ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 2, стр. 313–318

СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КУЛОНОВСКИХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ПО ВЫРОЖДЕННЫМ СОСТОЯНИЯМ

М. И. Чибисов*

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

А. М. Ермолаев

Physique Theorique, Faculte des Sciences CP 227, Universite Libre de Bruxelles
B-1050 Bruxelles, Belgium

М. Шеркани

UFR Physique Corpusculaire FST Fes-Saiss, Morocco

Ф. Бруйар

Départment de physique, unité Fyam, Bâtiment Marc de Hemptinne
B-1348, Louvain-la-Neuve, Belgium

Поступила в редакцию 19 августа 1999 г.

Суммы произведений кулоновских волновых функций по вырожденным состояниям выражены через квадратичные формы, зависящие от волновой функции только одного состояния с равными нулю угловыми квантовыми числами $l = m = 0$. Эти суммы встречаются во многих разделах физики атомов и молекул, например в исследованиях возмущения возбужденных атомных уровней энергии потенциальной ямой малого размера, δ-потенциалом. Суммы были найдены при исследовании предела кулоновской функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)$, когда энергетический параметр E стремится к атомному уровню энергии: $E \to E_n$, $E_n = -Z^2/2n^2$. Использовалась функция Грина, найденная Л. Хостлером и Р. Праттом в 1963 году. Полученный результат является следствием вырождения кулоновских уровней энергии, которое, в свою очередь, обусловлено четырехмерной симметрией кулоновской задачи.

PACS: 34.10+x, 34.70+e

1. Задача об уровнях энергии системы, состоящей из отрицательного и положительного ионов $A^- + B^+$, сталкивается с необходимостью вычисления сумм [1–4]

$$Q_n^{(0)}(R) \equiv \sum_{l,m} \psi^*_{nlm}(\mathbf{R})\psi_{nlm}(\mathbf{R}), \tag{1}$$

$$Q_n^{(1)}(R) \equiv \sum_{l,m} \psi^*_{nlm}(\mathbf{R})\frac{d\psi_{nlm}(\mathbf{R})}{dR} \tag{2}$$

кулоновских волновых функций ψ_{nlm} и их производных $d\psi_{nlm}/dR$ по состояниям, принадлежащих одному и тому же значению главного квантового числа n (R — расстояние от кулоновского центра). Уровни энергии атома водорода и водородоподобных ионов H, He^+, Li^{++}, ... вырождены по угловым квантовым числам l, m, так что суммирование в (1) и (2) проводится по связанным состояниям с одной и той же энергией. Суммы (1) и (2) имеют фундаментальное значение, поскольку они принадлежат простейшим квантовым объектам.

2. В работах [1–4] уровни энергии системы $A^- + B^+$ исследовались в приближении δ-потенциала, в котором эти уровни определяются кулоновской функцией Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, E)$. Точное выражение для этой функции было найдено Хостлером и Праттом [5, 6]:

*E-mail: chib@qq.nfi.kiae.su

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',E)=\frac{\Gamma(1-Zn_-)}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{\partial}{\partial(x/n_-)}-\frac{\partial}{\partial(y/n_-)}\right)\times$$
$$\times W_{Zn_-,1/2}\left(\frac{x}{n_-}\right)M_{Zn_-,1/2}\left(\frac{y}{n_-}\right),$$
$$x=r+r'+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\quad y=r+r'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,$$
$$n_-=(-2E)^{-1/2};\tag{3}$$

где M,W — функции Уиттекера, являющиеся решениями уравнения [7]

$$W''_{Zn_-,1/2}(\tau)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{Zn_-}{\tau}\right)W_{Zn_-,1/2}(\tau)=0,\tag{3a}$$

и такое же уравнение для функции M. Функция W регулярна на бесконечности, $\tau\to\infty$, а функция M регулярна в начале координат, $\tau=0$. Разложение функции Грина по собственным функциям ψ_{nlm} имеет вид [8]

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',E)=\sum_{nlm}\frac{\psi^*_{nlm}(\mathbf{r})\psi_{nlm}(\mathbf{r}')}{E-E_n},\tag{4}$$

где знак суммы предполагает суммирование по дискретным состояниям с отрицательными энергиями и интегрирование по состояниям континуума.

Суммы (1), (2) можно вычислить в общем виде для произвольного значения n, анализируя выражение (3) для функции Грина в пределе $E\to E_n$. Функция Уиттекера M является линейной комбинацией $W_{nZ,1/2}(\tau)$ и $W_{-nZ,1/2}(-\tau)$ функций Уиттекера [7]:

$$\Gamma(1-Zn_-)M_{Zn_-,1/2}(\tau)=(-1)^{1+Zn_-}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(1-Zn_-)}{\Gamma(1+Zn_-)}W_{Zn_-,1/2}(\tau)+(-1)^{Zn_-}\times$$
$$\times W_{-Zn_-,1/2}(-\tau).\tag{5}$$

Функция $W_{-Zn_-}(-\tau)$ экспоненциально возрастает при $\tau\to\infty$. Если энергия E близка к собственному значению $E_n=-Z^2/2n^2$, то индекс функций W близок к целому значению $Zn_-=n$. В этом пределе первый член в (5) является преобладающим, а в разложении (4) главным является резонансный член, пропорциональный $(E-E_n)^{-1}$. Тогда функция Грина оказывается близкой к следующему выражению:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{R},E\to E_n)\simeq\frac{\sum\limits_{l,m}\psi^*_{nlm}(\mathbf{r})\psi_{nlm}(\mathbf{R})}{E-E_n}=$$
$$=\frac{1}{(E-E_n)}\frac{Z^2}{\pi n^3 n!(n-1)!}\frac{1}{(x-y)}\times$$
$$\times\left(\frac{n\partial}{\partial(Zy)}-\frac{n\partial}{\partial(Zx)}\right)W_{n,1/2}\left(\frac{Zx}{n}\right)\times$$
$$\times W_{n,1/2}\left(\frac{Zy}{n}\right),\tag{6}$$

где использовалось разложение резонансной гамма-функции в рассматриваемом пределе

$$\Gamma(1-Zn_-)=\left.\frac{\pi}{\Gamma(Zn_-)\sin(\pi Zn_-)}\right|_{Zn_-\to n}\to$$
$$\to\frac{(-1)^nZ^2}{n^3\Gamma(n)}\frac{1}{E-E_n}.$$

Из (6) получаем

$$\sum_{l,m}\psi^*_{nlm}(\mathbf{r})\psi_{nlm}(\mathbf{R})=\frac{Z^2}{\pi n^3 n!(n-1)!}\frac{1}{(x-y)}\times$$
$$\times\left(\frac{n\ \partial}{\partial(Zy)}-\frac{n\ \partial}{\partial(Zx)}\right)W_{n,1/2}\left(\frac{Zx}{n}\right)\times$$
$$\times W_{n,1/2}\left(\frac{Zy}{n}\right).\tag{7}$$

Предел функции Грина (3) при $E\to E_n$ использовался в работах [9–11] для вычисления борновских амплитуд переходов между высоковозбужденными состояниями атомов при столкновениях с электронами. При суммировании и усреднении по вырожденным состояниям эти амплитуды интегрально зависят от сумм (7). В работе В. А. Фока [12] рассматривались суммы, аналогичные суммам (1) и (7), но для волновых функций в импульсном представлении.

Функция Уиттекера $W_{n,1/2}$ с целочисленным значением n первого индекса может быть выражена через нормированную кулоновскую функцию ψ_{n00} с нулевыми значениями угловых квантовых чисел $l=m=0$. Кулоновские функции водородоподобных ионов равны [13]

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r})=f_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi),\quad \phi_{nl}(r)=\mathrm{const}\cdot rf_{nl}(r),$$
$$f_{nl}(r)=\frac{2Z^{3/2}}{n^2(2l+1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}\left(\frac{2Zr}{n}\right)^l\times$$
$$\times\exp\left(\frac{-Zr}{n}\right)F\left(-n+l+1;2l+2;\frac{2Zr}{n}\right),\tag{8}$$

$$\phi''_{nl}(r)+2\left(E_n+\frac{Z}{r}-\frac{l(l+1)}{2r^2}\right)\phi_{nl}(r)=0,$$
$$E_n=-\frac{Z^2}{2n^2}.\tag{9}$$

При переходе к переменной τ уравнение (9) для $l=0$ преобразуется к уравнению

$$\phi''_{n0}(\tau)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{\tau}\right)\phi_{n0}(\tau)=0,\quad \tau=\frac{2Zr}{n},\tag{10}$$

которое совпадает с уравнением (3а) для функции $W_{n,1/2}$. Сравнивая асимптотики функций W и ϕ_{n0} при $r\to\infty$, получаем соотношение

$$W_{n,1/2}(\tau)=(-1)^{n+1}n!\sqrt{\frac{4\pi n}{Z}}\phi_{n0}(\tau),\tag{11}$$

в котором функция ϕ_{n0} нормирована на трехмерный объем (делением соответствующей радиальной функции на $\sqrt{4\pi}$), а ее переменная r заменена на τ.

Подставляя (11) в (7), получаем

$$\widehat{Q}_n^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{R}) \equiv \sum_{l,m} \psi_{nlm}(\mathbf{r})\psi^*_{nlm}(\mathbf{R}) = = \frac{4Z^2}{n^2}\frac{\phi'_{n0}(\tau_y)\phi_{n0}(\tau_x) - \phi_{n0}(\tau_y)\phi'_{n0}(\tau_x)}{\tau_x - \tau_y}, \tag{12}$$

$$\tau_x = \frac{z}{n}\left[r + R + |\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right],$$

$$\tau_y = \frac{z}{n}\left[r + R - |\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right].$$

Выражение (12) имеет более общую форму, чем суммы (1), (2): $\widehat{Q}_n^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{R})$ зависит от двух векторов, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, и суммы (1), (2) могут быть выражены через частное значение $\widehat{Q}_n^{(0)}$ при $\mathbf{r}=\mathbf{R}$, см. ниже.

Дифференцируя (12) по абсолютному значению R и выражая вторые производные ϕ''_{n0} из уравнения (10), получаем более общее выражение для второй суммы:

$$\widehat{Q}_n^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{R}) \equiv \sum_{l,m} \psi_{nlm}(\mathbf{r})\frac{d\psi_{nlm}(\mathbf{R})}{dR} = =-\frac{2Z(R-r\cos\alpha)}{n|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^3}\Big(\phi'_{n0}(\tau_y)\phi_{n0}(\tau_x)-\phi_{n0}(\tau_y)\phi'_{n0}(\tau_x)\Big)+ + \frac{4Z^2(R-r\cos\alpha)}{n^2|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2}\Big[\phi'_{n0}(\tau_x)\phi'_{n0}(\tau_y) + + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n^2(R-r)}{2ZR(R-r\cos\alpha)}\right)\phi_{n0}(\tau_x)\phi_{n0}(\tau_y)\Big], \tag{13}$$

α — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$.

В модели δ-потенциала [4] сумма $\widehat{Q}_n^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{R})$, определяемая формулой (12), пропорциональна пределу при $E \to E_n$ волновой функции системы $A^- + B^+$ для случая, когда момент электрона изолированного иона A^- равен нулю, $L=0$. Сумма же $\widehat{Q}_n^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{R})$, определяемая формулой (13), пропорциональна такому же пределу для случая $L=1$.

Для вычисления суммы (1) исследуем предел равенства (12) при $\mathbf{r}\to\mathbf{R}$. В этом пределе $y \to x$, $\tau_y \to \tau_x$ и числитель в (12) стремится к нулю. Первый член разложения числителя в (12) в ряд Тейлора равен

$$\phi'_{n0}(\tau_y)\phi_{n0}(\tau_x) - \phi_{n0}(\tau_y)\phi'_{n0}(\tau_x) \simeq \simeq (\tau_x-\tau_y)\left[\left(\frac{d\phi_{n0}}{d\tau_x}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{\tau_x}\right)\phi^2_{n0}(\tau_x)\right] + \ldots;$$

подставляя это разложение в (12), получаем первую сумму (1):

$$Q_n^{(0)}(R) \equiv \sum_{l,m}\left|\psi_{nlm}(\mathbf{R})\right|^2 = = \left(\frac{d\phi_{n0}(R)}{dR}\right)^2 + 2\left(E_n + \frac{Z}{R}\right)\phi^2_{n0}(R). \tag{14}$$

Мы видим, что сумма квадратов модулей волновых функций для состояний с фиксированной энергией и с фиксированным главным квантовым числом n оказывается, согласно формуле (14), равной квадратичной форме от функции только одного состояния — функции $\phi_{n0}(R)$ — с равным нулю орбитальным моментом $l=0$ и с тем же значением n. Факт существования соотношения (14) связан с вырождением кулоновских уровней энергии: для значений угловых квантовых чисел $l \le n-1$, $-l \le m \le l$ эти энергии зависят только от n и не зависят от l, m. При наличии вырождения функция Грина в каждом полюсе, т. е. при $E \to E_n$, определяется суммой произведений волновых функций вырожденных состояний, см. спектральное разложение (4). В отсутствие же вырождения функция $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',E)$ зависит в полюсе от волновой функции только одного состояния.

Используя теорему сложения сферических функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ [13,14], которая позволяет провести суммирование по магнитному квантовому числу m, мы можем преобразовать двойные суммы (12) и (1), (2) к однократным:

$$\widehat{Q}_n^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{R}) \equiv \sum_{l,m}\psi_{nlm}(\mathbf{r})\psi^*_{nlm}(\mathbf{R}) = = \frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\alpha)f_{nl}(r)f_{nl}(R),$$

$$Q_n^{(0)}(R) = \frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)\left|f_{nl}(R)\right|^2, \tag{15}$$

$$Q_n^{(1)}(R) = \frac{1}{2}\frac{dQ_n^{(0)}(R)}{dR} = = \frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)f_{nl}(R)\frac{df_{nl}}{dR}. \tag{16}$$

В пределе $\mathbf{r}\to\mathbf{R}$ угол $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ и $P_l(1)=1$, так что суммы (15), (16) и (1), (2) не зависят от сферических углов вектора $\mathbf{R}$. Однако из этих общих формул конкретное выражение для правой части формулы (14) не может быть получено: дальнейшее суммирование по l в (15), (16) в общем виде провести нельзя. Это суммирование возможно только при использовании выражения (3), найденного Хостлером и Праттом [5, 6] при точном решении дифференциального уравнения для кулоновской функции Грина. Конкретная форма правой части (14) определяется, по-видимому, лишь спецификой кулоновского поля.

3. В одномерном случае для системы с действительным гамильтонианом оказывается возможным на основе волнового уравнения Шредингера написать линейное интегродифференциальное уравнение второго порядка для квадрата модуля волновой функции этой системы. Умножая уравнение (9) на ϕ'_{nl} и интегрируя его один раз, получаем

$$\left(\phi'_{nl}(r)\right)^2 + 2\left(E_n - U_l(r)\right)\phi^2_{nl}(r) = = 2\int\limits_r^\infty \phi^2_{nl}(r')\frac{dU_l(r')}{dr'}dr', \tag{17}$$

а умножая (9) на ϕ_{nl} и используя (17), получаем уравнение для плотности вероятности:

$$\varrho''_{nl}(r) + 8\left(E_n - U_l(r)\right)\varrho_{nl}(r) = = 4\int\limits_r^\infty \varrho_{nl}(r')\frac{dU_l(r')}{dr'}dr', \tag{18}$$

$$\varrho_{nl}(r) \equiv |\phi_{nl}(r)|^2; \qquad U_l(r) \equiv -\frac{Z}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2}.$$

Напомним, что радиальные функции связанных состояний ($E < 0$) вещественны. При получении этих уравнений использовалось граничное условие: $\phi_{nl}(r)$ экспоненциально стремится к нулю при $r \to \infty$. Равенство (17) и уравнение (18) применялись в [15] для исследования потенциала на поверхности металла. Продифференцировав (18) по r, получим уравнение, обсуждавшееся Соловьевым [16]:

$$\varrho''' + 8(E-U)\varrho' - 4\varrho U' = 0.$$

Подставив для $l = 0$ равенство (17) в (14), преобразуем первую сумму к виду

$$Q^{(0)}_n(R) \equiv \sum_{l,m}\left|\psi_{nlm}(\mathbf{R})\right|^2 = = 2\int\limits_R^\infty \phi^2_{n0}(r)\frac{dU_0(r)}{dr}dr. \tag{19}$$

Легко видеть, что интеграл в (17), (19) есть сила (в используемых в этой статье безразмерных атомных единицах), действующая со стороны ядра на часть плотности электронного заряда, расположенного в интервале r, ∞. Первая сумма, $Q^{(0)}_n$, пропорциональна удвоенной величине этой силы.

Используя $dU_0/dr = Z/r^2$, можно записать (19) в следующей форме:

$$Q^{(0)}_n(R) \equiv \sum_{l,m}\left|\psi_{nlm}(\mathbf{R})\right|^2 = 2Z\int\limits_R^\infty \psi^2_{n0}(r)dr. \tag{19а}$$

Поскольку правые части соотношения (17) и уравнения (18) различаются лишь численным множителем, можно записать сумму (1) еще и в таком виде:

$$Q^{(0)}_n(R) \equiv \sum_{l,m}\left|\psi_{nlm}(\mathbf{R})\right|^2 = = \frac{1}{2}\varrho''_{n0}(R) + 4\left(E_n - U_0(R)\right)\varrho_{n0}(R). \tag{19б}$$

Интересно отметить, что в квазиклассическом приближении для функции ϕ_{n0} правая часть в равенстве (14) обращается в нуль. Действительно, в квазиклассическом приближении имеем

$$\phi_{n0}(R) = \exp(S(R)), \tag{20}$$

$$\exp(S)\left(\left(S'\right)^2 + p^2(R)\right) = 0 \to \left(S'\right)^2 + p^2(R) = 0; \quad p(R) = \sqrt{2(E_n - U(R))}. \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в правую часть (14), получаем

$$Q^{sc}_n(R) \simeq \exp(2S)\left(\left(S'\right)^2 + p^2(R)\right) = 0. \tag{22}$$

4. Вторая сумма (2) получается при дифференцировании (14) по абсолютной величине вектора $\mathbf{R}$ или (что более сложно) при исследовании предела выражения (13) при $\mathbf{r} \to \mathbf{R}$:

$$Q^{(1)}_n(R) = \frac{1}{2}\frac{dQ^{(0)}_n(R)}{dR} = \sum_{lm}\psi^*_{nlm}(\mathbf{R})\frac{d\psi_{nlm}(\mathbf{R})}{dR} = = -Z\psi^2_{n00}(R) = -\frac{Z}{R^2}\phi^2_{n0}(R). \tag{23}$$

Это соотношение легко получить также при дифференцировании (19а).

На рисунках 1 и 2 показаны суммы (1) и (2) как функции расстояния до ядра R, вычисленные для атома водорода ($Z = 1$): для возбужденных состояний $n = 4, 5, 6, 7$ и 8 в случае $Q^{(0)}_n(R)$, рис. 1, и $n = 4$ и 8 в случае $Q^{(1)}_n(R)$, рис. 2. Обе суммы были вычислены как прямым суммированием по l, формулы

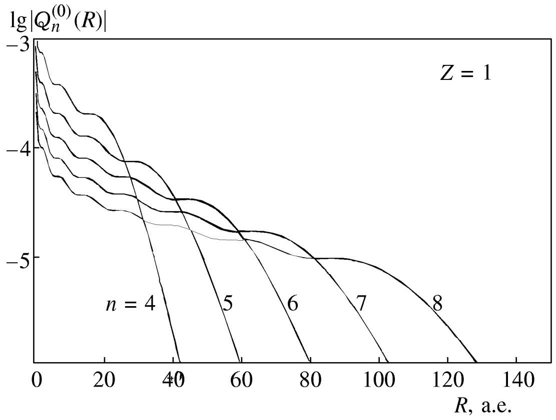

Рис. 1. Сумма (1) для атома водорода ($Z = 1$) как функция расстояния от ядра R для пяти значений главного квантового числа $n = 4$–8

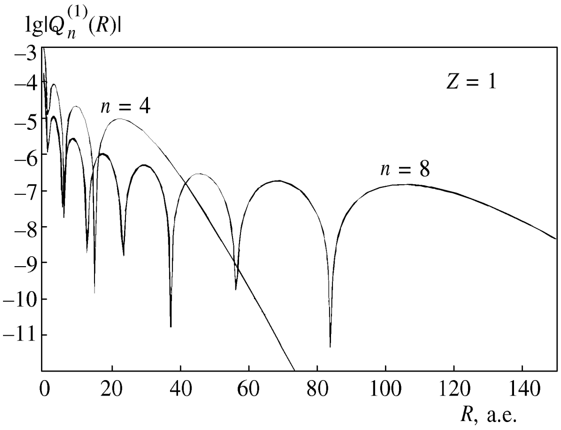

Рис. 2. Сумма (2) для атома водорода ($Z = 1$) как функция расстояния от ядра R для значений главного квантового числа $n = 4$ и 8

(15), (16), так и по полученным нами формулам (14), (19) и (19а), (19б) для $Q_n^{(0)}(R)$ и по формуле (23) для $Q_n^{(1)}(R)$. Для каждой суммы и каждого данного значения n результаты расчета по всем использованным формулам легли на одну кривую, т. е. результаты всех методов расчета совпали между собой. На рисунках 1 и 2 видно, что сумма $Q_n^{(0)}(R)$ не имеет нулей при конечных значениях R. При $R \to \infty$ эта сумма уменьшается до нуля ступеньками, в середине которых производная этой суммы равна нулю. В соответствии с формулой (23) производная функции $Q_n^{(0)}(R)$ пропорциональна квадрату функции $\psi_{n00}(R)$, имеющей $n-1$ нулей.

Факт существования соотношений (14),(23) обусловлен вырождением кулоновских уровней энергии, которое является следствием четырехмерной симметрии задачи об атоме водорода и водородоподобных ионах. В работе В. А. Фока [12] исследовалось уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении и было найдено, что допускаемая этим уравнением группа преобразований тождественна четырехмерной группе вращений. В работе [12] исследовалась также сумма произведений волновых функций в импульсном представлении, аналогичная сумме (1) в координатном представлении. Для такой суммы в [12] было найдено аналитическое выражение, зависящее от четырехмерных импульсов. Вопрос о связи сумм в импульсном и координатном представлениях достаточно сложен и требует дополнительного исследования.

В недавно опубликованных обзорах [17,18] обсуждаются работы, посвященные свойствам кулоновской функции Грина и четырехмерной симметрии атома водорода. Полученные нами выражения для сумм (1), (2) могут быть добавлены к списку обсуждаемых в этих обзорах свойств водородоподобных ионов.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по программе поддержки ведущих научных школ (проект 96-15-96815).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Комаров, П. А. Погорелый, А. С. Тибилов, Опт. и спектр. **27**, 198 (1969).
2. L. P. Presnyakov, Phys. Rev. A **2**, 1720 (1970).
3. Т. М. Кереселидзе, М. И. Чибисов, ЖЭТФ **68**, 12 (1975).
4. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, ЛГУ, Ленинград (1975). Пер. *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics*, Plenum press, New-York and London, Ch. 7.4 (1988).
5. L. Hostler and R. H. Pratt, Phys. Rev. Lett. **10**, 469 (1963).
6. L. Hostler, J. Math. Phys. **5**, 591 (1964).
7. С. Градштейн, И. М.Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
8. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
9. И. Л. Бейгман, А. М. Урнов, В. П. Шевелько, ЖЭТФ **58**, 1825 (1970).
10. И. Л. Бейгман, А. М. Урнов, JQSRT **14**, 1009 (1974).

11. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979).

12. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Отделение математических и естественных наук, №2, 169 (1935); V. A. Fock, Z. Phys. **98**, 145 (1935).

13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).

14. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).

15. М. И. Чибисов, Препринт ИАЭ-4983/7, (1989).

16. Е. А. Соловьев, Письма в ЖЭТФ **39**, вып. 2 (1984).

17. Alfred Maquet, Valerie Veniard and Tudor A Marian, J. Phys. **B**: At. Mol. Opt. Phys. **31**, 3743 (1998).

18. N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, and L. P. Rapoport, Phys. Rep. **141**, 319 (1986).