ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 6(12), стр. 2045–2057

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ БЕРЕЗИНСКОГО—КОСТЕРЛИТЦА—ТАУЛЕССА В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С ВНУТРЕННИМИ СИММЕТРИЯМИ

*С. А. Булгадаев**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 1999 г.

Исследуются фазовые переходы типа Березинского—Костерлитца—Таулесса (БКТ) в двумерных системах с внутренними непрерывными абелевыми симметриями. Для того чтобы фазовые переходы имели место, необходима конформная инвариантность кинетической части действия системы, а вакуумное многообразие должно быть вырожденным и иметь абелеву дискретную гомотопическую группу π_1. В этом случае топологические возбуждения имеют логарифмически расходящуюся энергию и могут быть описаны эффективными теориями, обобщающими двумерную эвклидову теорию синус-Гордон, которая является эффективной теорией исходной XY-модели. В частности, найдены эффективные действия для киральных моделей на максимальных абелевых торах T_G простых компактных групп Ли G. Найдены критические свойства возможных эффективных теорий и показано, что они характеризуются числами Кокстера h_G решеток серий $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{Z}$ и могут быть интерпретированы как свойства конформных теорий с целым центральным зарядом $C = n$, где n — ранг групп π_1 и G. Обсуждается также возможность восстановления полной симметрии группы G в массивной фазе.

PACS: 11.10.Kk; 11.15.Kc; 05.70.Fh; 05.70.Jk

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие возможности фазового перехода в двумерной XY-модели [1] с самого начала привлекло большой интерес теоретиков из-за его необычных свойств. Прежде всего, казалось, что существование такого фазового перехода противоречит теоремам Пайерлса—Ландау [2, 3] и Боголюбова—Голдстоуна [4, 5], утверждающим, что спонтанное нарушение симметрии и спонтанная намагниченность не могут существовать в низкоразмерных системах ($d \leq 2$) с непрерывной симметрией [6, 7]. Во-вторых, из-за отсутствия спонтанной намагниченности корреляционные функции в низкотемпературной фазе должны убывать по степенному закону [8, 9]. Это означает, что вся низкотемпературная фаза должна быть безмассовой.

Все эти противоречия были блестяще разрешены в серии статей Березинского [10], Попова [11], Костерлитца и Таулесса [12, 13]. Они впервые показали важную роль топологических возбуждений — вихрей — с логарифмически расходящейся энергией в этих фазовых переходах. Существование вихрей связано с тем, что многообразие значений XY-модели $\mathscr{M} = S^1$ имеет нетривиальную топологию, описываемую дискретной абелевой гомотопической группой $\pi_1(\mathscr{M}) = \mathbb{Z}$, тогда как логарифмическая расходимость

*E-mail: bulgad@itp.ac.ru

энергии связана с конформной симметрией модели. Учет вихрей преобразует непрерывную компактную симметрию $U(1)$ в дуальную дискретную симметрию $Z_2 \times \mathbb{Z}$, где Z_2 — группа автоморфизмов окружности S^1, совпадающая с отражением $U(1) = S^1$. Аналогичные фазовые переходы имеют место в других системах с той же симметрией: двумерная SOS- и 6-вершинная решеточные модели, квантовые спиновые XXZ-цепочки [14] и эвклидова модель синус-Гордон с некомпактным полем [15–18]. Все эти системы принадлежат к одному критическому классу универсальности. Модель синус-Гордон может рассматриваться как эффективная теория фазового перехода БКТ, аналогично тому как теории Гинзбурга—Ландау—Вильсона являются эффективными теориями фазового перехода второго рода (см., например, [19]).

Фазовый переход БКТ также может быть связан с конформной теорией, но здесь есть один нюанс. В отличие от обычного фазового перехода второго рода в двумерных системах, где бесконечномерная конформная симметрия с рациональным центральным зарядом C существует только в точке фазового перехода [20], в системах с фазовым переходом БКТ бесконечномерная конформная симметрия с целым центральным зарядом $C = 1$ существует не только в точке перехода (с логарифмическими поправками), но и во всей низкотемпературной фазе.

Отсюда следует, что фазовый переход БКТ тесно связан с двумя фундаментальными свойствами двумерных систем: 1) с нетривиальной топологией, описываемой дискретной абелевой гомотопической группой π_1, 2) с конформной симметрией. Представляет интерес рассмотрение свойств фазовых переходов типа БКТ в системах, обладающих кроме этих двух свойств еще и внутренними симметриями.

Такие системы связаны, например, с торами, которые являются естественным обобщением окружности S^1 с необходимыми свойствами. Легко увидеть, что те же критические свойства имеют место в двумерных киральных моделях на торах T^n с $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$. Этот случай эффективно сводится к предыдущему, так как важны только возбуждения с минимальными топологическими зарядами $e_i = \pm 1, i = 1, ..., n$, а такие заряды, отвечающие разным окружностям, не взаимодействуют друг с другом. Такие же свойства имеют σ-модели на общих торах, связанных с произвольными невырожденными решетками L [21]. Но, как было показано в [21], кроме таких торов существуют максимальные абелевы торы T_G простых компактных групп Ли G, которые имеют (в случае односвязных G) $\pi_1(T_G) = L_v \neq \mathbb{Z}^n$ (здесь L_v — решетка дуальных корней соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$) и в которых возбуждения с различными векторными топологическими зарядами взаимодействуют друг с другом.

Поэтому возникает следующий вопрос: как критические свойства вышеупомянутого топологического фазового перехода будут зависеть от G? Такой вопрос важен, например, для теории струн, где рассматривается в различных аспектах компактификация на T_G (более точно, до сих пор она рассматривалась только на невырожденных торах $T^n = T_{U(n)}$ или $T_L = \mathbb{R}^n/L$, где L — невырожденная решетка ранга n) [22, 23], или для киральных моделей на G с редуцированной (или частично нарушенной) симметрией $G \searrow T_G$ [24].

В этой статье будет показано, что:

1) все критические свойства нелинейных σ-моделей на компактных T_G могут быть описаны в терминах эффективных теорий поля с дискретными симметриями, обобщающими теорию синус-Гордон;

2) эти свойства зависят только от числа Кокстера h_L соответствующей решетки топологических зарядов L^t;

3) различные классы универсальности фазового перехода типа БКТ определяются сериями $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{Z}$ целочисленных решеток;

4) все критические и низкотемпературные свойства этих σ-моделей (кроме логарифмических поправок в точке фазового перехода) могут быть описаны соответствующими конформными теориями с целым центральным зарядом $C = n$, где n — ранг групп $\pi_1(T_G)$ и G.

Обсуждается также возможное восстановление полной группы симметрий G в массивной (высокотемпературной) фазе.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ σ-МОДЕЛЬ НА T_G И ВИХРИ

Рассмотрим двумерные эвклидовы киральные теории поля на T_G, обобщающие нелинейную σ-модель на окружности S^1 или непрерывную XY-модель. Их действие имеет следующий вид:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\alpha}\int d^2x\, \mathrm{Tr}_\tau(\mathbf{t}_\nu^{-1}\mathbf{t}_\nu) = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\int d^2x\, \mathrm{Tr}_\tau(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}_\nu)^2 = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}N_\tau \int d^2x (\boldsymbol{\phi}_\nu)^2, \tag{1}$$

где $\mathbf{t} = \exp\{2\pi i(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi})\} \in T_G$, $\mathbf{H} = (H_1, ..., H_n)$ принадлежит $\mathcal{C}$ — максимальной подалгебре Картана соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$, $[H_i, H_j] = 0$, n — ранг группы G, $\boldsymbol{\phi}_\nu = \partial_\nu \boldsymbol{\phi}$, $\nu = 1, 2$. Здесь использовано свойство изотропности системы весов $\{\mathbf{w}\}_\tau$ любого $\tau(G)$-представления, являющееся следствием инвариантности систем весов относительно дискретной группы Вейля $W_G \in O(n)$,

$$\sum_a w_i^a w_k^a = N_\tau \delta_{ik}, \; a = 1, ..., \dim \tau(G). \tag{1a}$$

В дальнейшем будет удобно включить константу N_τ как нормализующий фактор в определение следа Tr_τ. Это дает каноническую эвклидову метрику в пространстве топологических зарядов.

Теории (1), как и другие двумерные киральные модели, инвариантны относительно действия прямого произведения правой (R) и левой (L) групп $N_G^{R(L)}$, которые являются полупрямым произведением групп T_G и W_G:

$$N_G = T_G \times W_G. \tag{2}$$

Группа N_G, называемая нормализатором тора T_G, есть группа симметрии тора T_G.

Эти теории являются многокомпонентным обобщением XY-модели, имеющим свойства аналогичные свойствам XY-модели:

1) нулевую бета-функцию $\beta(\alpha)$ (из-за плоскости T_G) и не нарушенную конформную симметрию при неучете топологии;

2) нетривиальную гомотопическую группу π_1 и соответствующие вихревые решения.

Классические уравнения теорий (1)

$$(\partial_\nu)^2(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}) = 0 \tag{3}$$

имеют следующие вихревые решения в области $R > r > a$, где R — радиус системы, a — коротковолновый обрезающий параметр (например, размер ядра вихря):

$$\mathbf{t}(\vartheta) = \exp\{2\pi i(\mathbf{H}\phi(\vartheta))\}, \quad \phi = \frac{1}{2\pi}\mathbf{q}(\vartheta). \tag{4}$$

Здесь ϑ — угловая, а r — радиальная координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{q}$ — векторный топологический заряд вихря, $\mathbf{q}\in L^t_\tau = L_\tau{}^{-1}$, L^t_τ — решетка всех возможных топологических зарядов τ-представления, $L_\tau{}^{-1}$ — решетка векторов, обратных всем весам τ-представления:

$$\mathbf{q} \in L^t_\tau, \quad \mathbf{w}_a \in \{\mathbf{w}_\tau\}, \quad (\mathbf{q}\mathbf{w}_a) \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Для минимальных фундаментальных представлений односвязных групп $\tau(G) = \min$ решетка $L^t_{min} = L_v$, а для присоединенных представлений $\tau = ad$ решетка $L^t_{ad} = L_r{}^{-1} = L_{w^*}$, где L_r — решетка корней группы G, а L_{w^*} — решетка дуальных весов или решетка весов дуальной группы G^*. Именно эти решения для групп G, таких что $L^t_\tau \supseteq L_w$, могут дать топологическую интерпретацию всех их квантовых чисел [21]. Энергия этих вихрей логарифмически расходится:

$$E = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\int(\partial_\mu\phi)^2 d^2x = \frac{2\pi}{2\alpha}\mathbf{q}^2\ln\left(\frac{R}{a}\right). \tag{6}$$

В силу формулы (2), которая определяет эффективную метрику в пространстве топологических зарядов [21], имеется логарифмическое взаимодействие между вихрями с различными векторными топологическими зарядами:

$$E = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\frac{2\pi}{2\alpha}\ln\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{a}. \tag{7}$$

Общее N-вихревое решение имеет следующий вид [20]:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{q}_i\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_i}{x - x_i}\right), \tag{8}$$

$$\mathbf{q}_i \in L^t_\tau, \quad (\mathbf{q}_i\mathbf{w}_a) \in \mathbb{Z}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Энергия N-вихревого решения с нулевым полным топологическим зарядом $\sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i = 0$ равна

$$E_N = \sum_i E^0_{q_i} + E_{Nint}, \quad E^0_{q_i} = \frac{1}{2\alpha}C(a)(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i),$$

$$E_{Nint} = \frac{2\pi}{2\alpha}\sum_{i\neq k}^{N}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_k)\ln\frac{|x_i - x_k|}{a}, \tag{9}$$

где $E^0_{q_i}$ — «собственная энергия» (или энергия ядра) вихря с топологическим зарядом $\mathbf{q}_i$, а $C(a)$ — неуниверсальная константа, зависящая от способа регуляризации ядра вихря. Только такие решения дают конечный вклад в статистическую сумму теории $\mathcal{K}$. Так как

$E_q \sim q^2$ и $\mathbf{q} \in L^t$, максимальный вклад в каждом N-вихревом секторе решений будут давать вихри с минимальным $|q|_i$. Поэтому в квазиклассическом приближении (или в низкотемпературном разложении) можно представить статистическую сумму теории (5)

$$\mathscr{Z} = \int D\phi \exp(-\mathscr{S}[\phi]) \tag{10}$$

в виде большой статистической суммы классического, в целом нейтрального, кулоновского газа вихревых решений с минимальными векторными топологическими зарядами $\mathbf{q}_i \in \{\mathbf{q}\}_\tau$, где $\{\mathbf{q}\}_\tau$ — набор минимальных векторов решетки L^t_τ:

$$\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_0 \mathscr{Z}_{CG}, \quad \mathscr{Z}_{CG} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\mu^{2N}}{N!} \sum_{\{\mathbf{q}\}}{}' \mathscr{Z}_N(\{\mathbf{q}\}|\beta). \tag{11}$$

Здесь суммирование $\sum'$ ведется по всем нейтральным конфигурациям минимальных зарядов $\mathbf{q}_i \in \{\mathbf{q}\}_\tau$ с условием $\sum_1^N \mathbf{q}_i = 0$, $\mathscr{Z}_0$ — статистическая сумма свободного безмассового изовекторного бозонного поля, соответствующая «спиновым волнам» XY-модели,

$$\mathscr{Z}_0 = \int D\phi \exp(-\mathscr{S}_0[\phi]), \tag{12}$$

$$\mathscr{Z}_N(\{\mathbf{q}\}|\beta) = \prod_{i=1}^{N} \int d^2x_i \exp\left(-\beta H_N(\{\mathbf{q}\})\right), \tag{13}$$

$$H_N(\{\mathbf{q}\}) = \sum_{i<j}^{N} (\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) D(x_i - x_j), \tag{14}$$

$$D(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\exp\left(i(\mathbf{kx})\right) - 1\right] \frac{f(ka)}{k^2} \underset{|x|\gg a}{\sim} \frac{1}{2\pi} \ln\left|\frac{x}{a}\right|, \tag{15}$$

где

$$\mu^2 = a^{-2} y^2 (\det)^{-1/2}, \quad y^2 = \exp(-E_q^0) \tag{15а}$$

— химическая активность кулоновского газа, det является детерминантом квадратичных флуктуаций на фоне вихревого решения (дальше мы положим $\det = 1$),

$$\beta = 4\pi^2/\alpha, \tag{15б}$$

$f(ka)$ — регуляризующая функция, такая что

$$\lim_{k\to 0} f(ka) = 1, \quad \lim_{k\to\infty} f(ka) = 0.$$

Как учет вихрей изменяет исходную группу симметрии N_G σ-модели станет ясно в следующем разделе.

3. ДУАЛЬНОСТЬ КОМПАКТНЫХ И НЕКОМПАКТНЫХ ТЕОРИЙ

В случае XY-модели в длинноволновом квазиклассическом приближении имеется очень важное соотношение между статистической суммой компактной киральной теории (1) на S^1 и статистической суммой некомпактной теории синус-Гордон [15–17] с действием (по модулю $\mathscr{Z}_0$)

$$\mathscr{S}_{SG} = \int d^2x \left(\frac{1}{2\beta}(\partial_\mu \phi)^2 - 2\mu^2 \cos\phi \right). \tag{16}$$

Это действие является инвариантным относительно дуальной дискретной группы $Z_2 \times \mathbb{Z}$. Аналогичное соотношение существует между компактными киральными моделями на T_G и некомпактными обобщенными теориями синус-Гордон.

Для того чтобы увидеть это, заметим, что большая статистическая сумма $\mathscr{Z}_{CG}$ из (11) в свою очередь эквивалентна статистической сумме некомпактной скалярной изовекторной теории поля:

$$\mathscr{Z}_{CG} = \int D\boldsymbol{\phi} \exp(-\mathscr{S}_{eff}), \quad \mathscr{S}_{eff} = \int \frac{1}{2\beta}(\partial\boldsymbol{\phi})^2 - \mu^2 V(\boldsymbol{\phi}), \tag{17}$$

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\{\mathbf{q}\}} \exp\{i(\mathbf{q}\boldsymbol{\phi})\}, \tag{18}$$

где суммирование идет по набору минимальных топологических зарядов $\{\mathbf{q}\}$, а $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^n$ [25]. Строго говоря, теории (17) с произвольными параметрами μ и β являются более общими, чем исходные σ-модели (1). Последние имеют только один параметр — константу взаимодействия α. Представление σ-моделей в виде (11), (17) дает их вложение в общие теории (17), так как имеются ограничения (15а), (15б), связывающие параметры μ и β. Этот факт будет важен ниже, при обсуждении возможности увеличения симметрии σ-моделей (разд. 6).

Так как набор минимальных зарядов $\{\mathbf{q}\}_\tau$ инвариантен относительно дуальной группы Вейля W_{G^*}, то можно увидеть, что учет вихрей редуцирует исходную группу симметрии N_G в дискретную дуальную группу $W_{G^*} \times L_q^{-1}$. Здесь решетка L_q^{-1} — решетка периодичности потенциала V и, следовательно, является обратной ко всем $\mathbf{q} \in \{\mathbf{q}\}$. Из определения этих решеток следует, что $L_q^{-1} = L_\tau$. Эта дуальная группа обобщает дуальную группу $Z_2 \times \mathbb{Z}$ XY-модели.

Итак, в этом квазиклассическом и длинноволновом приближении компактная теория на торе T_G с непрерывной симметрией N_G оказывается эквивалентной (опять по модулю $\mathscr{Z}_0$) некомпактной теории с периодическим потенциалом и бесконечной дискретной симметрией. Эти потенциалы содержат сумму по всем минимальным векторам $\{\mathbf{q}\}$ и могут совпадать с характерами некоторых представлений групп G. Например, в случае $L_\tau^{-1} = L_v$ суммирование в (18) идет по всем дуальным минимальным корням. Поэтому соответствующие потенциалы V для просто устроенных групп из серий A, D, E совпадают с характерами присоединенных представлений этих групп (по модулю константы, отвечающей нулевому весу). В этом случае общие теории (17) могут описывать системы с симметрией G, нарушенной до N_G [25].

Некомпактные теории (17) можно рассматривать также как соответствующие линейные σ-модели. В результате оказывается, что компактные нелинейные σ-модели на торах T_G эквивалентны (в рассматриваемом приближении) некомпактным линейным σ-моделям на картановых торах дуальной группы T_{G^*}.

Для дальнейшего рассмотрения нужно классифицировать все возможные эффективные теории этого типа. Из (17), (18) следует, что они определяются наборами минимальных векторов $\{\mathbf{q}\}$ решетки L^t_τ, которая удовлетворяет следующему ограничению:

$$L_{w^*} \supseteq L^t_\tau \supseteq L_v. \tag{19}$$

Для $\tau = \min$ решетка $L^t_\tau = L_v$, а для $\tau = \mathrm{ad}$ решетка $L^t_\tau = L_{w^*}$. Решетки L_v и L_{w^*} отличаются на фактор, который изоморфен центру Z_G группы G:

$$L_{w^*}/L_v = Z_G.$$

Поэтому множество $\{\mathbf{q}\}$ может меняться от множества минимальных векторов (оно определяет так называемый многогранник Вороного или ячейку Вигнера—Зейтца соответствующей решетки) решетки весов до множества минимальных векторов решетки корней. Все возможные случаи определяются подгруппами группы центра Z_G. Для групп G с $Z_G = 1$ решетки L_v и L_{w^*} совпадают.

4. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ НА T_G

В этом разделе мы рассмотрим топологические фазовые переходы в киральных моделях на T_G, используя полученную выше приближенную эквивалентность этих теорий некомпактным теориям (17), обобщающим теорию поля синус-Гордон. Эти теории могут рассматриваться как эффективные теории для топологических фазовых переходов, аналогично тому как теории Гинзбурга—Ландау—Вильсона являются эффективными теориями фазовых переходов второго рода [19].

Исследование фазовых переходов типа БКТ для всех эффективных теорий поля вида (17) методом ренормгруппы было выполнено в работах [25]. Там было показано, что новые критические свойства могут иметь только теории, связанные с четными целочисленными решетками типа $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$. Они имеют структуру решеток корней соответствующих простых групп G из так называемых просто устроенных групп серий A, D, E. Все теории, связанные с другими решетками, имеют те же критические свойства, что и теория синус-Гордон или ее суперпозиции, связанные с решеткой $\mathbb{Z}^n$. Поэтому мы дадим здесь только краткий обзор полученных результатов, уделяя главное внимание свойствам симметрии и универсальности.

При ренормировании ренормируются оба параметра μ и β. Удобно ввести в рассмотрение два безразмерных параметра

$$(\mu a)^2 = g, \quad \delta = \frac{\beta q^2 - 8\pi}{8\pi}, \tag{20}$$

где q^2 — квадрат нормы минимальных векторных топологических зарядов из $\{\mathbf{q}\}$. Теории (17) являются ренормируемыми, только если векторы из $\{\mathbf{q}\}$ принадлежат некоторой решетке (в нашем случае L^t_τ). Новые критические свойства могут появиться, только если геометрия множества $\{\mathbf{q}\}$ такова, что каждый вектор $\mathbf{q} \in \{\mathbf{q}\}$ может быть представлен в виде суммы двух других векторов из $\{\mathbf{q}\}$ [25]. Последнее свойство является очень ограничительным и совпадает с определением корневых систем $\{\mathbf{r}\}$ простых групп из серий A, D, E [25] или с определением системы корней четных целочисленных (в некотором масштабе) решеток типов $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ [26]. Множества минимальных корней (или минимальных дуальных корней) всех простых групп принадлежат четырем сериям целочисленных решеток $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{Z}$. Для теорий (17), для которых множества $\{\mathbf{q}\} \notin \mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$, все критические свойства будут такими же, как и для теорий с $\{\mathbf{q}\} \in \mathbb{Z}^n$ [25].

Уравнения ренормгруппы для теорий (17) с $\{\mathbf{q}\}$, принадлежащими решеткам серий $G = A, D, E$, имеют следующий вид [25]:

$$\frac{dg}{dl} = -2\delta g + B_G g^2, \quad \frac{d\delta}{dl} = -C_G g^2. \tag{21}$$

Здесь $B_G = \pi\theta_G$, θ_G — кратность воспроизведения потенциала $V(\phi)$ при ренормировании (17) или число различных способов представления каждого корня в виде суммы двух других корней, $C_G = 2\pi K_G$, где K_G — значение второго оператора Казимира в присоединенном представлении (где $\mathbf{w}_a = \mathbf{r}_a$)

$$\sum_a r_i^a r_j^a = K_G \delta_{ij}. \tag{22}$$

Уравнения ренормгруппы вида (21) с коэффициентами, соответствующими случаю $G = A_2$, были получены впервые в [27] при исследовании плавления двумерных треугольных решеток. Для решеток, не принадлежащих сериям $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$, уравнения ренормгруппы имеют вид (21) с коэффициентом $B_G = 0$.

Значение второго оператора Казимира K_G для групп серий A, D, E может быть выражено в терминах соответствующего числа Кокстера h_G:

$$K_G = 2h_G, \quad h_G = \frac{\text{(число корней)}}{\text{(ранг группы)}}. \tag{23}$$

Это определение числа Кокстера совпадает с таковым для числа Кокстера соответствующих решеток из серий $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$. Коэффициент B_G может быть вычислен разными способами и тоже выражается через число Кокстера:

$$\theta_G = K_G - 4 = 2(h_G - 2). \tag{23a}$$

Итак, мы видим, что все коэффициенты в уравнении ренормгруппы выражаются через число Кокстера h_G или через значение второго оператора Казимира K_G. Уравнения ренормгруппы (21) имеют две сепаратрисы [25, 27]:

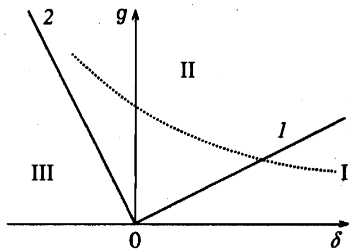
$$u_{1,2} \equiv \left(\frac{g}{\delta}\right)_{1,2} = \frac{1}{2C_G}\left[\pm(B_G^2 + 8C_G)^{1/2} - B_G\right], \tag{24}$$

где u_1 соответствует линии фазового разделения. Критический индекс ν_G, определяющий расходимость корреляционной длины ξ при приближении к точке перехода по температуре T сверху,

$$\xi \sim a\exp(A\tau^{-\nu_G}), \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c},$$

дается следующим выражением:

$$\nu_G = 1/\kappa_G = u_1\left[(B_G/C_G)^2 + 8/C_G\right]^{-1/2}, \tag{25}$$



Схематичная фазовая диаграмма

где $1/\kappa_G$ — показатель Ляпунова на сепаратрисе *1* [25]. Подставляя в (24) соответствующие значения для коэффициентов, получаем для наклона сепаратрис следующие значения:

$$u_{1,2} = \begin{cases} 1/\pi h_G, \\ -1/2\pi. \end{cases} \tag{26}$$

Отметим, что сепаратриса $u_2 = -1/2\pi$ не зависит от G и равна универсальной константе. Этот факт оказывается очень важным для возможности восстановления полной симметрии группы G в массивной (высокотемпературной) фазе (см. ниже разд. 6). Схематичная фазовая диаграмма приведена на рисунке.

Пунктирная линия начальных значений соответствует исходной σ-модели. Эта линия определяется зависимостями параметров β и μ от константы взаимодействия α (уравнения (15а), (15б)). Низкотемпературной фазе (декомпактифицированной, безмассовой) отвечает область I, другие области отвечают высокотемпературной (компактной, массивной) фазе. В области I корреляционная длина $\xi = \infty$, а в области II, вблизи сепаратрисы *1*,

$$\xi \sim a\exp(A\tau^{-\nu_G}), \quad \nu_G = 2/(2+h_G) = 4/(4+K_G). \tag{27}$$

Используя известные значения для чисел Кокстера h_G и сведения о геометрии множеств минимальных дуальных корней, получаем следующие выражения для критических индексов ν_G [25]:

$G:$	A_n	B_n	C_n	D_n	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$\nu_G:$	$\dfrac{2}{n+3}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{16}$

Зависимость критических свойств теорий (1), (17) только от такой, достаточно грубой, характеристики групп как число Кокстера h_G, или K_G, приводит к их совпадению для довольно разных групп. В частности, интересно отметить, что группы $D_{16} = O(32)$ и E_8, используемые при построении безаномальных струнных теорий [22], имеют одинаковые индексы ν_G (вместе с группой A_{29}). Наибольшее число возможных значений ν_G дается серией A_n: $1/k$ и $2/(2k+1)$, где k — целое. Для теорий с потенциалами V, содержащими множества минимальных корней, все индексы остаются неизменными, кроме ν_{B_n} и ν_{C_n}, которые переходят друг в друга из-за взаимной дуальности этих групп.

5. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ФАЗА И КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ

Равенство корреляционной длины $\xi \to \infty$ везде в низкотемпературной фазе означает существование конформной симметрии на больших расстояниях. Это можно увидеть также из ренормированного эффективного действия $\mathcal{S}_{eff}$ теории, которое в инфракрасном (ИК) пределе имеет следующий асимптотический вид:

$$\mathcal{S}_{eff} = \int d^2x \frac{1}{2\bar{\beta}} (\partial\phi)^2, \tag{28}$$

где $\bar{\beta}$ — значение ренормированного параметра $\beta(l)$ в ИК-пределе

$$\bar{\beta} = \lim_{l\to\infty} \beta(l). \tag{29}$$

В точке фазового перехода $\bar{\beta} = \beta^* = 8\pi/q^2_{min}$. В других точках низкотемпературной фазы $\bar{\beta}$ зависит от начальных значений параметров системы. Хорошо известно, что действие (28) описывает свободную конформную теорию с центральным зарядом $C = n$, где n — ранг группы G, который определяет и ранг тора T_G, и ранг группы $\pi_1(T_G)$. Отсюда следует, что длинноволновые низкотемпературные свойства σ-моделей, определенных на разных торах T_G, будут одинаковыми для всех групп с равным рангом n. Только логарифмические поправки в точке фазового перехода будут зависеть от группы G через число Кокстера h_G. В этой связи становится ясно, почему критические индексы зависят только от h_G или K_G. Это согласуется с тем фактом, что на компактных группах все квантовые аномалии тоже зависят только от h_G (или дуального числа Кокстера $\tilde{h}_G$) [28]. Здесь следует отметить, что ν_G совпадает с «экранирующим» множителем в формуле для центрального заряда C_k аффинной алгебры $\hat{G}$ [28],

$$C_k = \frac{k}{k + h_G} \dim G, \tag{30}$$

на уровне $k = 2$ или в формуле для C_k в «косетной» реализации минимальных унитарных конформных моделей $\hat{G}_k \otimes \hat{G}_1 / \hat{G}_{k+1}$ [29],

$$C_k = n \left(1 - \frac{h_G(h_G + 1)}{(h_G + k)(h_G + k + 1)} \right), \tag{31}$$

на уровне $k = 1$. Из (31) и [29] также следует, что точка фазового перехода в σ-модели на T_G ($G = A, D, E$) является предельным случаем $k \to \infty$ последовательности минимальных унитарных конформных моделей, отвечающих соответствующим расширенным конформным группам W_G.

Тот факт, что в низкотемпературной фазе теория эффективно становится свободной, позволяет вычислить корреляционные функции. Например, для корреляционных функций экспонент от поля, получаются следующие выражения:

$$\left\langle \prod_{s=1}^{t} \exp(i(\mathbf{r}_s \phi(x_s))) \right\rangle = \prod_{i\neq j}^{t} \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right|^{\bar{\beta}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)/2\pi}, \quad \sum_{i=1}^{t} \mathbf{r} = 0. \tag{32}$$

В точке фазового перехода (где $\bar{\beta} = \beta^* = 8\pi/q^2 = 4\pi$) у них появляется дополнительный логарифмический фактор, связанный с «нуль-зарядным» поведением параметров g и δ

на критической сепаратрисе:

$$\prod_{i\neq j}^{t}\left(\ln\left|\frac{x_i-x_j}{a}\right|\right)^{\beta^*(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j)/2\pi A_G}=\prod_{i\neq j}^{t}\left(\ln\left|\frac{x_i-x_j}{a}\right|\right)^{h_G\cos(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j)}. \tag{33}$$

Здесь $A_G = 4/h_G$ — коэффициент в уравнении ренормгруппы для δ на критической сепаратрисе.

6. МАССИВНАЯ ФАЗА, АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВОБОДА И ГЛОБАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Области II и III отвечают в ИК-пределе высокотемпературной (на языке статистической физики), массивной (на языке теории поля), фазе. В ультрафиолетовом (УФ) пределе область III будет асимптотически свободна. Сепаратриса *2* с наклоном $u_2 = -1/2\pi$ тоже играет важную роль. В УФ-пределе она является границей асимптотически свободной области III. Существует также другая возможность увеличения группы симметрии исходной нелинейной σ-модели на этой сепаратрисе. На классическом уровне σ-модель (1) имеет две симметрии: 1) масштабную (или конформную) симметрию, 2) изотопическую глобальную симметрию $N_G = T_G \times W_G$. На квантовом уровне первая симметрия, вообще говоря, спонтанно нарушается в ИК-области вихрями (см. (11)). По этой причине σ-модель имеет в массивной фазе конечную корреляционную длину $\xi \sim m^{-1}$, где m — характерный массовый масштаб теории. Он должен зависеть от константы взаимодействия α или β. Поведение m около точки фазового перехода описывается формулой (27), где

$$\tau \sim \frac{\alpha-\alpha_c}{\alpha_c}.$$

В массивной фазе имеется другая область, сепаратриса 2, где зависимость $m(\alpha)$ тоже может быть найдена. Так как эта сепаратриса притягивает все ренормгрупповые траектории в массивной (или высокотемпературной) фазе, очень важно знать эффективный массовый масштаб на ней. В главном логарифмическом приближении по g он дается полюсом решения уравнения ренормгруппы на этой сепаратрисе [30] или формулой

$$m \sim \Lambda \exp\left(-\int^{g}\frac{dx}{\beta(x)}\right),$$

где $\Lambda \sim a^{-1}$ — УФ-обрезающий параметр в импульсном пространстве, $\beta(x)$ — β-функция на сепаратрисе *2*,

$$\beta(g) = 2\pi g^2 K_G/2 = 2\pi g^2 h_G.$$

Отсюда получаем

$$m \sim \Lambda \exp(-1/2\pi g h_G) = \Lambda \exp(-1/\pi g K_G). \tag{34}$$

Численный фактор в β-функции может меняться в зависимости от нормировки константы взаимодействия, но тот факт, что на сепаратрисе *2* $\beta \sim K_G \sim h_G$, является следствием вышеупомянутого свойства независимости наклона этой сепаратрисы u_2 от G.

Выражение (34) для массового масштаба на сепаратрисе *2*, зависящее только от K_G, совпадает с таковым для киральных моделей на группах G [30] и полученным из точного решения соответствующих киральных и фермионных теорий (в главном по g приближении) [31]

$$m \sim \Lambda \exp\left(-2\pi/(gK_G/2)\right).$$

Итак, показано, что на сепаратрисе *2* массовый масштаб совпадает (по крайней мере для групп $G = A, D, E$) с таковым в G-инвариантных теориях (киральных и фермионных) и может быть выражен только через значение оператора Казимира K_G или число Кокстера h_G универсальной формулой (наше $g \to g/(2\pi)^2$):

$$m \sim \Lambda \exp(-4\pi/gK_G) = \Lambda \exp(-2\pi/gh'_G). \tag{35}$$

Это означает, что на сепаратрисе *2* теории (1), (17) могут стать G-инвариантными. В пользу этого говорит также эквивалентность общих теорий (17) с $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{r}\}$ в случае $G = A_{n-1}, D_n, E_{6,7}$ фермионным теориям с теми же глобальными группами симметрии G [25a].

Из полученных результатов следует, что в массивной фазе киральных теорий на T_G ($G = A, D, E$) в минимальном представлении (когда $L^t_{min} = L_v$) имеется сильная зависимость массового масштаба от константы взаимодействия, которая интерполирует между формулой (27) вблизи точки фазового перехода и формулой (34) вблизи сепаратрисы *2*. В первой области теория имеет симметрию T_G, которая описывается его нормализатором $N_G = T_G \times W_G$, тогда как во второй области теория может стать более симметричной, G-инвариантной. Аналогичный кроссовер в $m(\alpha)$ имеет место и в σ-моделях на других группах и в других представлениях, но связь между свойствами симметрии в двух предельных областях в этих случаях остается не такой ясной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-02-17331 и 96-15-96861).

Литература

1. H. E. Stanley and T. A. Kaplan, Phys. Rev. Lett. **17**, 913 (1966).
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 627 (1937).
3. R. E. Peierls, Ann. Inst. Henry Poincare **5**, 177 (1935).
4. Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды, т. 3*, Наукова думка, Киев (1971).
5. J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
6. N. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
7. P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
8. T. M. Rice, Phys. Rev. **140**, 1889 (1965).
9. B. Jancovici, Phys. Rev. Lett. **19**, 20 (1967).
10. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
11. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).
12. J. M. Kosterlitz and J. P. Thouless, J. Phys. C **6**, 118 (1973).
13. J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **7**, 1046 (1974).

14. Р. Д. Бакстер, *Точнорешаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985) (R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press (1982)).
15. J. Jose, L. Kadanoff, S. Kirkpatrick, and D. Nelson, Phys. Rev. B **16**, 1217 (1977).
16. P. B. Wiegmann, J. Phys. C **11**, 1583 (1978).
17. T. Ohta, Prog. Theor. Phys. **60**, 968 (1978).
18. D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and G. Grinstein, J. Phys. A **13**, 585 (1980).
19. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
20. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984). Vl. S. Dotsenko and V. A. Fateev, Nucl. Phys. B **240**, 312 (1984); **251**, 691 (1985). D. Friedan, Z. Qiu, and S. H. Shenker, Phys. Rev. Lett. **53**, 1575 (1984). G. E. Andrews, R. J. Baxter, and P. J. Forrester, J. Stat. Phys. **35**, 193 (1984). D. A. Huse, Phys. Rev. B **30**, 3908 (1984).
21. С. А. Булгадаев, Письма в ЖЭТФ **63**, 758 (1996). S. A. Bulgadaev, Landau Institute preprint 29/05/97 (1997); e-print archive hep-th/9901035, ЖЭТФ **116**(10), (1999).
22. M. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstrings Theory*, Cambridge (1988), Vol. 1, 2. Я. И. Коган, Письма в ЖЭТФ **45**, 556 (1987). D. Gross and I. Klebanov, in *Proc. of the Trieste Spring School «String Theory and Quantum Gravity'91»*, World Scientific, Singapore (1991).
23. T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997). T. Banks and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **497**, 41 (1997).
24. S. A. Bulgadaev, *Talk given at Int. Conf. «Conformal Field Theories and Integrable Models»*, Chernogolovka, Russia (1996); Landau Institute preprint 02/06/97 (1997).
25. S. A. Bulgadaev, Phys. Lett. A **86**, 213 (1981); ТМФ **49**, 7 (1981); Nucl. Phys. B **224**, 349 (1983); Письма в ЖЭТФ **63**, 743 (1996); a) S. A. Bulgadaev, Nucl. Phys. B **224**, 349 (1983); Landau Institute preprint 27/05/97 (1997).
26. G. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packing, Lattices and Groups*, Springer-Verlag (1988), Vol. I, II.
27. D. R. Nelson, Phys. Rev. B **18**, 2318 (1978). D. R. Nelson and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **19**, 2457 (1979).
28. V. N. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1990).
29. P. Goddard, A. Kent, and D. Olive, Phys. Lett. B **152**, 88 (1985); Commun. Math. Phys. **103**, 105 (1986). V. A. Fateev and S. L. Lukyanov, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 507 (1988). T. Eguchi and S. K. Yang, Phys. Lett. B **224**, 373 (1989).
30. А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л. Д. Ландау, Москва (1995); (A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic Publishers (1987)).
31. E. Ogievetski and P. B. Wiegmann, Phys. Lett. B **168**, 360 (1986). C. Destri and H. J. de Vega, Preprint CERN-TH, 4895/87 (1987).