ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 6(12), стр. 2150–2153

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ТРЕХФАЗНЫХ БЕЗДИССИПАТИВНЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

*В. Е. Архинчеев**

Бурятский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук
670047, Улан-Удэ, Россия

Поступила в редакцию 10 июня 1999 г.

Рассмотрена неоднородная среда, состоящая из случайной смеси трех бездиссипативных (холловских) фаз. Получено точное выражение для эффективной проводимости такой среды при произвольных концентрациях фаз и дополнительном условии — равенстве концентраций двух фаз.

PACS: 72.80.Ng; 72.20.Ht

1. Как известно, случайно-неоднородные среды наиболее изучены в двумерном случае. Это обусловлено дополнительной симметрией двумерных уравнений постоянного тока и закона Ома

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{e} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{j} = \tilde{\sigma}\mathbf{e}, \tag{2}$$

и их инвариантностью относительно линейных преобразований поворота:

$$\mathbf{j} = a\mathbf{j}' + ib\mathbf{e}', \quad \mathbf{e} = c\mathbf{e}' + id\mathbf{j}'. \tag{3}$$

Здесь векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{e}$ — электрические ток и поле, $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 + i\beta)$ — тензор проводимости среды в магнитном поле, σ — проводимость, $\beta = \mu B$ — холловский фактор, μ — подвижность частицы, коэффициенты a, b, c и d — действительные. Мнимая единица i описывает поворот на $\pi/2$ в комплексной плоскости. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости. Используя преобразования (3), получим выражение для тензора проводимости штрихованной системы:

$$\tilde{\sigma} = \frac{b + ia\tilde{\sigma}}{d\tilde{\sigma} + ia}. \tag{4}$$

Аналогичное выражение получается и для эффективного тензора проводимости штрихованной системы. В случае двухфазных случайно-неоднородных сред и равных концентраций из (4) следует выражение для эффективного тензора проводимости [1]. Отметим, что это выражение получено при равных концентрациях фаз (в одной точке по концентрации).

В настоящей работе вычислена эффективная проводимость трехфазных бездиссипативных (холловских) случайно-неоднородных сред и дано качественное описание полученных результатов. Возможность точного решения задачи основана на представлении преобразований Дыхне в форме дробно-линейных конформных преобразований

*E-mail: varkhin@bsc.buryatia.ru

плоскости проводимости исходной среды на плоскость проводимости преобразованной штрихованной системы [2]. Согласно общей теории конформных преобразований, они задаются тремя точками на плоскости и их образами. Поэтому возможность преобразования трехфазной двумерной среды в подобную ей существует. Однако согласно [1] такая возможность реализуется только при одном значении проводимости третьей фазы: $\sigma = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. Мы покажем, что это ограничение становится несущественным при протекании тока в условиях квантового эффекта Холла ($\sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = \text{const}$) или, другими словами, при протекании тока по бездиссипативным фазам. Таким образом, возможно преобразование трехфазной холловской среды при любых величинах проводимостей и произвольных концентрациях фаз при условии, что концентрации двух фаз равны, но могут быть любыми по величине, как и концентрация третьей фазы (сумма трех концентраций равна единице). Это позволяет решить задачу об эффективной проводимости трехфазных случайно-неоднородных сред во всем интервале концентраций.

2. Для получения точного выражения для эффективной проводимости бездиссипативных трехфазных случайно-неоднородных сред еще раз вернемся к выражению, связывающему проводимости штрихованной и исходной систем (формула (4)). Будем рассматривать его как конформное отображение одной плоскости на другую [2]:

$$W = L(z) = \frac{b + iaZ}{dZ + ic}. \tag{5}$$

Перепишем выражение (4) в виде

$$d\sigma'\sigma - b = i(a\sigma - c\sigma). \tag{6}$$

Переставим фазы 1 и 2 местами: $\sigma_1' = \sigma_2$, $\sigma_2' = \sigma_1$. Это возможно при равных концентрациях фаз X_i:

$$X_1 = X_2. \tag{7}$$

Условие (7) существенно и будет использоваться ниже для получения макроскопической эквивалентности исходной и штрихованной систем. Тогда из (6) получим два соотношения между коэффициентами a, b, c, d:

$$a = -c, \quad d\sigma_1\sigma_2 - b = ia(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{8}$$

В случае действительных проводимостей, рассмотренном в [1], коэффициент a в соотношении (5) необходимо положить равным нулю, иначе получим комплексные выражения для действительных по условию задачи коэффициентов a, b, c и d. В этом случае возникает указанное выше ограничение на величину проводимости третьей фазы, из-за того что слишком мало параметров в задаче. Однако, если проводимости фаз считать чисто мнимыми — емкостными или индуктивными, $\sigma = i\omega L$, $\sigma = (i\omega C)^{-1}$, или чисто холловскими, $\sigma = i\sigma_{xy}$ (в режиме квантового эффекта Холла: $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \text{const}$), и коэффициент a можно считать ненулевым, и коэффициенты b и d будут действительными. Тогда условие для проводимости третьей фазы будет просто еще одним условием для определения всех коэффициентов преобразований (3):

$$d\sigma_3\sigma_3' - b = ia(\sigma_3 + \sigma_3'). \tag{9}$$

Пусть $\sigma_3' = \sigma_3$, тогда штрихованная система при дополнительном условии (6) оказывается макроскопически эквивалентной исходной: $\sigma_e' = \sigma_e$. Из формулы (6) также получим выражение для эффективной проводимости трехфазной случайно-неоднородной среды во всем интервале концентраций:

$$\sigma_e = i\left\{\frac{a}{d} \pm \left[\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{d}\right)\frac{a}{d}\right]^{1/2}\right\}, \tag{10}$$

коэффициенты a, b, c и d определены выше условиями (8), (9).

3. Обсудим полученный результат. При выводе формулы (10) нигде никаких ограничений на величину концентраций фаз, кроме условия (6), не использовалось. Следовательно, полученный результат справедлив при любых концентрациях фаз, а именно, при равенстве концентраций двух фаз и любых значениях по величине (сумма концентраций всех фаз равна единице).

Рассмотрим предельные случаи, вытекающие из формулы (10) и проясняющие ее смысл. При $\sigma_3 = 0$ согласно (8) коэффициент b обращается в нуль и для эффективной проводимости получаем два решения:

$$\sigma_e^{(1)} = 0, \quad \sigma_e^{(2)} = 2i\frac{a}{d} = i\sigma_{xy}^{(e)} = i\frac{2\sigma_{xy}^{(1)}\sigma_{xy}^{(2)}}{\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)}}. \tag{11}$$

Поясним полученные результаты. При концентрациях первой и второй проводящих фаз таких, что $X_1 + X_2 \leq 1/2$, нельзя образовать бесконечный кластер — совокупность проводящих путей, уходящих на бесконечность, — поэтому эффективная проводимость среды равна нулю. Это соответствует первому нулевому решению. При концентрации первой и второй фаз больше критической эффективная проводимость меняется скачком и остается постоянной при уменьшении концентрации диэлектрической фазы. Это означает, что при изменении концентрации диэлектрика электрическое поле в проводящих холловских фазах возрастает таким образом, чтобы полный ток в системе оставался постоянным и, следовательно, эффективная холловская проводимость также остается постоянной.

При $\sigma_3 = \infty$ обращается в нуль коэффициент d: $d = 0$. Эффективная проводимость также принимает два значения:

$$\sigma_e^{(1)} = \infty, \quad \sigma_e^{(2)} = i\frac{b}{2c} = i\sigma_{xy}^{(e)} = i(\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)})/2. \tag{12}$$

Смысл результатов также понятен. При сумме концентраций $X_1 + X_2$, меньшей критической, эффективная проводимость среды определяется сверхпроводящей фазой, шунтирующей металлические фазы. При сумме концентраций больше критической, эффективная проводимость определяется сопротивлением металлических фаз. Отметим также, что в рассмотренных выше случаях эффективная проводимость достигает своих предельных значений: минимального и максимального возможных значений.

Аналогичным образом обстоит дело и при конечном значении проводимости третьей фазы. При сумме концентраций первой и второй фаз ниже пороговой, когда невозможно построить бесконечный кластер без третьей фазы, эффективная проводимость среды равна одному значению. При переходе порога протекания по совокупной концентрации первой и второй фаз эффективная проводимость меняется скачком и проводимость третьей фазы также участвует в определении полной величины эффективной проводимости иным, вполне определенным способом. Подчеркнем еще раз независимость эффективной проводимости от концентрации фаз в широком интервале концентраций.

Для случайной смеси холловской и металлической фаз в работе [3] было показано, что в широком интервале концентраций, именно, пока имеется протекание по холловской фазе, эффективные характеристики такой системы постоянны и равны соответствующим значениям для холловской среды. Это соответствует протеканию тока в описанной системе с минимальным — нулевым выделением тепла. К сожалению, аналогичные рассуждения не применимы для изучаемой системы, где все фазы бездиссипативны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-02-17355).

Литература

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110, 641 (1970).
2. В. Е. Архинчеев, Письма в ЖЭТФ **67**, 951 (1998).
3. V. E. Arkhincheev and E. G. Batiyev, Solid State Commun. **12**, 1059 (1989).