

НЕРАВНОВЕСНЫЙ ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА В СИСТЕМАХ ТУННЕЛЬНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВЫХ КОНТАКТОВ И В СЛОИСТЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Д. А. Рындык*

*Институт физики микроструктур Российской академии наук
ГСП-105, 603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 1999 г.

В работе рассматривается нестационарный эффект Джозефсона в системах туннельных сверхпроводниковых контактов и в слоистых сверхпроводниках (внутренний эффект Джозефсона) с учетом эффектов неравновесной сверхпроводимости. Получены кинетические и квазигидродинамические уравнения, описывающие самосогласованным образом динамику джозефсоновских фаз и неравновесных квазичастиц. Показано, что неравновесность внутри слоев приводит к эффективному механизму взаимодействия между межслоевыми джозефсоновскими переходами, что может быть использовано для их синхронизации. Получены вольт-амперные характеристики цепочек внутренних контактов при различных параметрах.

PACS: 74.40.+k, 74.50.+g, 74.80.Dm

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см. обзоры [1–3]), что джозефсоновский контакт при ненулевом напряжении является источником нетепловых квазичастиц, которые релаксируют в берегах. Поэтому вблизи контакта всегда возникает область неравновесной сверхпроводимости. Избыточные квазичастицы вызывают изменение энергетической щели. Кроме того, возникает разность населенностей электроноподобной и дырочноподобной ветвей спектра элементарных возбуждений (электронно-дырочный разбаланс), что приводит к изменению химического потенциала сверхпроводящего конденсата (число сверхпроводящих электронов меняется, чтобы скомпенсировать избыточный заряд квазичастиц) и проникновению электрического поля в сверхпроводник. Если размер берегов достаточно велик, то основную роль играет диффузия квазичастиц (в грязных сверхпроводниках). Характерные пространственные масштабы определяются длиной энергетической релаксации $l_\epsilon = \sqrt{D\tau_\epsilon}$ и длиной релаксации разбаланса (глубиной проникновения электрического поля) $l_q = \sqrt{D\tau_q}$, D — коэффициент диффузии, τ_ϵ — время неупругой релаксации, τ_q — время релаксации разбаланса. Если же размер берегов в направлении диффузии меньше l_q , то образуется пространственно-однородное неравновесное состояние, релаксирующее с характерными временами τ_ϵ и τ_q . В этом случае степень неравновесности может быть значительно больше.

*E-mail: ryn@ipm.sci-nnov.ru

Эффекты квазичастичного взаимодействия между контактами исследовались ранее в системах мостиков Мерсеро—Нотариса [4, 5] и в $S-N-S$ -контактах [6, 7]. Неравновесное изменение энергетической щели в $S-I-S$ -структурах, интересным частным случаем которого является стимулирование (усиление) сверхпроводимости в двойном туннельном контакте с неравновесным средним слоем, рассматривалось в [8–11]. Важную роль может играть нарушение джозефсоновского соотношения $(d\varphi/dt) = (2e/\hbar)V$ между напряжением и разностью фаз на контакте в неравновесном случае (см. ниже). В слоистых сверхпроводниках с джозефсоновской связью между слоями неравновесные эффекты могут быть очень велики вследствие малой (3–10 Å) эффективной толщины слоев. В недавних работах [12–27] было проведено прямое наблюдение внутреннего эффекта Джозефсона в ВТСП. В работах [28–32] была отмечена необходимость учета неравновесных эффектов, и особенно нарушения равновесного джозефсоновского соотношения, при интерпретации эксперимента.

В разделе 2 работы рассмотрена элементарная теория неравновесного эффекта Джозефсона и приведены оценки для искусственных туннельных структур и ВТСП. В разделе 3 дан вывод кинетических и квазигидродинамических уравнений динамики квазичастиц в системах туннельных контактов. В разделе 4 рассмотрена динамика цепочки контактов, приведены результаты численных расчетов вольт-амперных характеристик и высокочастотного взаимодействия контактов.

2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

С микроскопической точки зрения основным процессом в неравновесном сверхпроводнике является изменение функции распределения квазичастиц, которое сопровождается изменением макроскопических характеристик конденсата: энергетической щели Δ , сдвига химического потенциала $\delta\mu$ и связанного с ним инвариантного потенциала Φ .

Изменение энергетической щели происходит при изменении симметричной по энергии части функции распределения n_ϵ (n_ϵ при $\epsilon > 0$ описывает распределение квазиэлектронов по энергиям, а n_ϵ при $\epsilon < 0$ — квазидырок) и в простейшем случае может быть найдено из уравнения самосогласования Элиашберга [33]

$$1 = \lambda \int_{\Delta}^{\theta_D} \frac{1 - n_\epsilon - n_{-\epsilon}}{(\epsilon^2 - \Delta^2)^{1/2}} d\epsilon. \quad (1)$$

Сдвиг химического потенциала конденсата в сверхпроводнике, напротив, определяется антисимметричной по энергии частью функции распределения [34–36]. В простейшем случае чистого сверхпроводника в пространственно-однородном квазистатистическом неравновесном состоянии распределение спаренных электронов по энергии дается выражением $v_k^2 = (1/2)(1 - \xi_k/\epsilon_k)$, где $\xi_k = \hbar^2 k^2/2m - \epsilon_F - \delta\mu$, $\epsilon_k = \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$ — спектр квазичастиц, $\delta\mu$ — сдвиг химического потенциала. Тогда плотность заряда при $\delta\mu \ll \epsilon_F$ определяется выражением

$$\rho = 2eN(0) \left[\delta\mu + \int_{\Delta}^{\infty} (n_\epsilon - n_{-\epsilon}) d\epsilon \right], \quad (2)$$

в котором первый член есть заряд конденсата, а второй — заряд квазичастиц, $N(0) = m\rho_F/2\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний на поверхности Ферми. Уравнение (2) является вторым уравнением самосогласования. В квазинейтральном случае ($\rho \approx 0$) получаем

$$\delta\mu = - \int_{\Delta}^{\infty} (n_{\epsilon} - n_{-\epsilon}) d\epsilon. \quad (3)$$

Это выражение отражает особенность зарядовых эффектов в сверхпроводниках: при возникновении электронно-дырочного разбаланса общая квазинейтральность может быть соблюдена за счет сверхпроводящих электронов.

Сдвиг химического потенциала может быть выражен через так называемый инвариантный потенциал: $\delta\mu = -e\Phi$,

$$\Phi(t) = \phi + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad (4)$$

где ϕ — электрический потенциал, θ — фаза параметра порядка, $\Phi = 0$ в равновесном состоянии. В чистом сверхпроводнике в квазиклассическом случае это соответствие следует прямо из вида спектра квазичастиц [35]. В общем случае именно калибровочно-инвариантный потенциал Φ входит в динамические уравнения. Выражение для заряда принимает вид

$$\rho = -2e^2 N(0)(\Phi - \Psi) = -\frac{1}{4\pi r_d^2}(\Phi - \Psi), \quad (5)$$

где

$$\Psi = \frac{1}{e} \int_{\Delta}^{\infty} (n_{\epsilon} - n_{-\epsilon}) d\epsilon$$

— потенциал электронно-дырочного разбаланса¹⁾, r_d — длина экранирования электрического поля.

В состоянии со сдвигом химического потенциала обычное соотношение $(d\varphi_{ij}/dt) = (2|e|\hbar)V_{ij}$ между джозефсоновской разностью фаз $\varphi_{ij} = [\theta_j - \theta_i] \text{sign } e$ и напряжением $V_{ij} = \phi_i - \phi_j$ нарушается. Вместо этого, используя определение Φ , получаем неравновесное соотношение Джозефсона

$$\frac{d\varphi_{ij}}{dt} = \frac{2|e|}{\hbar} V_{ij} + \frac{2|e|}{\hbar} (\Phi_j - \Phi_i). \quad (6)$$

Таким образом, в общем случае необходимо самосогласованным образом описывать динамику джозефсоновских фаз $\varphi_{ij}(t)$ и функций распределения $n_{\epsilon}^{(i)}(t)$ с учетом условий (1), (5) и с неравновесными выражениями для туннельного тока между берегами (слоями).

¹⁾ Определение потенциала Ψ именно таким образом удобно при получении динамических уравнений.

Основными параметрами, определяющими степень неравновесных эффектов любого типа в туннельных структурах и других системах со слабыми связями, являются произведения $\nu\tau_\epsilon$ и $\nu\tau_q$, где ν — так называемая туннельная частота, которая при малой толщине слоя $d_0 \ll l_\epsilon, l_q$ равна

$$\nu = \frac{1}{4e^2 N(0) R_N d_0}, \quad (7)$$

где R_N — сопротивление контакта в нормальном состоянии на единицу площади. Если $\nu\tau_\epsilon > 1$ или $\nu\tau_q > 1$, то возможно сильное искажение функции распределения квази-частиц.

Результаты оценок по некоторым последним работам с искусственными структурами представлены в таблице. На основании этих данных можно сделать следующие выводы. Во-первых, режим сильной неравновесности реализован в туннельных структурах на основе Al и Nb. Во-вторых, параметр $\nu\tau_\epsilon$ может быть значительно увеличен до значений $\nu\tau_\epsilon \gg 1$. В самом деле, $\nu \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствует очень малой прозрачности барьера $D \sim 10^{-7} - 10^{-6}$ ($\nu = v_F D / 4d_0$), и с большим запасом выполняется условие слабости контакта ($\nu \ll \Delta \sim 10^{12-13} \text{ с}^{-1}$). Таким образом, повышение параметра неравновесности на два-три порядка при увеличении прозрачности барьера представляется, в принципе, вполне возможным.

Искусственные структуры ($T = 4.2 \text{ К}$)

Структура	$N(0), 10^{34}$ эрг $^{-1}$ см $^{-3}$	$RS,$ Ом·см 2	$d_0,$ Å	$\nu, \text{с}^{-1}$	$\tau_\epsilon, \text{с}$	$\nu\tau_\epsilon$
Nb-AlO $_x$ -Al-AlO $_x$ -Nb [8]	0.81	(3-7) × × 10 $^{-7}$	100	$\geq 10^8$	$\sim 10^{-8}$	≥ 1
Nb/Al-AlO $_x$ -Nb'/Al-AlO $_x$ -Nb [9]	~1	~ 10 $^{-6}$	~100	~ 10 8	~ 10 $^{-9}$	~ 0.1
Nb/Al/Nb'/Al-AlO $_x$ -Nb''/Al-AlO $_x$ -Nb'/Al/Nb [9]						
Nb/Al-AlO $_x$ -Al'-AlO $_x$ -Al/Nb [10]	0.81	(1-4) × × 10 $^{-6}$	60	~ 10 8	~ 10 $^{-8}$	~ 1
Nb/Al/Nb/Al-AlO $_x$ -Al'-AlO $_x$ -Al/Nb/Al/Nb [10]						
Nb-AlO $_x$ -Nb'-AlO $_x$ -Nb [11]	1.99	~ 10 $^{-6}$	100	$\geq 10^7$	$5 \cdot 10^{-10}$	~ 0.01

Для ВТСП трудно сделать точные оценки из-за недостатка прямых измерений неравновесных эффектов и неясности микроскопической картины. Для грубой оценки можно пользоваться формулой (7) и аналогичной формулой, выражающей ν через критический ток при нулевой температуре в модели БКШ:

$$\nu = \frac{J_c(0)}{2\pi e \Delta N(0) d_0}. \quad (8)$$

На основании работ [12-27] возьмем $J_c(0) \sim 500 - 20000 \text{ А/см}^2$, $V_c \sim 1 - 10 \text{ мВ}$, $R_N S \sim 10^{-5} - 10^{-7} \text{ Ом·см}^2$ (для структур с различной степенью анизотропии), $\Delta \sim 20 \text{ мэВ}$, $N(0) \sim 10^{32} - 10^{33}$. Тогда получаем $\nu \sim 10^8 - 10^{12}$ в зависимости от степени анизотропии соединения и способа оценки. Если время неупругой релаксации меняется в пределах от 10^{-9} с (при $T \sim 4.2 \text{ К}$) до 10^{-12} с (при $T \sim T_c$), то $\nu\tau_\epsilon$ может изменяться в широких пределах от 10^{-4} в самых анизотропных структурах при температурах близких к критической (заметим, однако, что $\nu\tau_q$ при этом может быть значительно больше вследствие фактора T/Δ) до 10^3 в менее анизотропных структурах при низких температурах, что позволяет сделать вывод о том, что при определенных условиях степень неравновесности при внутреннем эффекте Джозефсона может быть весьма велика.

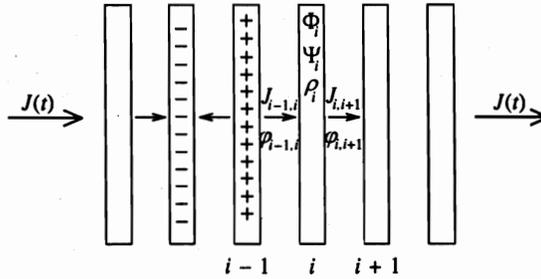


Рис. 1. Система джозефсоновски связанных тонких слоев

3. КИНЕТИКА КВАЗИЧАСТИЦ В СИСТЕМАХ ТУННЕЛЬНЫХ КОНТАКТОВ. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В этой работе мы рассматриваем систему джозефсоновски связанных тонких слоев (рис. 1) с туннельным механизмом переноса тока между слоями. Таким образом, состояние i -го слоя определяется его взаимодействием с $i - 1$ -м и $i + 1$ -м слоями. Это взаимодействие для любой пары слоев односторонне и ниже рассматривается микроскопическая теория произвольного i -го слоя с учетом «левого», $i - 1$ -го. Влияние «правого», $i + 1$ -го слоя учтено в окончательных выражениях.

Будем считать, что толщина слоев d_0 сравнима с глубиной экранирования электрического поля r_d (что имеет место в ВТСП) и много меньше характерных глубин релаксации неравновесности, $d_0 \ll l_e, l_q$. В этом случае анализ зарядовых эффектов упрощается, так как можно провести усреднение всех величин по толщине слоя.

Исходные уравнения

Исходными уравнениями являются уравнения Элиашберга [33] для двухвременных квазиклассических (проинтегрированных по энергетической переменной $\xi = v_F(p - p_F)$) функций Грина $g_\epsilon(t), f_\epsilon(t), g_\epsilon^{A(R)}(t), f_\epsilon^{A(R)}(t)$, описывающих произвольное неравновесное состояние сверхпроводника. В наиболее общем виде такие уравнения были получены методом Келдыша [37] в работах Ларкина и Овчинникова [38, 39] (см. также [2, 3, 40–44]). Функции $g_\epsilon^{A(R)}, f_\epsilon^{A(R)}$ описывают плотность квазичастичных состояний по энергии в статическом случае и называются «спектральными», а «келдышевские» функции $g_\epsilon(t), f_\epsilon(t)$ описывают кинетику квазичастиц. Имея в виду дальнейший переход к кинетическим (квазиклассическим по времени) уравнениям, мы сразу перешли к фурье-представлению по разности времен $t_1 - t_2$ и сохранили зависимость от суммы времен $t = (t_1 + t_2)/2$. Кроме того, в «грязном» случае ($\tau_p \Delta, \tau_p \omega \ll 1, l_p \ll \xi_0, d_0$) можно провести усреднение по направлениям импульса на поверхности Ферми. Таким образом, получим, например,²⁾

$$g_\epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\pi} \int d\xi \int \frac{d\Omega_p}{4\pi} \int d(t_1 - t_2) \int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \times \exp\{-i\epsilon(t_1 - t_2) + ip(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}. \tag{9}$$

²⁾ В этой части используется система единиц с $\hbar = 1$.

Уравнения для усредненных по толщине слоя функций $g_\epsilon(t)$, $f_\epsilon(t)$ имеют вид (в калибровке с действительным параметром порядка)

$$\frac{\partial g_\epsilon}{\partial t} = -ie\{\Phi g - g\Phi\}_\epsilon - i\{\Delta f^+ - f\Delta\}_\epsilon - I_1^{ph} - I_1^{tun}, \quad (10)$$

$$i2\epsilon f_\epsilon = ie\{\Phi f - f\Phi\}_\epsilon - i\{\Delta \bar{g} - g\Delta\}_\epsilon + I_2^{ph} + I_2^{tun}, \quad (11)$$

где учтены интеграл столкновений с фононами I_1^{ph} и туннельный источник I_1^{tun} , $f^+(t_1, t_2) = f^*(t_2, t_1)$ и $\bar{g}(t_1, t_2) = g(t_2, t_1)$ во временном представлении, а символ $\{AB\}$ обозначает свертку по времени:

$$\{AB\}(t_1, t_2) = \int A(t_1, t_3)B(t_3, t_2)dt_3, \quad (12)$$

которая в частотном представлении имеет вид

$$\{AB\}_\epsilon(\omega) = \int A_{\epsilon+\omega/2-\omega_1/2}(\omega_1)B_{\epsilon-\omega_1/2}(\omega-\omega_1)\frac{d\omega_1}{2\pi}, \quad (13)$$

а в квазиклассическом случае может быть представлена в виде ряда по степеням ω :

$$\begin{aligned} \{AB\}_\epsilon = & A_\epsilon B_\epsilon + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial A_\epsilon}{\partial \epsilon} \frac{\partial B_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial A_\epsilon}{\partial t} \frac{\partial B_\epsilon}{\partial \epsilon} \right) - \\ & - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 A_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \frac{\partial^2 B_\epsilon}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 A_\epsilon}{\partial \epsilon \partial t} \frac{\partial^2 B_\epsilon}{\partial \epsilon \partial t} + \frac{\partial^2 A_\epsilon}{\partial t^2} \frac{\partial^2 B_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

При этом в формулах (10), (11) нужно формально полагать $\Delta(t_1, t_2) = \Delta(t_1)\delta(t_1 - t_2)$, $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_1)\delta(t_1 - t_2)$. Имеют место следующие соотношения³⁾:

$$g^*(t_1, t_2) = g(t_2, t_1), \quad f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1),$$

$$f_\epsilon^+ = f_\epsilon^*, \quad f_\epsilon = f_{-\epsilon}, \quad \bar{g}_\epsilon = g_{-\epsilon}, \quad g_\epsilon^* = g_\epsilon,$$

откуда следует, что функция $g_\epsilon(t)$ — чисто действительная, а $f_\epsilon(t)$ — четная.

Туннельный источник I_1^{tun} получен Волковым [45] и в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$I_1^{tun} = \nu \{g^{(t)R}g - gg^{(t)A} + ff^{(t)A} - f^{(t)R}f^+ + g^{(t)}g^A - g^Rg^{(t)} + f^Rf^{(t)+} - f^{(t)}f^{+A}\}, \quad (15)$$

$$I_2^{tun} = \nu \{g^{(t)R}f - f\bar{g}^{(t)A} + f^{(t)R}\bar{g} - g f^{(t)A} + g^{(t)}f^A - f^R\bar{g}^{(t)} + f^{(t)}\bar{g}^A - g^R f^{(t)}\}, \quad (16)$$

гриновские функции с индексом (t) здесь относятся к другому («левому») сверхпроводнику. Эти функции имеют дополнительный фазовый множитель (по отношению к функциям, взятым в калибровке с действительным параметром порядка), отражающий

³⁾ Аргументы функций во временном представлении всегда указаны явно, например $g(t_1, t_2)$, в смешанном (ϵ, t) представлении аргумент t может быть опущен, например g_ϵ .

наличие джоузефсоновской разности фаз $\varphi(t) = [\theta'(t) - \theta(t)]\text{sign } e$ между сверхпроводниками. Так что надлежит провести замену (калибровочное преобразование):

$$\begin{aligned} g^{(t) (R,A)}(t_1, t_2) &= \exp \{i[\varphi(t_1) - \varphi(t_2)]\text{sign } e/2\} g^{(R,A)}(t_1, t_2), \\ \bar{g}^{(t) (R,A)}(t_1, t_2) &= \exp \{-i[\varphi(t_1) - \varphi(t_2)]\text{sign } e/2\} \bar{g}^{(R,A)}(t_1, t_2), \\ f^{(t) (R,A)}(t_1, t_2) &= \exp \{i[\varphi(t_1) + \varphi(t_2)]\text{sign } e/2\} f^{(R,A)}(t_1, t_2), \\ f^{(t)+ (R,A)}(t_1, t_2) &= \exp \{-i[\varphi(t_1) + \varphi(t_2)]\text{sign } e/2\} f^{+(R,A)}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где штрихованные функции теперь удовлетворяют таким же калибровочно-инвариантным уравнениям (10), (11), как и нештрихованные.

Условие самосогласования для энергетической щели имеет обычный вид:

$$\Delta(t) = \lambda \int_{-\theta_D}^{\theta_D} \frac{d\epsilon}{4} \text{Re} f_\epsilon(t), \quad (18)$$

а в качестве второго условия самосогласования надлежит использовать уравнение непрерывности с зарядом

$$\rho(t) = -2eN(0) \left[e\Phi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{4} g_\epsilon(t) \right]. \quad (19)$$

Эти условия являются обобщением на произвольный нестационарный случай выражений (1), (5).

Полученные уравнения необходимо дополнить выражением для тока между слоями. Удобным способом вычисления тока является интегрирование уравнения (10) по энергии. При этом получается уравнение непрерывности и определяется выражение для тока. Мы воспользуемся этим при переходе к кинетическому приближению.

Спектральные функции определяются уравнениями типа (10), (11). Мы примем, что в статическом случае они имеют вид

$$g_\epsilon^{R(A)} = \frac{\epsilon \pm i\gamma}{\Delta} f_\epsilon^{R(A)} = \frac{\epsilon \pm i\gamma}{\sqrt{(\epsilon \pm i\gamma)^2 - \Delta^2}}, \quad (20)$$

$$f_\epsilon^{+R(A)} = f_\epsilon^{R(A)}, \quad \bar{g}_\epsilon^{R(A)} = -g_\epsilon^{R(A)}, \quad g_\epsilon^{*R(A)} = -g_\epsilon^{A(R)}, \quad f_\epsilon^{*R(A)} = -f_\epsilon^{A(R)}, \quad (21)$$

причем знак корня надлежит определять из условия $\text{Im} \sqrt{\dots} > 0$. Далее нам понадобятся комбинации спектральных функций, для которых введем специальные обозначения

$$\begin{aligned} u_\epsilon &= \frac{1}{2}(g_\epsilon^R - g_\epsilon^A), & v_\epsilon &= \frac{1}{2}(f_\epsilon^R - f_\epsilon^A), & w_\epsilon &= \frac{i}{2}(f_\epsilon^R + f_\epsilon^A), & y_\epsilon &= \frac{i}{2}(g_\epsilon^R + g_\epsilon^A), \\ h_\epsilon &= \frac{1}{2}[1 - (g_\epsilon^R g_\epsilon^A - f_\epsilon^R f_\epsilon^A)], & b_\epsilon &= \frac{i}{2}(g_\epsilon^R f_\epsilon^A + \bar{g}_\epsilon^A f_\epsilon^R). \end{aligned} \quad (22)$$

Кинетическое приближение

При низких частотах ($\omega \ll \Delta$) возможно существенное упрощение системы динамических уравнений путем перехода к кинетическому уравнению для функции распределения квазичастиц по энергии. В квазистатическом случае ($\omega \rightarrow 0$) такое уравнение для системы туннельных контактов было получено Ивлевым и Бульженковым [46], Ивлевым [47], Гуляном и Жарковым [48]. Для анализа нестационарных неравновесных состояний квазистатического приближения в общем случае недостаточно. Как показали Ларкин и Овчинников [38, 39], а также Шмид и Шен [49], в нестационарном случае переход к кинетическому приближению может быть осуществлен путем введения двух действительных функций распределения f_1, f_2 , через которые функции g_ϵ и f_ϵ выражаются так, чтобы удовлетворить условию нормировки

$$\left\{ \left(\begin{matrix} g^R & f^R \\ -f^{+R} & \bar{g}^R \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} g & f \\ -f^+ & \bar{g} \end{matrix} \right) \right\} + \left\{ \left(\begin{matrix} g & f \\ -f^+ & \bar{g} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} g^A & f^A \\ -f^{+A} & \bar{g}^A \end{matrix} \right) \right\} = 0. \tag{23}$$

Что касается спектральных функций $g_\epsilon^{R(A)}, f_\epsilon^{R(A)}$, то их достаточно выразить через $\Delta(t)$ с помощью формул статического приближения (20) [39].

Шеланков [43] показал, что в случае равноваселенности спиновых состояний достаточно одной действительной функции распределения общего вида $f_\epsilon(t)$, а функции f_1 и f_2 обладают определенной симметрией. Используя метод [43], мы выразим гриновские функции сразу через симметричную часть функции распределения $\beta_\epsilon(t) = (n_\epsilon + n_{-\epsilon} - 1)\text{sign}\epsilon$ и антисимметричную часть $\alpha_\epsilon(t) = (n_\epsilon - n_{-\epsilon})\text{sign}\epsilon$:

$$\begin{aligned} g_\epsilon &= \{\beta_\epsilon g_\epsilon^A - g_\epsilon^R \beta_\epsilon\} - \alpha_\epsilon + \{g_\epsilon^R \alpha_\epsilon g_\epsilon^A\} - \{f_\epsilon^R \alpha_\epsilon f_\epsilon^{+A}\}, \\ f_\epsilon &= \{\beta_\epsilon f_\epsilon^A - f_\epsilon^R \beta_\epsilon\} + \{g_\epsilon^R \alpha_\epsilon f_\epsilon^A + f_\epsilon^R \alpha_\epsilon \bar{g}_\epsilon^A\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Гриновские функции (24) автоматически удовлетворяют условию нормировки (23) при произвольных α_ϵ и β_ϵ . Следуя этому способу определения функции распределения, получим систему динамических кинетических уравнений. В нулевом приближении по частоте

$$\begin{aligned} g_\epsilon &= -(g_\epsilon^R - g_\epsilon^A)\beta_\epsilon - \alpha_\epsilon + (g_\epsilon^R g_\epsilon^A - f_\epsilon^R f_\epsilon^{+A})\alpha_\epsilon = -2u_\epsilon \beta_\epsilon - 2h_\epsilon \alpha_\epsilon, \\ f_\epsilon &= -(f_\epsilon^R - f_\epsilon^A)\beta_\epsilon + (g_\epsilon^R f_\epsilon^A + f_\epsilon^R \bar{g}_\epsilon^A)\alpha_\epsilon = -2v_\epsilon \beta_\epsilon - 2ib_\epsilon \alpha_\epsilon, \end{aligned} \tag{25}$$

этих выражений достаточно для получения кинетических уравнений в первом порядке по частоте. Прежде чем перейти к уравнениям для функций распределения, необходимо точно выразить член $\Delta(f_\epsilon^+ - f_\epsilon)$ (первый в разложении $\{\Delta f^+ - f\Delta\}_\epsilon$ по частоте) в уравнении (10) с помощью уравнения (11). В результате из (10) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_\epsilon}{\partial t} &= -ie\{\Phi g - g\Phi\}_\epsilon - i\{\Delta f^+ - f\Delta\}'_\epsilon + i \left[\frac{e\Delta}{2\epsilon} \{\Phi f - f\Phi\}_\epsilon - \frac{\Delta}{2\epsilon} \{\Delta \bar{g} - g\Delta\}_\epsilon - c.c. \right] - \\ &- \left[I_1^{ph} - \frac{\Delta}{2\epsilon} (I_2^{ph} + I_2^{*ph}) \right] - \left[I_1^{tun} - \frac{\Delta}{2\epsilon} (I_2^{tun} + I_2^{*tun}) \right], \end{aligned} \tag{26}$$

где $\{\Delta f^+ - f\Delta\}'_\epsilon = \{\Delta f^+ - f\Delta\}_\epsilon - \Delta(f_\epsilon^+ - f_\epsilon)$. Применяя в этом уравнении разложение (14), пользуясь (25) и выделяя четную и нечетную части, получим систему кинетических уравнений

$$h_\epsilon \frac{d\alpha_\epsilon}{dt} = -e \left[\frac{d(u_\epsilon \beta_\epsilon)}{d\epsilon} - \frac{\Delta}{\epsilon} \frac{d(v_\epsilon \beta_\epsilon)}{d\epsilon} \right] \frac{d\Phi}{dt} - \left[\alpha_\epsilon \frac{dh_\epsilon}{d\Delta} + \frac{2\Delta}{\epsilon} \frac{d(h_\epsilon \alpha_\epsilon)}{d\epsilon} \right] \frac{d\Delta}{dt} + \nu Q_\alpha + I_\alpha, \quad (27)$$

$$u_\epsilon \frac{d\beta_\epsilon}{dt} = -e \frac{d(h_\epsilon \alpha_\epsilon)}{d\epsilon} \frac{d\Phi}{dt} - \left[\beta_\epsilon \frac{du_\epsilon}{d\Delta} + \frac{d(v_\epsilon \beta_\epsilon)}{d\epsilon} \right] \frac{d\Delta}{dt} + \nu Q_\beta + I_\beta, \quad (28)$$

в которых I_α и I_β — интегралы столкновений с фононами, которые мы здесь не выписываем, а туннельные источники Q_α и Q_β получены в приближении малых частот и равны ($\nu = (\text{sign } e/2)d\varphi/dt$)

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= Q_{1\alpha} + Q_{2\alpha} \text{sign } e \sin \varphi + Q_{3\alpha} \cos \varphi, \\ Q_{1\alpha} &= \left(u_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} v_\epsilon \right) \left[u'_{\epsilon-v} (\beta'_{\epsilon-v} - \beta_\epsilon) + u'_{\epsilon+v} (\beta_\epsilon - \beta'_{\epsilon+v}) \right] + \\ &+ \left(u_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} v_\epsilon \right) (h'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v} + h'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v}) - (u'_{\epsilon-v} + u'_{\epsilon+v}) h_\epsilon \alpha_\epsilon + \frac{\Delta}{\epsilon} (y'_{\epsilon-v} + y'_{\epsilon+v}) b_\epsilon \alpha_\epsilon, \\ Q_{2\alpha} &= - \left(v_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} u_\epsilon \right) (w'_{\epsilon+v} + w'_{\epsilon-v}) \beta_\epsilon - \left(w_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} y_\epsilon \right) (v'_{\epsilon+v} \beta'_{\epsilon+v} + v'_{\epsilon-v} \beta'_{\epsilon-v}) - \\ &- \frac{\Delta}{\epsilon} (w'_{\epsilon+v} - w'_{\epsilon-v}) h_\epsilon \alpha_\epsilon - (v'_{\epsilon+v} - v'_{\epsilon-v}) b_\epsilon \alpha_\epsilon - \left(v_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} u_\epsilon \right) (b'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v} - b'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v}), \\ Q_{3\alpha} &= \left(v_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} u_\epsilon \right) [(v'_{\epsilon+v} - v'_{\epsilon-v}) \beta_\epsilon + v'_{\epsilon-v} \beta'_{\epsilon-v} - v'_{\epsilon+v} \beta'_{\epsilon+v}] + \\ &+ \frac{\Delta}{\epsilon} (v'_{\epsilon+v} + v'_{\epsilon-v}) h_\epsilon \alpha_\epsilon - (w'_{\epsilon+v} + w'_{\epsilon-v}) b_\epsilon \alpha_\epsilon + \left(w_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} y_\epsilon \right) (b'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v} + b'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_\beta &= Q_{1\beta} + Q_{2\beta} \text{sign } e \sin \varphi + Q_{3\beta} \cos \varphi, \\ Q_{1\beta} &= u_\epsilon u'_{\epsilon-v} (\beta'_{\epsilon-v} - \beta_\epsilon) + u_\epsilon u'_{\epsilon+v} (\beta'_{\epsilon+v} - \beta_\epsilon) + u_\epsilon (h'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v} - h'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v}) + \\ &+ (u'_{\epsilon+v} - u'_{\epsilon-v}) h_\epsilon \alpha_\epsilon, \\ Q_{2\beta} &= v_\epsilon (w'_{\epsilon-v} - w'_{\epsilon+v}) \beta_\epsilon + w_\epsilon (v'_{\epsilon-v} \beta'_{\epsilon-v} - v'_{\epsilon+v} \beta'_{\epsilon+v}) - (v'_{\epsilon+v} + v'_{\epsilon-v}) b_\epsilon \alpha_\epsilon - \\ &- v_\epsilon (b'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v} + b'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v}), \\ Q_{3\beta} &= v_\epsilon v'_{\epsilon+v} (\beta_\epsilon - \beta'_{\epsilon+v}) + v_\epsilon v'_{\epsilon-v} (\beta_\epsilon - \beta'_{\epsilon-v}) - (w'_{\epsilon+v} - w'_{\epsilon-v}) b_\epsilon \alpha_\epsilon + \\ &+ w_\epsilon (b'_{\epsilon+v} \alpha'_{\epsilon+v} - b'_{\epsilon-v} \alpha'_{\epsilon-v}). \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнения самосогласования принимают вид

$$\Delta = -\lambda \int_0^{\theta_D} v_\epsilon \beta_\epsilon d\epsilon, \quad (31)$$

$$\rho = -2eN(0) \left[e\Phi(t) - \int_0^\infty h_\epsilon \alpha_\epsilon d\epsilon \right] = -2e^2 N(0) [\Phi - \Psi] = -\frac{1}{4\pi r_d^2} (\Phi - \Psi), \quad (32)$$

электронно-дырочный разбаланс определяется выражением

$$\Psi = \frac{1}{e} \int_0^\infty h_\epsilon \alpha_\epsilon d\epsilon. \quad (33)$$

Наконец, для тока между слоями получаем

$$\begin{aligned}
 J &= J_1 + J_2 \sin \varphi + J_3 \cos \varphi, \\
 J_1 &= 2eN(0)d_0\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[u_\epsilon u'_{\epsilon+\nu} (\beta_\epsilon - \beta'_{\epsilon+\nu}) + u_\epsilon h'_{\epsilon+\nu} \alpha'_{\epsilon+\nu} - u'_{\epsilon+\nu} h_\epsilon \alpha_\epsilon \right], \\
 J_2 &= 2|e|N(0)d_0\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[-v_\epsilon w'_{\epsilon+\nu} \beta_\epsilon - w_\epsilon v'_{\epsilon+\nu} \beta'_{\epsilon+\nu} - v'_{\epsilon+\nu} b_\epsilon \alpha_\epsilon - v_\epsilon b'_{\epsilon+\nu} \alpha'_{\epsilon+\nu} \right], \\
 J_3 &= 2eN(0)d_0\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[v_\epsilon v'_{\epsilon+\nu} \beta_\epsilon - v_\epsilon v'_{\epsilon+\nu} \beta'_{\epsilon+\nu} - w'_{\epsilon+\nu} b_\epsilon \alpha_\epsilon + w_\epsilon b'_{\epsilon+\nu} \alpha'_{\epsilon+\nu} \right].
 \end{aligned} \tag{34}$$

В предельном случае, $\gamma/\Delta \ll 1$ (хорошая щель) и $\omega \rightarrow 0$, полученные в этом разделе кинетические уравнения переходят в уравнения, полученные в работах [46–48], а формулы (31) и (32) переходят в (1) и (5).

Квазигидродинамическое приближение. Динамика электронно-дырочного разбаланса

Рассмотрим теперь приближение слабой неравновесности, когда кинетические уравнения могут быть линеаризованы. Разлагая в ряд по α_ϵ , $\beta_\epsilon^{(1)}$, v/Δ и v/T и сохраняя главные члены, получим

$$h_\epsilon \frac{d\alpha_\epsilon}{dt} = -e \left[\frac{d(u_\epsilon \beta_\epsilon^{(0)})}{d\epsilon} - \frac{\Delta}{\epsilon} \frac{d(v_\epsilon \beta_\epsilon^{(0)})}{d\epsilon} \right] \frac{d\Phi}{dt} + \nu Q_\alpha^{(0)} + \nu Q_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(1)}, \tag{35}$$

$$u_\epsilon \frac{d\beta_\epsilon^{(1)}}{dt} = - \left[\frac{d(v_\epsilon \beta_\epsilon^{(0)})}{d\epsilon} + \beta_\epsilon^{(0)} \frac{du_\epsilon}{d\Delta} \right] \frac{d\Delta}{dt} + \nu Q_\beta^{(0)} + \nu Q_\beta^{(1)} + I_\beta^{(1)}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha^{(0)} &= \frac{u'_\epsilon (u_\epsilon - (\Delta/\epsilon)v_\epsilon)}{T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} v + 2 \left[\left(v_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} u_\epsilon \right) w'_\epsilon + \left(w_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} y_\epsilon \right) v'_\epsilon \right] \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} \operatorname{sign} e \sin \varphi + \\
 &+ \frac{v'_\epsilon (v_\epsilon - (\Delta/\epsilon)u_\epsilon)}{T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} v \cos \varphi,
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha^{(1)} &= 2 \left(u_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} v_\epsilon \right) h'_\epsilon \alpha'_\epsilon - 2u'_\epsilon h_\epsilon \alpha_\epsilon + \frac{2\Delta}{\epsilon} y'_\epsilon b_\epsilon \alpha_\epsilon + \\
 &+ \left[\frac{2\Delta}{\epsilon} v'_\epsilon h_\epsilon \alpha_\epsilon - 2w'_\epsilon b_\epsilon \alpha_\epsilon + 2 \left(w_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} y_\epsilon \right) b'_\epsilon \alpha'_\epsilon \right] \cos \varphi,
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$Q_\beta^{(0)} = \left[2v_\epsilon \frac{dw'_\epsilon}{d\epsilon} \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} + 2w_\epsilon \frac{d(v'_\epsilon \operatorname{th}(\epsilon/2T))}{d\epsilon} \right] v \operatorname{sign} e \sin \varphi, \tag{39}$$

$$Q_\beta^{(1)} = 2u_\epsilon u'_\epsilon (\beta_\epsilon^{(1)} - \beta'_\epsilon^{(1)}) + [-2v'_\epsilon b_\epsilon \alpha_\epsilon - 2v_\epsilon b'_\epsilon \alpha'_\epsilon] \operatorname{sign} e \sin \varphi + [2v_\epsilon v'_\epsilon (\beta_\epsilon^{(1)} - \beta'_\epsilon^{(1)})] \cos \varphi, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{2eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[\frac{u_\epsilon u'_\epsilon}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} v + u_\epsilon h'_\epsilon \alpha'_\epsilon - u'_\epsilon h_\epsilon \alpha_\epsilon \right], \\
 J_2 &= \frac{1}{2|e|R_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[(v_\epsilon w'_\epsilon + w_\epsilon v'_\epsilon) \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} - v'_\epsilon b_\epsilon \alpha_\epsilon - v_\epsilon b'_\epsilon \alpha'_\epsilon \right], \\
 J_3 &= \frac{1}{2eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[\frac{v_\epsilon v'_\epsilon}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} v + w_\epsilon b'_\epsilon \alpha'_\epsilon - w'_\epsilon b_\epsilon \alpha_\epsilon \right].
 \end{aligned} \tag{41}$$

Уравнение (35) для $\alpha_\epsilon(t)$ зависит от $\beta_\epsilon^{(1)}$ только через $\Delta(t)$ и может быть решено независимо от (36). Кроме того, ограничимся случаем, когда изменением энергетической щели в уравнении для $\alpha_\epsilon(t)$ можно пренебречь, и исследуем динамику электронно-дырочного разбаланса.

В общем случае решение кинетического уравнения (35) очень громоздко вследствие зависимости коэффициентов от ϵ . Однако при $\Delta/\gamma \ll 1$ («бесщелевая сверхпроводимость») эта зависимость не существенна в главном приближении, а при $\Delta/T \ll 1$ и $\gamma/T \ll 1$ ($T \simeq T_c$) основную роль играют квазичастицы с энергиями $\epsilon \sim T \gg \Delta, \gamma$, при которых зависимость от энергии также не важна; в этих случаях туннельный источник в главном приближении равен

$$Q_\alpha^{(0)} + Q_\alpha^{(1)} = \frac{v}{T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} + 2(\alpha'_\epsilon - \alpha_\epsilon). \tag{42}$$

Из вида туннельного источника, а также множителя перед $d\Phi/dt$ следует, что в нулевом приближении по Δ/T и γ/T или Δ/γ для $\alpha_\epsilon^{(i)}(t)$ одновременно во всех слоях справедливо выражение

$$\alpha_\epsilon^{(i)}(t) = \frac{e\Psi_i(t)}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)}, \tag{43}$$

автоматически удовлетворяющее определению Ψ (33) ($h_\epsilon \simeq 1$). В этом случае возможен строгий вывод замкнутого уравнения для $\Psi(t)$ и переход к квазигидродинамическому описанию. Интегрируя (35) и (41) по ϵ , в главном приближении получаем

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{d\Phi_i}{dt} + 2\nu \frac{\hbar}{2|e|} \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{dt} \right) + 2\nu(\Psi_{i-1} + \Psi_{i+1} - 2\Psi_i) - \tau_q^{-1}\Psi_i, \tag{44}$$

$$J_{i-1,i} = \frac{\hbar}{2|e|R_N} \frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} + \frac{\Psi_{i-1} - \Psi_i}{R_N} + J_c \sin \varphi_{i-1,i}. \tag{45}$$

В уравнении (44) мы сразу добавили второй («правый») источник, ввели индексы слоев и восстановили \hbar , интеграл столкновений взят в τ -приближении. При этом полагаем, для простоты, что параметры всех слоев и контактов одинаковы.

Из уравнений (44), (45) с учетом выражения (32) и уравнения непрерывности, получим уравнение

$$\Psi_i = -2\tau_q \nu R_N J_c (\sin \varphi_{i-1,i} - \sin \varphi_{i,i+1}), \tag{46}$$

что соответствует мнимой части нестационарного уравнения Гинзбурга—Ландау. Из этого уравнения член с временной производной $d\Psi/dt$ выпадает, вследствие наличия перед ним малого по параметрам Δ/γ или $\Delta/T, \gamma/T$ множителя. Однако при достаточно высокой частоте этот член может оказаться в целом одного порядка с остальными; следовательно, его необходимо сохранить. Окончательно получаем

$$\tau_q \Gamma \frac{d\Psi_i}{dt} + \Psi_i = -2\tau_q \nu R_N J_c (\sin \varphi_{i-1,i} - \sin \varphi_{i,i+1}), \tag{47}$$

где

$$\Gamma = \int_0^\infty \frac{\Delta v_\epsilon \operatorname{th}(\epsilon/2T)}{\epsilon^2} d\epsilon. \tag{48}$$

В уравнениях (47) и (45) отсутствуют так называемые интерференционные члены, которые, как известно, малы в бесщелевых сверхпроводниках. Их учет (при произвольных параметрах) приводит к более общим уравнениям, которые даны в Приложении.

4. ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ КОНТАКТОВ

Система уравнений для цепочки контактов

Используя полученные в предыдущем разделе уравнения динамики электронно-дырочного разбаланса и выражения для тока, выведем полную систему динамических уравнений для цепочки контактов. Следуя работам [28, 29, 32, 50–52], воспользуемся уравнением непрерывности,

$$d_0 \frac{d\rho_i}{dt} = J_{i-1,i} - J_{i,i+1}, \quad (49)$$

и уравнением, связывающим напряжение (электрическое поле) между слоями с зарядом слоев,

$$V_{i,i+1} - V_{i-1,i} = \frac{4\pi d_0 d}{\epsilon_0} \rho_i, \quad (50)$$

здесь d — расстояние между слоями, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость. Из этих уравнений следует, что

$$J_{i-1,i} + \frac{\epsilon_0}{4\pi d} \frac{dV_{i-1,i}}{dt} = J(t), \quad (51)$$

$J(t)$ — внешний ток. Эти уравнения совместно с неравновесным соотношением Джозефсона (6), выражениями для заряда (32) и тока (45) (или (П.2)), а также уравнением динамики разбаланса (47) (или (П.1)) составляют полную систему динамических уравнений цепочки контактов.

Используя уравнения (45) и (47), в безразмерном виде получаем

$$\beta \frac{d^2 \varphi_{i,i+1}}{d\tau^2} + \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} + \sin \varphi_{i,i+1} + \psi_i - \psi_{i+1} + \beta \left(\frac{d\mu_i}{d\tau} - \frac{d\mu_{i+1}}{d\tau} \right) = j(t), \quad (52)$$

$$\alpha \Gamma \frac{d\psi_i}{d\tau} + \psi_i = -\eta (\sin \varphi_{i-1,i} - \sin \varphi_{i,i+1}), \quad (53)$$

$$\mu_i + \zeta (2\mu_i - \mu_{i-1} - \mu_{i+1}) = \psi_i + \zeta \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{d\tau} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} \right), \quad (54)$$

$$\sum_i \frac{d\varphi_{i-1,i}}{d\tau} = v(t), \quad (55)$$

где $j(t)$ — внешний ток в единицах $J_c = (f_4 T)/(e R_N)$, $v(t)$ — внешнее напряжение в единицах $V_c = R_N J_c$, $\mu(t) = \Phi(t)/V_c$, $\psi(t) = \Psi(t)/V_c$ и $\alpha = \tau_q \omega_c$, $\beta = \omega_c^2/\omega_p^2$, $\zeta = (\epsilon_0 \tau_d^2)/(d_0 d)$, $\omega_c = (2e R_N J_c)/\hbar$, $\omega_p^2 = (8\pi e d J_c)/(\hbar \epsilon_0 S)$, $\tau = \omega_c t$, $\eta = 2\nu \tau_q$. Отметим,

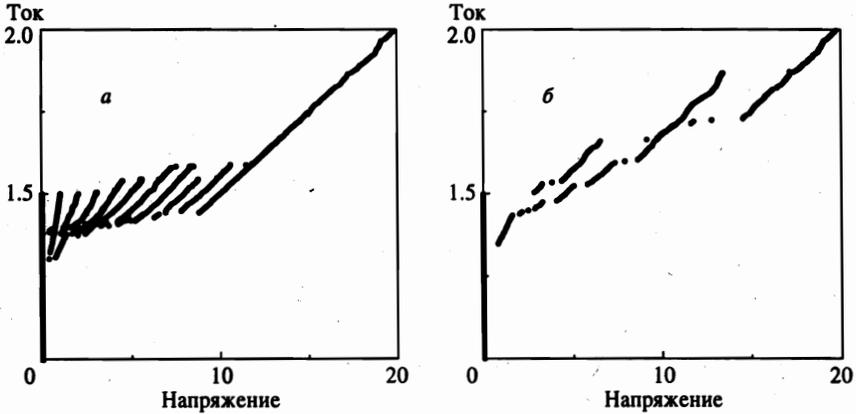


Рис. 2. ВАХ цепочки 10 контактов с $\beta = 10$, $\zeta = 1$ при малых параметрах неравновесности: а) $\eta = 0.1$, $\alpha\Gamma = 0.01$; б) $\eta = 0.5$, $\alpha\Gamma = 0.1$

что между коэффициентами имеет место соотношение $\alpha\zeta = \beta\eta$, вытекающее из их определений.

В более общем случае, используя уравнения (П.2) и (П.1),

$$\beta \frac{d^2 \varphi_{i,i+1}}{d\tau^2} + \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} + \sin \varphi_{i,i+1} + \frac{c}{f_3} (\psi_i - \psi_{i+1}) - \frac{c_4}{f_3} (\psi_i + \psi_{i+1}) \sin \varphi_{i,i+1} + \left[\frac{f_5}{f_3} \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} + \frac{c_1}{f_3} (\psi_i - \psi_{i+1}) \right] \cos \varphi_{i,i+1} + \beta \left(\frac{d\mu_i}{d\tau} - \frac{d\mu_{i+1}}{d\tau} \right) = j(t), \quad (56)$$

$$\alpha \frac{d\psi_i}{d\tau} + \psi_i + \eta c (2\psi_i - \psi_{i-1} - \psi_{i+1}) - \eta c_1 [(\psi_{i-1} - \psi_i) \cos \varphi_{i-1,i} + (\psi_{i+1} - \psi_i) \cos \varphi_{i,i+1}] - \eta (c_2 \cos \varphi_{i-1,i} + c_2 \cos \varphi_{i,i+1} + 2c_3) \psi_i + \eta (c_2 + c_3 \cos \varphi_{i-1,i}) \psi_{i-1,i} + \eta (c_2 + c_3 \cos \varphi_{i,i+1}) \psi_{i,i+1} = \eta f \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{d\tau} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} \right) + \alpha a \frac{d\mu_i}{d\tau} - \eta \frac{f_1 f_3}{f_4} (\sin \varphi_{i-1,i} - \sin \varphi_{i,i+1}) - \eta f_2 \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{d\tau} \cos \varphi_{i-1,i} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{d\tau} \cos \varphi_{i,i+1} \right), \quad (57)$$

где теперь $V_c = R_N J_c / f_3$, $\omega_c = (2e R_N J_c) / (f_3 \hbar)$. Мы полагаем, что полученные уравнения можно рассматривать как феноменологические в широком интервале температур.

Особенности ВАХ

Используя полученные выше уравнения, проанализируем динамику цепочки контактов при различных значениях параметра неравновесности η . Ограничимся случаем больших $\beta \gg 1$, в котором ВАХ отдельного джозефсоновского контакта обладает гистерезисом. Обсудим подробно ситуацию в рамках простой модели (52), (53), когда динамика разбаланса контролируется двумя параметрами η и $\alpha\Gamma$. Параметр ζ примем порядка единицы. Рассмотрим основные предельные случаи.

При малом параметре неравновесности, $\eta \ll 1$, вольт-амперная характеристика (рис. 2а) похожа в общих чертах на ВАХ системы невзаимодействующих контактов. Наблюдаются отдельные ветви, соответствующие разному числу контактов в резистивном

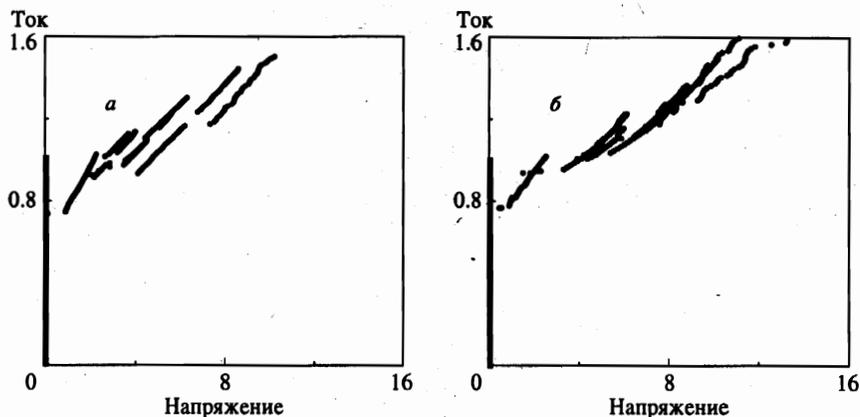


Рис. 3. ВАХ цепочки 10 контактов с $\beta = 10$, $\zeta = 1$ при промежуточных параметрах неравновесности: а) $\eta = 1$, $\alpha\Gamma = 0.1$; б) $\eta = 1$, $\alpha\Gamma = 1$

состоянии⁴⁾, и величина гистерезиса определяется параметром β . Однако существуют и качественные различия.

Во-первых, наблюдаемые величины критических токов, при которых происходит переход на следующие ветви, определяются не исходным разбросом критических токов (который был задан при счете в пределах одного процента), а неравновесным эффектом затягивания ступенек, который заключается в том, что при переходе одного из контактов в резистивное состояние в соседних с ним сверхпроводящих слоях возникает электронно-дырочный разбаланс и через соседние контакты течет дополнительный нормальный ток, связанный с неоднородностью разбаланса. В результате сверхток через эти контакты уменьшается и требуется больший внешний ток, чтобы перевести их в резистивное состояние. Таким образом, разброс критических токов оказывается порядка ηJ_c , что и видно из рис. 2а ($\eta = 0.1$) и рис. 2б ($\eta = 0.5$).

Во-вторых, имеет место явление «избыточного тока». Например, кривая, соответствующая одному контакту в резистивном состоянии, является при достаточно больших токах почти прямой линией, так же как и в случае независимых контактов, однако продолжение этой прямой до $V = 0$ приводит к $J_0 \neq 0$. Этот известный эффект является следствием неравновесности, и для последней ветви на рис. 2а, соответствующей случаю, когда все контакты находятся в резистивном состоянии и разбаланс отсутствует, избыточный ток также отсутствует. Отметим, что в недавней работе по внутреннему эффекту Джозефсона в ВТСП [25] наличие избыточного тока было установлено экспериментально. При увеличении параметра η эффект затягивания ступенек становится более выраженным и форма ветвей изменяется (рис. 2б).

При промежуточных значениях параметра неравновесности, $\eta \sim 1$ (рис. 3), характер ветвей существенно изменяется и общий вид ВАХ зависит от параметра $\alpha\Gamma$. Появляется характерная «волнистость», связанная с зависимостью фаз синхронизации от тока (см. ниже).

При больших $\eta \gg 1$ ситуация определяется значением второго параметра $\alpha\Gamma$. Если

⁴⁾ Резистивным называется состояние, в котором джозефсоновская разность фаз в среднем растет $(d\varphi/dt) \neq 0$.

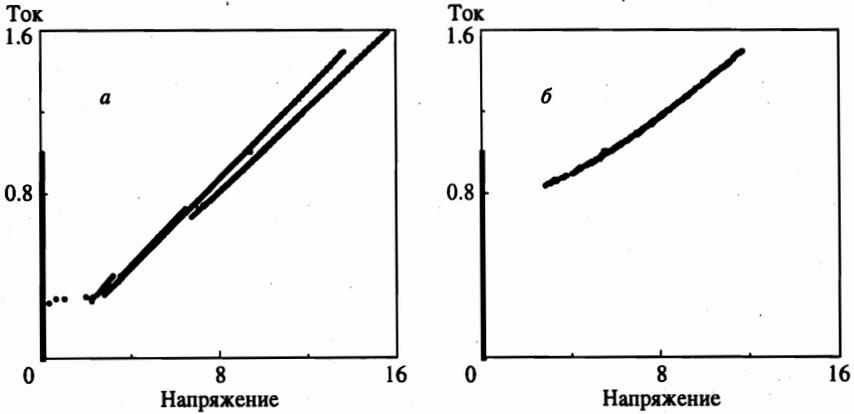


Рис. 4. ВАХ цепочки 10 контактов с $\beta = 10$, $\zeta = 1$ при больших параметрах неравновесности: а) $\eta = 100$, $\alpha\Gamma = 100$; б) $\eta = 100$, $\alpha\Gamma = 1$

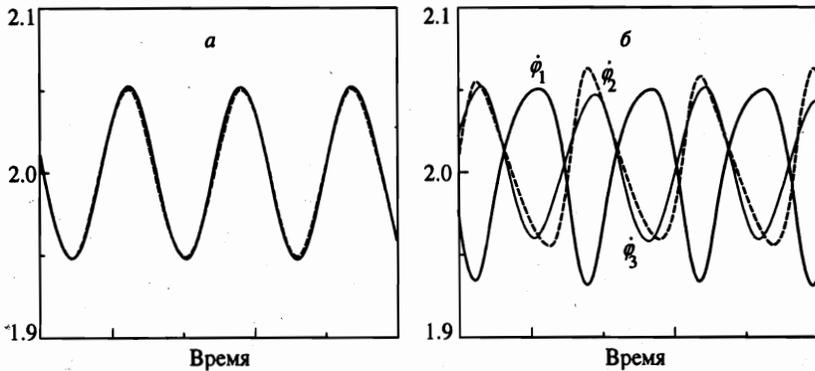


Рис. 5. Временная динамика джозефсоновских фаз (изображены φ_1 , φ_2 и φ_3) при $\beta = 10$, $\alpha\Gamma = 0.1$, $\eta = 0.5$, $\zeta = 1$ и $j = 2$: а) без интерференционных членов (синфазный режим); б) с учетом интерференционного члена « f_2 » с $f_2 = 0.1$ (режим со сдвигом фаз)

$\alpha\Gamma \sim \eta$ или $\alpha\Gamma \gg \eta$, то реализуется режим гигантского гистерезиса (рис. 4а), в котором $V \simeq NJ$ при $J > J_c$, N — число контактов, независимо от числа контактов в резистивном состоянии. Ветви ВАХ, соответствующие разным состояниям, лежат очень близко друг к другу. Если же $\alpha\Gamma \ll \eta$, то в динамическом состоянии велики осцилляции разбаланса и реализуется режим хаотических осцилляций. Ветви ВАХ в этом режиме совсем исчезают и гистерезис становится мал (рис. 4б).

Высокочастотное взаимодействие контактов

В заключение обсудим характер высокочастотного взаимодействия контактов. Этот вопрос важен как при интерпретации СВЧ эксперимента по внутреннему эффекту Джозефсона в ВТСП, так и с прикладной точки зрения. Особый интерес представляет режим синфазной синхронизации цепочки контактов, в котором достигаются оптимальные условия для генерации и приема микроволн. Наши исследования показали, что

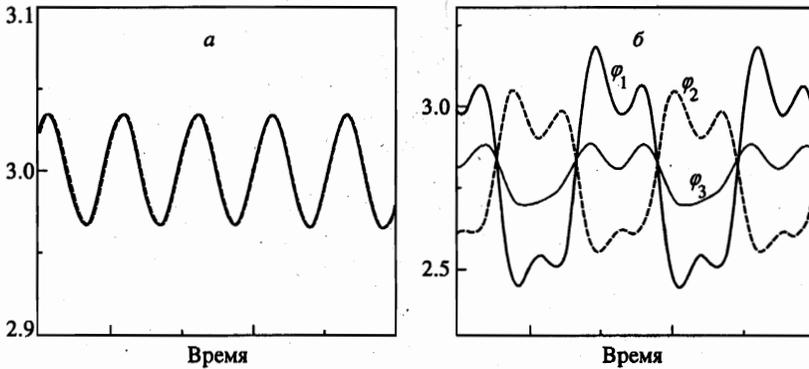


Рис. 6. Временная динамика джозефсоновских фаз (изображены φ_1 , φ_2 и φ_3) при $\beta = 10$, $\alpha\Gamma = 1$, $\eta = 1$, $\zeta = 1$: а) при $j = 3$ (синфазный режим); б) при $j = 2.8$ (режим со сдвигом фаз). Фазовый сдвиг зависит от величины тока

как при слабом ($\eta < 1$), так и при сильном взаимодействии ($\eta > 1$) могут иметь место как синфазные режимы, так и более сложные синхронные режимы со сдвигом фаз (рис. 5, 6), неоднородные режимы с разными ведущими частотами контактов и хаотические режимы. При слабом взаимодействии в режимах с частью контактов в резистивном состоянии наблюдалась синхронизация групп контактов. Численные расчеты показали, что тип синхронизации зависит от параметров и от внешнего тока. Так, например, при малых значениях η в рамках упрощенной системы уравнений (52)–(55) наблюдается синфазная синхронизация (рис. 5а), но дополнительный учет члена с f_2 , входящего в более общие уравнения (56), (57), приводит к более сложному режиму со сдвигом фаз (рис. 5б). Интересно также отметить, что бывают режимы, в которых синфазная синхронизация наблюдается только при некоторых значениях тока, а в промежутках имеет место сдвиг фаз (рис. 6). Этим объясняется наличие «волнистой» структуры ВАХ (рис. 3б).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы последовательно рассмотрели теорию неравновесного эффекта Джозефсона от микроскопических уравнений для функций Грина до макроскопических динамических уравнений, в которых электронно-дырочный разбаланс учитывается в квазигидродинамическом приближении. Рассчитанные вольт-амперные характеристики показывают характер влияния электронно-дырочного разбаланса на динамику одномерных цепочек контактов. Мы полагаем, что полученные результаты окажутся важны при исследовании субмикронных джозефсоновских структур и внутреннего эффекта Джозефсона в ВТСП. В недавней работе [53] экспериментально исследованы ВАХ цепочки внутренних контактов в $\text{Bi}_2\text{Sr}_{1.5}\text{La}_{0.5}\text{CuO}_{6+\delta}$ (Bi-2201), в котором сверхпроводящий «электрод» образован не двумя-тремя слоями CuO_2 , как в других исследованных ранее соединениях Bi и Tl, а только одним слоем. В результате, вероятно, неравновесные эффекты гораздо сильнее и приведенные в работе [53, Fig. 1b] вольт-амперные характеристики очень похожи на ВАХ, приведенную на рис. 3а нашей работы. Подробное исследование неравновесного внутреннего эффекта Джозефсона является предметом отдельной

публикации.

Автор благодарит А. А. Андронova, В. В. Курина и А. С. Мельникова за поддержку работы и плодотворные дискуссии. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-02-16928, 99-02-16188), в рамках программы Ведущие научные школы (проект 96-15-96591), а также при поддержке INTAS (грант № 96-0457) и исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве (ICFPM).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения с интерференционными членами можно приближенно вывести, полагая, что функция распределения $\alpha_\epsilon(t)$ пропорциональна $\Psi(t)$, интегрируя (35) по ϵ и сохраняя все члены:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_i}{dt} = & a \frac{d\Phi_i}{dt} + 2\nu f \frac{\hbar}{2|e|} \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{dt} \right) - 2\nu f_1 \frac{T}{|e|} (\sin \varphi_{i-1,i} - \sin \varphi_{i,i+1}) - \\ & - 2\nu f_2 \frac{\hbar}{2|e|} \left(\frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} \cos \varphi_{i-1,i} - \frac{d\varphi_{i,i+1}}{dt} \cos \varphi_{i,i+1} \right) + 2\nu c (\Psi_{i-1} + \Psi_{i+1} - 2\Psi_i) + \\ & + 2\nu c_1 [(\Psi_{i-1} - \Psi_i) \cos \varphi_{i-1,i} + (\Psi_{i+1} - \Psi_i) \cos \varphi_{i,i+1}] + 2\nu (c_2 \cos \varphi_{i-1,i} + c_2 \cos \varphi_{i,i+1} + 2c_3) \Psi_i - \\ & - 2\nu (c_2 + c_3 \cos \varphi_{i-1,i}) \Psi_{i-1,i} - 2\nu (c_2 + c_3 \cos \varphi_{i,i+1}) \Psi_{i,i+1} - \tau_q^{-1} \Psi_i. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Выражение для тока следующее:

$$\begin{aligned} J_{i-1,i} = & f_3 \frac{\hbar}{2|e|R_N} \frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} + c \frac{\Psi_{i-1} - \Psi_i}{R_N} + \frac{T}{|e|R_N} f_4 \sin \varphi_{i-1,i} + \\ & + \left[f_5 \frac{\hbar}{2|e|R_N} \frac{d\varphi_{i-1,i}}{dt} + c_1 \frac{\Psi_{i-1} - \Psi_i}{R_N} \right] \cos \varphi_{i-1,i}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь коэффициенты $a(T)$, $f(T)$, $f_1(T)$, $f_2(T)$, $f_3(T)$, $f_4(T)$, $f_5(T)$ вычисляются точно при любых температурах:

$$a(T) = \int_0^\infty \left[\frac{d(u_\epsilon \operatorname{th}(\epsilon/2T))}{d\epsilon} - \frac{\Delta}{\epsilon} \frac{d(v_\epsilon \operatorname{th}(\epsilon/2T))}{d\epsilon} \right] d\epsilon = 1 - \Gamma, \quad (\text{П.3})$$

$$f(T) = \int_0^\infty \frac{u'_\epsilon (u_\epsilon - (\Delta/\epsilon)v_\epsilon)}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.4})$$

$$f_1(T) = -\frac{1}{T} \int_0^\infty \left[\left(v_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} u_\epsilon \right) w'_\epsilon + \left(w_\epsilon - \frac{\Delta}{\epsilon} v_\epsilon \right) v'_\epsilon \right] \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} d\epsilon, \quad (\text{П.5})$$

$$f_2(T) = -\int_0^\infty \frac{v'_\epsilon (v_\epsilon - (\Delta/\epsilon)u_\epsilon)}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.6})$$

$$f_3(T) = \int_0^{\infty} \frac{u_{\epsilon} u'_{\epsilon}}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.7})$$

$$f_4(T) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} (v_{\epsilon} w'_{\epsilon} + w_{\epsilon} v'_{\epsilon}) \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2T} d\epsilon, \quad (\text{П.8})$$

$$f_5(T) = \int_0^{\infty} \frac{v_{\epsilon} v'_{\epsilon}}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.9})$$

а коэффициенты $c(T)$, $c_1(T)$, $c_2(T)$, $c_3(T)$ зависят от формы функции распределения и при (43) равны

$$c(T) = \int_0^{\infty} \frac{u_{\epsilon} h_{\epsilon}}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.10})$$

$$c_1(T) = \int_0^{\infty} \frac{w_{\epsilon} b_{\epsilon}}{2T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.11})$$

$$c_2(T) = \int_0^{\infty} \frac{\Delta v_{\epsilon} h_{\epsilon}}{2\epsilon T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon, \quad (\text{П.12})$$

$$c_3(T) = \int_0^{\infty} \frac{\Delta y_{\epsilon} b_{\epsilon}}{2\epsilon T \operatorname{ch}^2(\epsilon/2T)} d\epsilon. \quad (\text{П.13})$$

Эти выражения позволяют определить поправки к уравнениям (47) и (45). С более общей точки зрения уравнения (П.1) и (П.2) можно рассматривать как феноменологические, поскольку они содержат все основные компоненты источника разбаланса и межслоевого тока.

Литература

1. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, УФН **128**, 3 (1979).
2. *Nonequilibrium Superconductivity*, ed. by D. N. Langenberg and A. I. Larkin, Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 12, North-Holland, Amsterdam (1986).
3. А. М. Гулян, Г. Ф. Жарков, *Сверхпроводники во внешних полях*, Наука, Москва (1990).
4. D. W. Palmer and J. E. Mercereau, Phys. Lett. A **61**, 135 (1977).
5. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, А. В. Зайцев, Письма в ЖЭТФ **37**, 122 (1978).
6. В. К. Каплуненко, В. В. Рязанов, В. В. Шмидт, ЖЭТФ **89**, 1389 (1985).
7. В. К. Каплуненко, ФНТ **12**, 382 (1986).
8. M. G. Blamier, E. C. G. Kirk, J. E. Evetts, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. Lett. **66**, 220 (1991).
9. И. П. Невирковец, М. Г. Бламайер, Дж. Е. Иверс, ФНТ **21**, 1258 (1995).
10. I. P. Nevirkovets, Phys. Rev. B **56**, 832 (1997).
11. Ф. В. Комиссинский, Г. А. Овсянников, Письма в ЖЭТФ **61**, 587 (1995).
12. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kinkel, and P. Müller, Phys. Rev. Lett. **68**, 2394 (1992); R. Kleiner and P. Müller, Phys. Rev. B **49**, 1327 (1994).

13. Yu. I. Latyshev and A. F. Volkov, *Physica C* **182**, 47 (1991); Yu. I. Latyshev, J. E. Nevelskaya, and P. Monceau, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 932 (1996).
14. F. X. Régi, J. Schneck, J. F. Palmier, and H. Savary, *J. Appl. Phys.* **76**, 4426 (1994).
15. J. Takeya and S. Akita, *Physica C* **235-240**, 3287 (1995).
16. A. Yurgens, D. Winkler, Y. M. Zhang, N. Zavaritsky, and T. Claeson, *Physica C* **235-240**, 3269 (1995).
17. Ji Ung Lee, J. E. Nordman, and G. Hohenwarter, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 1471 (1995).
18. M. Veith et al., *J. Appl. Phys.* **80**, 3396 (1996).
19. K. Schlenga et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4943 (1996).
20. A. Yurgens, D. Winkler, N. V. Zavaritsky, and T. Claeson, *Phys. Rev. B* **53**, R8887 (1996); *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5122 (1997).
21. K. Tanabe, Y. Hidaka, S. Karimoto, and M. Suzuki, *Phys. Rev. B* **53**, 9348 (1996).
22. M. Rapp, A. Murk, R. Semerad, and W. Prusseit, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 928 (1996).
23. A. Odagawa, M. Sakai, H. Adachi, K. Setsune, T. Hirao, and K. Yoshida, *Jap. J. Appl. Phys.* **36**, L21 (1997).
24. M. Itoh, S. Karimoto, K. Namekawa, and M. Suzuki, *Phys. Rev. B* **55**, R12001 (1997).
25. S. I. Yan, L. Fang, M. S. Si, and J. Wang, *J. Appl. Phys.* **82**, 480 (1997).
26. H. L. Jonson, G. Hechtfisher, G. Götz, R. Kleiner, and P. Müller, *J. Appl. Phys.* **82**, 756 (1997).
27. K. Schlenga et al., *Phys. Rev. B* **57**, 14518 (1998).
28. T. Koyama and M. Tachiki, *Phys. Rev. B* **54**, 16183 (1996).
29. S. N. Artemenko and A. G. Kobelkov, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3551 (1997).
30. D. A. Ryndyk, E-print archive cond-mat/9511001 (1995).
31. Д. А. Рындык, Письма в ЖЭТФ **65**, 755 (1997).
32. D. A. Ryndyk, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3376 (1998).
33. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **61**, 1254 (1971).
34. M. Tinkham and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1366 (1972); M. Tinkham, *Phys. Rev. B* **6**, 1747 (1972).
35. А. Г. Аронов, В. Л. Гуревич, ФТТ **16**, 2656 (1974); A. G. Aronov, Yu. M. Gal'perin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub, *Adv. Phys.* **30**, 539 (1981).
36. А. Ф. Волков, А. В. Зайцев, ЖЭТФ **69**, 2222 (1975).
37. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
38. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **68**, 1915 (1975).
39. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **73**, 299 (1977).
40. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, ЖЭТФ **64**, 356 (1973); Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, ЖЭТФ **65**, 396 (1973).
41. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **65**, 1704 (1973).
42. C.-R. Hu, *Phys. Rev. B* **21**, 2775 (1980).
43. А. Л. Шеланков, ЖЭТФ **78**, 2359 (1980).
44. A. Schmid, in *Nonequilibrium superconductivity, Phonons, and Kapitza boundaries*, (Proc. NATO ASI), ed. by K. E. Gray, Plenum, New York (1981), p. 423.
45. А. Ф. Волков, ЖЭТФ **68**, 756 (1975).
46. И. Э. Бульженков, Б. И. Ивлев, ЖЭТФ **74**, 224 (1978).
47. Б. И. Ивлев, ЖЭТФ **75**, 1771 (1978).
48. А. М. Гулян, Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ **89**, 156 (1985).
49. A. Schmid and G. Shön, *J. Low. Temp. Phys.* **20**, 207 (1975).
50. L. N. Bulaevskii et al., *Phys. Rev. B* **50**, 12831 (1994).
51. L. N. Bulaevskii et al., *Phys. Rev. B* **53**, 14601 (1996); L. N. Bulaevskii et al., *Phys. Rev. B* **54**, 7521 (1996).
52. A. S. Mel'nikov, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2786 (1996).
53. A. Yurgens, D. Winkler, T. Claeson, T. Murayama, and Y. Ando, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3148 (1999).