quad \cos\tau = e_{11}.$$

Если

$$\psi(z) = z^m/\sqrt{m!},$$

т. е. квантованная мода имеет точно m фотонов в начальный момент, мы находим

$$\langle n(t)\rangle = \langle a^+a\rangle = \\ = m + \zeta^2\frac{4\sin^2\nu t/2}{\nu^2}\sum_{m=1}^{3}(e_{m1}e_{m2}e_{m3}). \tag{10}$$

3. N АТОМОВ

Выпишем гамильтониан, описывающий взаимодействие N идентичных трехуровневых атомов с классическими полями и квантованной модой согласно схеме рис. 1. Он действует в пространстве

$$\mathfrak{J} = F \otimes \left(\otimes_{k=1}^{N} C^3\right).$$

Пространство $\mathfrak{J}$ образуют линейные комбинации элементов $f|e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \ldots, e_{\sigma_k}, \ldots, e_{\sigma_N}\rangle$, где $f \in F$, числа σ_k равны 1, 2 или 3, e_k — собственные векторы матрицы Λ, введенные выше. Мы понимаем σ как множество N таких чисел и называем векторы e_{σ_k} «компонентами» волновой функции. Ниже мы используем следующие удобные обозначения: матричный оператор $A^{(k)}$ действует как матричный оператор A на k-ю компоненту волновой функции:

$$A^{(k)} f|e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \ldots, e_{\sigma_k}, \ldots, e_{\sigma_N}\rangle = \\ = f|e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \ldots, Ae_{\sigma_k}, \ldots, e_{\sigma_N}\rangle.$$

Отметим, что $A^{(k)}$ и $B^{(m)}$ коммутируют, если $m \neq k$. Наш гамильтониан можно записать в следующем виде:

$$H = \omega a^+ a + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \zeta \left(a^+ J_-^{(k)} + a J_+^{(k)}\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_3 \exp(-i\Omega_3 t) \\ 0 & 0 & \mu_2 \exp(-i\Omega_2 t) \\ \mu_3 \exp(i\Omega_3 t) & \mu_2 \exp(i\Omega_2 t) & 0 \end{pmatrix}^{(k)} \right\}.$$

Оптическую частоту можно отделить преобразованием:

$$\Psi(t) = \exp\left[-i\omega t \left(a^+ a + \sum_{k=1}^{N} J_0^{(k)}/2\right)\right] \Phi(t). \tag{11}$$

Тогда

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \left[\zeta \left(a^+ J_-^{(k)} + a J_+^{(k)}\right) + \begin{pmatrix} \Delta_3 - \nu_3 & 0 & \mu_3 \exp[i\nu_3 t] \\ 0 & \Delta_2 - \nu_2 & \mu_2 \exp[i\nu_2 t] \\ \mu_3 \exp[-i\nu_3 t] & \mu_2 \exp[-i\nu_2 t] & 0 \end{pmatrix}^{(k)} \right] \Phi(t).$$

Подстановка

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{N} \Xi^{(k)}(t) \varphi(t) \tag{12}$$

разделяет «быстрые» и «медленные» части волновой функции. Для «медленной» части находим

$$i\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \zeta \prod_{m=1}^{N} \left[\Xi^{(m)}(t)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \left(a^+ J_-^{(k)} + a J_+^{(k)}\right) \prod_{n=1}^{N} \Xi^{(n)}(t) \varphi(t) = \zeta \sum_{k=1}^{N} \left[\Xi^{-1}(t)(a^+ J_- + a J_+) \Xi(t)\right]^{(k)} \varphi(t).$$

Как и в случае одного атома, последний оператор имеет гармоники с частотами $\pm[\nu \pm (\lambda_m - \lambda_j)]$, $m, j = 1, 2, 3$, и мы будем обсуждать случай $|\nu| \ll \mu_{2,3}$. Процедура усреднения (аналогичная описанной выше) может быть реализована в каждом слагаемом этой суммы отдельно, и мы получаем

$$i\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = H_{av} \varphi(t), \tag{13}$$

$$H_{av} = \zeta \left[a \exp(-i\nu t) + a^+ \exp(i\nu t)\right] \sum_{k=1}^{N} S^{(k)}. \tag{14}$$

Из этого соотношения следует важное обстоятельство: усредненный гамильтониан (14) является произведением фоковского оператора

$$\zeta \left[a \exp(-i\nu t) + a^+ \exp(i\nu t)\right]$$

и матричного оператора

$$\sum_{k=1}^{N} S^{(k)}.$$

Следовательно, наша задача расщепляется на набор одномерных задач при записи ее в базисе собственных векторов этого матричного оператора. Этот оператор представляет собой сумму матричных операторов, у которых только соответствующие трехмерные блоки нетривиальны и которые коммутируют друг с другом. Переходя в надлежащий базис, получаем

$$\varphi(t) = \sum \sigma\eta_\sigma(t)|e_{\sigma_1}e_{\sigma_2}\dots e_{\sigma_N}\rangle.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (13), находим

$$i\frac{\partial\eta_\sigma(t)}{\partial t} = \zeta|\sigma|\left(\sum_{k=1}^{N} s_{\sigma_k}\right)\times \\ \times\left[a\exp(-i\nu t) + a^+\exp(i\nu t)\right]\eta_\sigma(t),$$

где

$$|\sigma| = \left(\sum_{k=1}^{N} s_{\sigma_k}\right).$$

Отметим, что

$$|\sigma| = A(\sigma)s_3 + B(\sigma)s_2 + [N - A(\sigma) - B(\sigma)]\,s_1,$$

где

$$A(\sigma) = \left(\sum_{k=1}^{N}\delta_{3,\sigma_k}\right), \quad B(\sigma) = \left(\sum_{k=1}^{N}\delta_{2,\sigma_k}\right).$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (9) с точностью до множителя. Таким образом, мы можем свести задачу к уже решенной ранее. Если в начальный момент времени волновая функция

$$\varphi(0,z) = \sum_\sigma Q_\sigma(z)|e_{\sigma_1}e_{\sigma_2}\dots e_{\sigma_N}\rangle,$$

то

$$\eta_\sigma(t) = \\ = \exp\left[\frac{\zeta|\sigma|(1-e^{i\nu t})z}{\nu} + \frac{\zeta^2|\sigma|^2(e^{-i\nu t}+i\nu t-1)}{\nu^2}\right]\times \\ \times Q_\sigma\left[z - \frac{\zeta|\sigma|(1-e^{-i\nu t})}{\nu}\right].$$

Отметим, что это соотношение включает зависимость от σ только через $|\sigma|$.

Для простоты мы обсудим здесь только один специальный случай начальной задачи. Пусть в начальный момент только уровень 1 для каждого атома заселен, а квантованная мода содержит ровно m фотонов. Тогда

$$Q_\sigma = z^m(m!)^{-1/2}[\sin\chi]^{A(\sigma)}[\cos\chi]^{B(\sigma)}\times \\ \times[\sin\tau]^{A(\sigma)+B(\sigma)}[\cos\tau]^{N-A(\sigma)-B(\sigma)},$$

где τ, χ имеют тот же смысл, что и ранее.

Заметим, что операторы

$$\prod_{k=1}^{N}\Xi^{(k)}(t) \quad \text{и} \\ \exp\left[-i\omega t\left(a^+a + \sum_{k=1}^{N} J_0^{(k)}/2\right)\right] \tag{15}$$

унитарны, и в соответствии с соотношениями (11), (12) волновые функции $\Psi(t)$ и $\varphi(t)$ связаны унитарными операторами. Далее, фоковский оператор a^+a коммутирует с операторами (15). Следовательно, если оператор G полиномиален по a^+a (и не имеет матричной структуры), то

$$\langle G\rangle = \langle\overline{\Psi(t)}, G\Psi(t)\rangle = \\ = \int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\overline{\varphi(z,t)}G\varphi(z,t).$$

В итоге для таких операторов G получаем

$$\langle G\rangle = \sum_{A=1}^{N} C_N^A\sum_{B=1}^{N-A} C_N^B[\sin\chi]^{2A}\times \\ \times[\cos\chi]^{2B}[\sin\tau]^{2A+2B}[\cos\tau]^{2N-2A-2B}\times \\ \times\int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\overline{\varphi_\sigma(z,t)}G\varphi_\sigma(z,t)\Big|_{A(\sigma)=A,B(\sigma)=B}.$$

Полагая $G = a^+a$, находим

$$\langle n(t)\rangle = m + \zeta^2\frac{4\sin^2(\nu t/2)}{\nu^2}\times \\ \times\left[N(N-1)\left(\sum_{m=1}^{3}(e_{m1})^2e_{m2}e_{m3}\right)^2 + \right. \\ \left. + N\sum_{m=1}^{3}(e_{m1}e_{m2}e_{m3})^2\right]. \tag{16}$$

Выше было отмечено, что

$$\left(\sum_{m=1}^{3}(e_{m1})^2e_{m2}e_{m3}\right)^2 \neq 0,$$

если $\mu_3\mu_2 \neq 0$. Мы опускаем громоздкие явные выражения для сомножителей

$$\left(\sum_{m=1}^{3}(e_{m1})^2 e_{m2}e_{m3}\right)^2, \quad \sum_{m=1}^{3}(e_{m1}e_{m2}e_{m3})^2.$$

Соотношение (16) является основным результатом данной работы. Оно показывает, что число фотонов в квантованной моде осциллирует, причем амплитуда этих осцилляций пропорциональна N^2, где N — число атомов. Этот факт демонстрирует коллективный характер взаимодействия атомов с квантованным полем. Аналогичный результат справедлив для любого выбора начального состояния атомов (в предположении, что все атомы находятся в одинаковом начальном состоянии).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим полученные результаты. Как было показано в [6–8], при взаимодействии единичного атома с классическими полями и квантованной модой одновременно возможен обмен фотонами между классическими и квантованной модами. В данной работе мы рассмотрели взаимодействие N трехуровневых атомов с классическими полями и квантованной модой. Мы показали, что в этом случае обмен фотонами приобретает коллективный характер. А именно, амплитуда осцилляций числа фотонов в квантованной моде пропорциональна N^2. При этом частота осцилляций совпадает с

$$\nu = \omega + \Omega_2 - \Omega_3,$$

где ω, Ω_2, Ω_3 — соответственно частоты квантованной моды и классических полей, причем мы полагали, что $|\nu| \ll \mu_2, \mu_3$ (μ_2, μ_3 — параметры Раби классических полей). Напомним, что для «обычного» сверхизлучения (см. [12, 13]) временная динамика фотонов в квантованной моде зависит от числа фотонов N. Описанное в работе явление — коллективный переброс фотонов из классических мод в квантованную и обратно — может быть понято как вынужденное сверхизлучение. Выкладки, с помощью которых был получен окончательный результат (16), демонстрируют интерференционную природу этого явления.

Атом, взаимодействующий с квазирезонсными классическими полями, можно понимать как атом «одетый полем». Таким образом, мы обсуждали взаимодействие квантованной моды с набором таких одетых полем атомов. Для «обычного» сверхизлучения источником фотонов в квантованной моде являются начально инвертированные атомы. В нашем случае таким источником являются классические поля. Отметим, что в экспериментах при реализации «обычного» сверхизлучения часто используют оптическую накачку для приготовления начальных состояний атомов, которые затем (через определенный промежуток времени) генерируют импульс сверхизлучения. Отличие нашей схемы заключается в том, что перекачка фотонов в квантованную моду происходит в то время, когда атомы взаимодействуют с классическими полями, и под воздействием такого взаимодействия. При этом классические поля «вынуждают» атомы перебрасывать фотоны в квантованную моду, что и оправдывает название «вынужденное сверхизлучение» для этого явления. Подчеркнем, что наша квантовая система не обладает дополнительным интегралом движения (каковым в случае «обычного» сверхизлучения является число возбуждений в системе).

В данной работе мы использовали предположения об идентичности атомов и их начальных состояний. Нетрудно показать, что эти предположения можно смягчить, учитывая соответствующие поправки. Условие (8) не является ограничительным с физической точки зрения.

Как упоминалось выше, аналогичные результаты справедливы и для набора двухуровневых атомов [10]. Однако ситуация, рассмотренная в данной работе, представляется более перспективной для приложений. В самом деле, для трехуровневых атомов частота квантованной моды близка (в оптических масштабах) к разности или сумме частот классических мод и может быть достаточно далека от значений этих частот. Поэтому данную физическую систему можно рассматривать как новый источник когерентного излучения. При этом не требуется специально «подготавливать» инвертированное начальное состояние атомов. В этом смысле здесь имеется некоторая параллель с известным явлением «усиления без инверсии населенности» [14].

Авторы благодарны Н. Б. Делоне и Д. А. Фирсову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Летохов, В. П. Чеботаев, *Нелинейная спектроскопия сверхвысокого разрешения*, Москва, Наука (1990).

2. С. Стенхольм, *Основы лазерной спектроскопии*, Москва, Мир (1987).

3. C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **43**, 6337 (1991).

4. P. Alsing, D.-S. Guo, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **45**, 5135 (1992).

5. I. V. Jyotsna and G. S. Agarwal, Opt. Commun. **99**, 344 (1993).

6. A. Ya. Kazakov, Phys. Lett. A **206**, 229 (1995).

7. А. Я. Казаков, Опт. и спектр. **81**, 549 (1996).

8. A. Ya. Kazakov, Quant. Semiclass. Opt. **10**, 753 (1998).

9. А. Я. Казаков, ТМФ **117**, 92 (1998).

10. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **116**, 858 (1999).

11. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их приложения*, Москва, Наука (1987).

12. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

13. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Москва, Наука (1988).

14. Я. И. Ханин, О. А. Кочаровская, Письма в ЖЭТФ **48**, 581 (1988).