ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 5(11), стр. 1630–1647

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. Н. Гордиенко, С. С. Моисеев†*

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 октября 1998 г.

Рассмотрена задача о структуре стационарной изотропной однородной турбулентности несжимаемой жидкости $\mathrm{Re} \gg 1$, приводимой в движение силой с амплитудой f_0, пространственным и временным масштабами r_0 и τ_0, соответственно. Установлено, что в зависимости от величины силы, приводящей жидкость в движение, могут возникать три принципиально различных турбулентных стационарных состояния жидкости и найдены безразмерные параметры, отвечающие за переход от одного состояния к другому: $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0$ и $\Gamma = \gamma^{4/3}\,\mathrm{Re}$. Показано, что при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \ll 1$ в инерционном интервале формируется колмогоровский спектр $E(k) \propto 1/k^{5/3}$. При переходе к турбулентным течениям, возникающим из-за действия сил большей амплитуды f_0, т. е. при переходе к режиму с $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$, вблизи вязкого интервала возникает участок спектра $E(k) \propto 1/k^2$, «отсекающий» колмогоровский спектр от вязкого интервала. Дальнейшее увеличение амплитуды силы f_0, т. е. достижение области параметров $\gamma \gg 1$, $\Gamma \gg 1$, приводит к тому, что весь инерционный интервал оказывается «занятым» спектром $E(k) \propto 1/k^2$, а вне инерционного интервала начинается генерация крупномасштабных структур с характерным размером вплоть до $\gamma^{2/5}r_0$. В режиме с $\Gamma \ll 1$ мощность, диссипируемая в единице массы жидкости, не зависит от величины вязкости, но при переходе к турбулентным режимам с $\Gamma \gg 1$ вязкие потери начинают зависеть от вязкости жидкости. «Выключение» вязкой диссипации при $\Gamma \gg 1$ показывает, что кризис сопротивления может возникать просто при увеличении мощности источника без каких-либо дополнительных условий. При указанном способе возбуждения турбулентности интеграл Лойцянского расходится при любых значениях параметров γ, Γ. Предложен физический механизм, объясняющий перестройку спектров турбулентных пульсаций при различных γ и Γ. Все результаты получены без учета перемежаемости.

PACS: 47.25.Cg, 05.40.+j, 47.27.Ak

1. ВВЕДЕНИЕ

Переход жидкости или плазмы в турбулентное состояние представляется принципиально важным для понимания физики ряда процессов (в том числе и явлений переноса), протекающих в этих средах. К настоящему времени выполнено огромное число как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных изучению различных аспектов турбулентности в самых разнообразных ситуациях. Таким образом, достигнуто

*E-mail: gord@itp.ac.ru
†E-mail: moiseev@mx.iki.rssi.ru

понимание слабой турбулентности, т. е. случая, когда динамика системы может быть описана на языке слабовзаимодействующих линейных волн, однако теория сильной турбулентности по-прежнему далека от завершения.

Наиболее известным примером сильной турбулентности является турбулентность, возникающая в течениях несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Несмотря на то, что главный результат теории гидродинамической турбулентности — колмогоровский спектр — получен свыше пятидесяти лет назад и неоднократно подтверждался экспериментально (см. подробности, например, в [1]), попытки теоретического обоснования этого спектра, основанные даже на таких обычно эффективных методах теоретической физики как метод ренормгруппы [2–4], диаграммная техника [5, 6] и предложенная еще Хопфом функциональная формулировка задачи [7], не дали полностью удовлетворительных результатов (см. пояснения ниже). Можно утверждать, что восходящий к А. Н. Колмогорову способ получения спектра турбулентных пульсаций до сих пор остается наиболее ясным подходом к проблеме.

Основой предложенной Колмогоровым идеологии является гипотеза о том, что единственной размерной константой теории развитой гидродинамической турбулентности в инерционном интервале является скорость диссипации энергии в единице массы жидкости, т. е. величина с размерностью см^2/с^3. При этом остается неясным, чем величина с такой размерностью «лучше» величины с размерностью см^n/с^m при $3n \neq 2m$, т. е. чем выделен случай $3n = 2m$, где m и n — действительные числа.

Колмогоровский спектр и связанные с ним представления об универсальности, постоянном потоке энергии по спектру, инерционном интервале являются основой для современного понимания природы однородной турбулентности несжимаемой жидкости. Вместе с тем, колмогоровский спектр является не единственным спектром турбулентных пульсаций, наблюдаемым экспериментально в турбулентной несжимаемой жидкости. Кроме колмогоровского спектра $E(k) \propto 1/k^{5/3}$ хорошо известен, например, спектр $E(k) \propto 1/k^{7/3}$, связанный с потоком спиральности [8]. Следовательно, необходимо определить условия, при которых именно скорость диссипации энергии является размерной константой, определяющей спектр турбулентных пульсаций, и рассмотреть вопрос о том, каким образом и в каких условиях она заменяется размерным параметром другой природы. К сожалению, ни в одной из цитированных выше работ, посвященных обоснованию колмогоровского спектра, эта проблема не получила должного освещения. Таким образом, возникает вопрос об условиях формирования того или иного спектра, т. е. о нахождении параметров, определяющих спектральный состав турбулентных пульсаций в том или ином интервале волновых векторов. Проблеме определения участков спектра с универсальным поведением и параметров, ответственных за их возникновение, посвящена настоящая работа. Ряд связанных с этим вопросов был кратко рассмотрен в работе [9], однако часть результатов этой работы нуждается в уточнении и физической интерпретации.

Прежде чем перейти к изложению конкретных результатов, специально подчеркнем, что все рассмотрение в настоящей работе будет проведено без учета перемежаемости. Напомним, что явление перемежаемости приводит к появлению дополнительного множителя типа $(L/r)^\delta$, где L — некоторый характерный размер, а δ — аномальная размерность. Таким образом, эффекты перемежаемости могут существенно изменять численное значение коррелятора даже при малом δ, если L достаточно велико. Вместе с тем, если δ мало, то связанный с перемежаемостью дополнительный множитель является функцией, медленно меняющейся по сравнению в «колмогоровской» частью коррелятора. Иными словами, пренебрежение перемежаемостью в чем-то аналогично ВКБ-приближению: учитывается лишь быстроизменяющаяся функция, хотя и медленная часть на больших интервалах может существенно изменяться по величине.

Возможность пренебречь перемежаемостью является гипотезой, в рамках которой справедливы полученные ниже результаты. Таким образом, в настоящей работе не затрагиваются проблемы применимости теории Колмогорова из-за перемежаемости, а изучается вопрос о необходимости модификации теории Колмогорова при учете конечного времени корреляции силы, приводящей жидкость в движение.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Интересуясь лишь потоками жидкости с большими числами Рейнольдса, в качестве первого шага рассмотрим уравнение Эйлера ($\mathrm{Re} = +\infty$) с внешней силой $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}\right), \tag{2}$$

где K описывает корреляционные свойства силы $\mathbf{f}$, приводящей жидкость в движение, и по определению f_0^2

$$\int K\left(\frac{t}{\tau_0}, \frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) d\mathbf{r}dt = r_0^3 \tau_0.$$

Для дальнейшего важно, что последний интеграл сходится и отличен от нуля, т. е. к этому сводятся ограничения, налагаемые на силы, приводящие жидкость в движение. Во избежании недоразумений специально подчеркнем, что из равенства $\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0$ не следует обращения в нуль обсуждаемого интеграла от функции K. Без ограничения общности можно считать силу $\mathbf{f}$ чисто соленоидальной, включив потенциальную часть в градиент давления.

Прежде всего перепишем уравнение (1) в лагранжевых координатах [12]. Для этого сначала необходимо выразить давление через распределение скоростей в жидкости. Вычисляя дивергенцию от (1) с учетом условия несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, имеем

$$\triangle p = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(v_i v_j\right), \tag{3}$$

здесь и всегда, если не оговорено противное, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Согласно (3) получаем

$$p(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'}\left(v_i' v_j'\right) d\mathbf{r}', \tag{4}$$

где $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)$.

Используя (3) и (4), находим

$$\frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\int (v_i' - v_i)(v_j' - v_j)\frac{\partial^3}{\partial x_i'\partial x_j'\partial x_k'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'. \tag{5}$$

Перейдем к лагранжевым переменным [12]. Пусть частица жидкости, в момент времени $t_0 = 0$ находившаяся в точке $\mathbf{r}_0$, в момент времени t находится в точке $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ (заметим, что величину $\mathbf{r}_0$ можно рассматривать просто как номер частицы). Тогда скорость частицы с «номером» $\mathbf{r}_0$ в момент времени t, обозначаемая в дальнейшем $\mathbf{w}(\mathbf{r}_0, t)$, равна просто скорости в момент времени t в точке $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, т. е.

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t). \tag{6}$$

Замечая, что согласно условию несжимаемости

$$\det\left|\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial \mathbf{r}_0}\right| = 1, \tag{7}$$

т. е. движение не меняет «полного числа» частиц, перепишем (1) в виде

$$\frac{d}{dt}w_k = -\int G_{ijk}(\mathbf{r}\left(\mathbf{r}_0, t\right) - \mathbf{r}(\mathbf{r}_0', t))\,(w_i' - w_i)(w_j' - w_j)\,d\mathbf{r}_0' + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}r_k(\mathbf{r}_0, t) = w_k(\mathbf{r}_0, t), \tag{9}$$

при этом условие несжимаемости записывается просто как некоторое ограничение на допустимые начальные условия:

$$\mathrm{div}_{\mathbf{r}_0}\mathbf{w}(\mathbf{r}_0, t) = 0. \tag{10}$$

Уравнения (8), (9) являются уравнениями классической механики континуума классических частиц, хотя и с достаточно экзотическим взаимодействием. В связи с этим естественным образом возникают несколько принципиальных вопросов. Во-первых, заметим, что при отсутствии внешней силы уравнение Эйлера (1), решения которого предполагаются имеющими достаточное количество производных (т. е. принадлежащими соответствующему классу гладкости), сохраняют полную кинетическую энергию жидкости, которая совпадает с кинетической энергией частиц динамической системы (8), (9). Последнее чрезвычайно нетривиально: сохраняется кинетическая энергия в системе взаимодействующих частиц. При этом закон взаимодействия таков, что нельзя утверждать, что сила, действующая на частицу в любой момент времени, перпендикулярна скорости этой частицы. Поэтому возникает вопрос о том, какое свойство динамической системы (8), (9) отличает ее от гамильтоновых систем, в которых сохраняется лишь полная (а не отдельно лишь кинетическая) энергия, или систем с диссипацией (силами трения), в которых нет закона сохранения никакой энергии. Для того чтобы это понять, необходимо обратиться к исходным предпосылкам, которые привели к уравнению Эйлера. Прежде всего заметим, что если в системе частиц справедлив третий закон Ньютона, но между собой взаимодействуют лишь частицы с равными векторами скоростей, то в такой системе будет сохраняться именно суммарная кинетическая энергия. При получении уравнения Эйлера предполагалось, что между собой взаимодействуют лишь «соприкасающиеся» лагранжевы частицы, причем справедлив третий закон Ньютона (действие равно противодействию), а скорости лагранжевых частиц гладко зависят от координат. Таким образом, если рассмотреть две лагранжевы частиц a и b, взаимодействующие между собой, то сила, действующая со стороны частицы a на частицу b, $\mathbf{F}_{ab}$ связана с силой $\mathbf{F}_{ba}$ соотношением $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ab}$ (третий закон Ньютона), а их скорости совпадают $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$ с точностью до бесконечно малых величин, исчезающих при нулевом расстоянии между частицами a и b (существует лишь «контактное» взаимодействие), т. е. работа, совершаемая частицей a над частицей b за бесконечно малый промежуток времени dt, равна $\mathbf{v}_b\mathbf{F}_{ab}dt$, а работа, совершаемая частицей b над частицей a за тот же промежуток времени, $\mathbf{v}_a\mathbf{F}_{ba}dt$ совпадает с ней по величине, но противоположна по знаку. Из сказанного очевидно, почему сохраняется кинетическая энергия жидкости, движение которой описывается гладкими решениями уравнения Эйлера. При отсутствии должной гладкости в приведенных выше рассуждениях нельзя пренебрегать бесконечно малыми отличиями в скоростях взаимодействующих частиц. Впрочем, в сказанном можно убедиться и чисто формальным путем, не прибегая к наглядным соображениям, связанным с «истоками» уравнения Эйлера: заметим, что если подынтегральное выражение в интеграле

$$\int (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \nabla p(\mathbf{r}, t))\, d\mathbf{r}$$

является гладкой функцией координат, то интеграл сводится к поверхностному в случае несжимаемой жидкости и уравнение Эйлера сохраняет кинетическую энергию жидкости. Следовательно, сохранение кинетической энергии в динамической системе (8), (9) является свойством частного класса ее решений, соответствующего решениям уравнения Эйлера, принадлежащим достаточно высокому классу гладкости. Последние рассуждения дают интерпретацию введенным в [8] представлениям о безвязком пределе с конечной диссипацией. Заметим, что решения, соответствующие безвязкому пределу с конечной диссипацией, должны возникать естественным образом в динамической системе (8), (9), если не требовать существования производных высоких порядков по «номеру» лагранжевых частиц, параметру $\mathbf{r}_0$. Таким образом, получение замкнутого необратимого кинетического уравнения для лагранжевых частиц жидкости позволяет естественным образом формализовать наглядную и часто используемую в теории турбулентности концепцию «турбулентной вязкости».

Для этой системы частиц (8), (9) может быть, разумеется, записана цепочка зацепляющихся уравнений для многочастичных функций распределения. К сожалению, из-за сильного и необычного взаимодействия между частицами не удается корректно «оборвать» получающуюся бесконечную цепочку уравнений. Вместе с тем существует способ продвинуться в понимании динамики изучаемой системы. В самом деле, понятно, какой интерес для гидродинамики представляло бы нахождение одновременных функций распределения скорости и градиента давления. Однако на языке динамической системы (8), (9) градиент давления в какой-либо точке пропорционален ускорению лагранжевой «частицы» жидкости, находящейся в этой же точке. Учитывая последнее, можно использовать метод, аналогичный методу работы [14]: любое описание динамики системы означает в конечном итоге описание типичных одночастичных траекторий, составляющих динамическую систему частиц; при этом использование функций распределения ставит вопрос о том, от каких переменных эти функции должны зависеть, чтобы на их языке можно было получить замкнутое описание динамики. В случае газа, как хорошо известно, можно ограничиться рассмотрением функций распределения, зависящих лишь от координат и импульсов (уравнение Больцмана), в случае сред с более сложными динамическими свойствами необходимо рассматривать «расширенные» функции распределения, зависящие и от высших производных [14].

3. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Для изучения спектральных свойств задачи (1), (2) воспользуемся кинетическим уравнением для лагранжевых частиц несжимаемой жидкости, полученным в [13] при $\mathrm{Re} \to +\infty$ (см. пояснения ниже):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2\right) F_2(t,1,2) = P(t,1,2) + P(t,2,1). \tag{11}$$

Здесь $F_2(t,1,2) = F_2(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_2)$ — «расширенная» (т. е. зависящая не только от скоростей, но и от ускорений, возникающих из-за взаимодействия лагранжевых частиц) двухчастичная функция распределения,

$$\hat{L}_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + (\mathbf{a}_i + \mathbf{f}(\mathbf{r}_i,t)) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i}, \quad i = 1,2,$$

$$P(t,1,2) = \int_0^{+\infty} \hat{R}(t,t-\tau) \left(\iint \hat{Q}(1,3)\hat{Q}(2,4) F_2(t-\tau,1,3) F_2(t,2,4)\, d3d4 \right) d\tau, \tag{12}$$

$$\hat{Q}(1,2) = 2(a_{2,l} - a_{1,l})(v_{2,m} - v_{1,m}) \frac{\partial^3}{\partial x_{1,l}, \partial x_{1,m}, \partial x_{1,p}} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{\partial}{\partial a_{1,p}} -$$
$$- (v_{2,m} - v_{1,m})(v_{2,l} - v_{1,l})(v_{2,n} - v_{1,n}) \frac{\partial^4}{\partial x_{1,l}, \partial x_{1,m}, \partial x_{1,n}, \partial x_{1,p}} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{\partial}{\partial a_{1,p}},$$

где по повторяющимся индексам в последней формуле предполагается суммирование, а $v_{2,l}$, $a_{2,l}$ и $v_{1,l}$, $a_{1,l}$ — l-ые компоненты векторов $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{a}_1$ соответственно. Оператор $\hat{R}(t,t-\tau)$ определен как

$$\hat{R}(t,t-\tau) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{U}(t-\tau), \tag{13}$$

где оператор $\hat{U}(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{U}(t)\hat{L}, \quad \hat{U}(0) = 1, \tag{14}$$

а оператор $\hat{U}^{-1}(t)$ удовлетворяет вытекающему из (14) уравнению

$$\frac{d\hat{U}^{-1}(t)}{dt} = -\hat{L}\hat{U}^{-1}(t), \quad \hat{U}^{-1}(0) = 1.$$

Операторы $\hat{U}(t)$ и $\hat{U}^{-1}(t)$ могут быть представлены как хронологизированные экспоненты, которые в случае не зависящей от времени силы $\mathbf{f}$ сводятся к обычным экспонентам и оператор $\hat{R}$ в этом случае легко вычисляется. В общей ситуации вычисление оператора $\hat{R}$ может быть проведено лишь в частных случаях, что не имеет для дальнейшего никакого значения, поскольку скейлинговые свойства оператора $\hat{R}$, существенные для дальнейшего, следуют из уравнений (13), (14).

Поясним смысл введения функций распределения, содержащих в качестве дополнительных аргументов ускорения. Обычно при построении кинетических уравнений пытаются, исходя из функций распределения, описать процессы, связанные с межчастичным взаимодействием. В [14] предложено строить кинетические уравнения, решая обратную задачу: считая заданным распределение сил в пространстве (в случае жидкости — градиента давления), вычислять многочастичные функции распределения, согласующиеся с заданным распределением «силовых» векторов. Таким образом, возникают функции распределения, зависящие от ускорений. Поскольку на исходные распределения «сил» в пространстве не накладывается никаких ограничений, кроме вытекающих из законов Ньютона, подобный подход позволяет в рамках кинетического уравнения корректно описать флуктуации [15]. Более того, любая «расширенная» функция распределения содержит и такую информацию, которая содержится лишь во всем бесконечном наборе стандартных функций распределения (например, любая «расширенная» функция распределения позволяет вычислить $\langle \mathbf{a}^{2n} \rangle$ при любом n). В связи с последним становится ясным, почему в ряде задач, в которых стандартную цепочку ББГКИ оборвать невозможно, для «расширенной» двухчастичной функции распределения удается получить замкнутое уравнение [13]. Укажем, что кинетические уравнения такого типа успешно применялись для решения ряда задач физики плазмы [16].

Если функция $F_2(t,1,2)$ есть решение уравнения (11), то функция

$$F_2^{(\Delta,\lambda)}(t,1,2) = \lambda^{-18\Delta-6} F_2\left(\lambda^{1+\Delta}t, \lambda\mathbf{r}_1, \lambda^{-\Delta}\mathbf{v}_1, \lambda^{-1-2\Delta}\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{r}_2, \lambda^{-\Delta}\mathbf{v}_2, \lambda^{-1-2\Delta}\mathbf{a}_2\right), \tag{15}$$

также является решением уравнения (11), но с другой внешней силой

$$\mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r},t) = \lambda^{2\Delta+1}\mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{r}, \lambda^{1+\Delta}t\right), \tag{16}$$

где $\lambda > 0$, Δ — произвольные числа. В этом легко убедиться, подставляя (15), (16) в (11).

Ряд выражений настоящего раздела приведен в [9] с неточностями, не повлиявшими на результаты этой работы.

Обратим внимание на одну принципиальную особенность формализма кинетического уравнения в теории турбулентности. Формализм кинетического уравнения позволяет описывать турбулентность в рамках эволюционной задачи, т. е., исходя из произвольно заданных начальных условий, можно проследить эволюцию решения во времени. Если при этом начальные условия забываются, то система выходит на некоторое стационарное решение. Замечательным при этом является возможность нахождения стационарного решения, исходя из эволюционной задачи. При этом нет необходимости проводить процедуру обращения какого-либо линейного или нелинейного оператора, т. е. возможность изучения турбулентности в рамках эволюционной задачи позволяет естественным образом избежать проблемы нулевых мод, всякий раз возникающей при обращении операторов. Сложность проблемы нулевых мод можно проследить, например, на модели Крайчнана диффузии пассивного скаляра [10]. Несмотря на то что в данной модели удается получить замкнутое линейное уравнение для четырехточечного коррелятора, неэволюционный характер получаемой краевой задачи приводит к необходимости обращения оператора, т. е. к проблеме нулевых мод, которая, как следует из

[10], является одной из центральных в задаче о диффузии пассивного скаляра. Проблема нулевых мод при описании турбулентности несжимаемой жидкости рассматривалась в [11]. Заметим, что проблема нулевых мод в задаче о пассивном скаляре существенно сложнее проблемы нулевых мод в гидродинамической турбулентности. Это следует уже из того, что задача о пассивном скаляре описывается линейным неоднородным уравнением в частных производных, а гидродинамическая турбулентность связана с существенно нелинейной задачей. Указанное различие имеет принципиальный характер: в самом деле, решение неоднородного линейного уравнения переходит в решение того же уравнения, если к нему добавить произвольное решение соответствующего ему однородного уравнения, а в нелинейных задачах нет никакого аналога указанному свойству линейных уравнений. Другой принципиальной особенностью задачи о пассивном скаляре, делающей ее в определенном смысле более сложной по сравнению с задачей о гидродинамической турбулентности, является то, что для изучения стационарного режима диффузии (т.е. для описания диффузии не зависящими от времени корреляционными функциями) необходимо вводить два типа случайных величин — источник пассивного скаляра и поле скоростей (см., например, [10]).

4. КРУПНОМАСШТАБНАЯ СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА И ИНТЕГРАЛ ЛОЙЦЯНСКОГО

Для изучения крупномасштабной структуры потока так подберем число Δ, чтобы при предельном переходе $\lambda \to +\infty$ функция $F_2^{(\Delta,\lambda)}(t,1,2)$ стремилась к конечному пределу. Для этого необходимо, чтобы коррелятор силы (16) имел конечный предел при $\lambda \to +\infty$, т.е. в связи с равенством

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left\langle \mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r}_1,t_1)\mathbf{f}^{(\Delta,\lambda)}(\mathbf{r}_2,t_2)\right\rangle = f_0^2 r_0^3 \tau_0 \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(t_1-t_2) \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{3\Delta-2}, \tag{17}$$

следует положить $\Delta = \Delta_\infty = 2/3$. Обратим внимание, что именно из-за рассмотрения предела $\lambda \to +\infty$ в правой части (17) коррелятор K внешней силы можно заменить произведением δ-функций. При этом важно, что полученное значение $\Delta_\infty = 2/3 > -1$.

Таким образом, приходим к выводу об однородности функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$ (для доказательства этого достаточно заметить, что, согласно определению предела, $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)} = \lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda\lambda')}$, где λ' — произвольное положительное число) и справедливости соотношения

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_1 \left(\frac{f_0^2 r_0^3 \tau_0}{r^2}\right)^{2/3} \text{ при } r \gg \max\left(r_0, \left(\frac{f_0\tau_0^2}{r_0}\right)^{2/5} r_0\right), \tag{18}$$

где C_1 — универсальная константа. На данном этапе рассмотрения мы не можем объяснить область применимости полученного коррелятора, определяемую неравенством, приведенным в (18). В дальнейшем мы вернемся к вопросу об области применимости (18), а сейчас убедимся в том, что коррелятор (18) на больших расстояниях в самом деле убывает как $1/r^{4/3}$. Действительно, выражая левую часть (18) в виде интеграла от функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$ и используя однородность этой функции, удается установить степенную зависимость рассматриваемого коррелятора от r и определить показатель степени. Заметим, что степенное поведение правой части (18) следует из однородности функции $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(2/3,\lambda)}$, а степень, в которой r входит в правую часть (18), однозначно определяется числом $\Delta_\infty = 2/3$. При этом, разумеется, функциональная зависимость в (18) согласуется с размерностью параметра, входящего в (17). Специально подчеркнем, что мы не постулировали, а доказали степенной характер правой части (18). Выражение (18) описывает рождение крупных вихрей (обратный каскад) и связанные с этими вихрями длинноволновые корреляции. Коррелятор (18) приводит к спектру $E(k) \propto k^{1/3}$ в длинноволновой области, что подтверждается экспериментально [17].

Коррелятор (18) входит в так называемый интеграл Лойцянского [12]

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi}\int r^2 \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\right\rangle\, d\mathbf{r}.$$

Согласно (18), интеграл Лойцянского расходится, $\Lambda = \infty$. Таким образом, корректное описание обратного каскада для изучаемого способа возбуждения турбулентности приводит к заключению о расходимости интеграла Лойцянского. Любопытно, что до этого вопрос о сходимости интеграла Лойцянского изучался лишь для изотропного турбулентного движения с экспоненциально быстрым уменьшением коррелятора (18) на больших расстояниях в начальный момент времени, т. е. в предположении, что можно создать изотропную турбулентность с незначительными длинноволновыми корреляциями. В этом предположении удается показать, что и при дальнейшей свободной эволюции интеграл Лойцянского остается конечным [12]. Выражение (18) показывает, что подобное предположение о пренебрежимо малой роли крупномасштабных вихрей (обратного каскада) для изотропной турбулентности выполнено не всегда.

Напомним, что интеграл Лойцянского связан с квадратом момента количества движения турбулентной жидкости, т. е. в определенном смысле характеризует возникновение спонтанного вращения всей жидкости как целого. Легко убедиться в том, что квадрат полного момента импульса $\mathbf{M}$ жидкости, заключенной в некотором большом объеме V (выделенном в неограниченной жидкости), есть $M^2 = 4\pi\rho^2\Lambda V$, где ρ — плотность жидкости. Тот факт, что $M^2 \sim V^{20/9}$, подтверждает, что в динамике турбулентной жидкости существенны длинноволновые корреляции.

5. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРЫ ПОТОКА

Оказывается, что мелкомасштабная структура потока также является универсальной. В самом деле, рассмотрение мелкомасштабной структуры потока (1), (2) сводится к выбору в (16) $\Delta = \Delta_0 = -1/2$, обеспечивающего существование конечной однородной функции $\lim_{\lambda\to+0} F_2^{(-1/2,\lambda)}$. Из этого вытекает

$$\left\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{v}(0,t))^2 \right\rangle = C_2 f_0 r \text{ при } r \ll \min\left(r_0, f_0\tau_0^2\right), \tag{19}$$

где C_2 — универсальная константа. В дальнейшем мы выясним физический смысл неравенства, определяющего область применимости коррелятора (19).

Проводилось численное изучение турбулентных течений, вызываемых постоянной силой, приложенной к жидкости [18]. При этом было установлено, что в определенных направлениях (внешняя сила в численных экспериментах выбиралась имеющей пространственный период и не зависящей от времени) формируется не колмогоровский спектр $E(k) \propto 1/k^{5/3}$, а спектр $E(k) \propto 1/k^2$, что находится в соответствии с (19) и, по нашему мнению, подтверждает справедливость развиваемой идеологии.

Для изучения потока на масштабах от r_0 до $f_0\tau_0^2$ остановимся на двух предельных случаях: $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0 \ll 1$ и $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0 \gg 1$.

5.1. Условие формирования колмогоровского спектра: $\gamma = f_0\tau_0^2/r_0 \ll 1$

Пусть $\gamma \ll 1$. Рассмотрим F_2 при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$. Для этой области расстояний коррелятор силы (2) можно положить равным

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau_0}, 0\right). \tag{20}$$

Специально подчеркнем, что форма коррелятора (20) не позволяет написать вид спектра лишь из соображений размерности. В самом деле, из размерных параметров f_0 и τ_0 можно составить комбинацию с размерностью длины — $f_0\tau_0^2$, и, следовательно, соображения размерности позволяют определить спектр лишь с точностью до множителя $\phi(f_0\tau_0^2 k)$, где ϕ — произвольная функция.

Применим рассуждения, приведшие к (18), к коррелятору (20). Заметим, что использование (20) гарантирует рассмотрение области расстояний $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$, а предел $\lambda \to +\infty$ обеспечивает $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg \gamma r_0$. Таким образом, находим, что при $\gamma r_0 \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r_0$ течение можно описывать однородной функцией $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(-1/3,\lambda)}$ и справедливо равенство

$$\left\langle (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(0, t))^2 \right\rangle = C_3 \left(f_0^2\tau_0 r\right)^{2/3} \quad \text{при } \gamma r_0 \ll r \ll r_0, \tag{21}$$

т. е. в этом интервале масштабов справедлив закон Колмогорова—Обухова. Вопрос о безвязком, но с конечной диссипацией, пределе в уравнении Эйлера и формировании колмогоровского спектра в этом случае рассматривался в [8].

Таким образом, при рассматриваемом в настоящей работе способе возбуждения турбулентности колмогоровский спектр возникает лишь при определенных условиях, налагаемых на внешнюю силу, приводящую жидкость в движение, $\gamma \ll 1$. Следовательно, лишь в этом случае константа с размерностью мощности, диссипируемой в единице массы, в самом деле является параметром, определяющим поведение жидкости в определенном спектральном интервале. Ниже мы подробнее обсудим физические процессы, происходящие на границах этого интервала, а пока перейдем к рассмотрению случая $\gamma \gg 1$.

5.2. Структура области промежуточных масштабов при $\gamma \gg 1$

Пусть $\gamma \gg 1$. Заметим, что характерное время, соответствующее пульсациям с характерным масштабом r_0 и отвечающей им согласно (19) характерной скорости, $(f_0 r_0)^{1/2}$, оценивается величиной $\gamma^{-1/2}\tau_0$. Пусть $r(\tau_0)$ (мы оценим его ниже) — характерный масштаб пульсаций, которым соответствует характерное время τ_0. Рассмотрим F_2 при $r_0 \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r(\tau_0)$. Для этой области масштабов коррелятор силы (2) можно переписать как

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{f}(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = f_0^2 K\left(0, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}\right), \tag{22}$$

так как характерное значение скорости лагранжевых частиц жидкости, согласно (19), не меньше $(f_0 r_0)^{1/2}$ и расстояние, проходимое лагранжевой частицей за время порядка τ_0, составляет величину порядка $\gamma^{1/2} r_0$.

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, позволяют заключить, что при $r_0 \ll |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll r(\tau_0)$ для описания турбулентного потока жидкости можно использовать однородную функцию $\lim_{\lambda\to+\infty} F_2^{(1/4,\lambda)}$, причем

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(0,t)\rangle = C_4 \left(\frac{f_0^2 r_0^3}{r}\right)^{1/2} \quad \text{при } r_0 \ll r \ll r(\tau_0) = \gamma^{2/5} r_0. \tag{23}$$

Для оценки величины $r(\tau_0)$, входящей в (23), использованы следующие соображения. Заметим, что, согласно (23), характерное значение скорости, соответствующее пульсациям с масштабом порядка $r(\tau_0)$, оценивается величиной $\left(f_0^2 r_0^3/r(\tau_0)\right)^{1/4}$. Следовательно, размер $r(\tau_0)$ может быть найден из соотношения

$$r(\tau_0) \sim \tau_0 \left(f_0^2 r_0^3/r(\tau_0)\right)^{1/4},$$

что и приводит к $r(\tau_0) = \gamma^{2/5} r_0$.

Заметим, что неравенство, входящее в (18), следует из неравенств, определяющих области применимости корреляторов (19) и (23) при $\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$.

В рассматриваемом в настоящем разделе случае отсутствует участок спектра с колмогоровской степенной зависимостью $E(k) \propto 1/k^{5/3}$. Кроме того, обращает на себя внимание медленное уменьшение коррелятора скоростей $\propto 1/\sqrt{r}$ при $r_0 \ll r \ll \gamma^{2/5} r_0$, которое сменяется быстрым убыванием универсального характера $\propto 1/r^{4/3}$ при $\gamma^{2/5} r_0 \ll \ll r$ (см. (18)).

6. РОЛЬ КОНЕЧНОЙ ВЯЗКОСТИ

Учтем наличие в задаче конечной вязкости ν, т. е. существование еще одного характерного масштаба — вязкой длины. Покажем, что энергия, диссипируемая в единице времени в единице массы (удельная мощность диссипации ϵ), определяется новым безразмерным параметром

$$\Gamma = \gamma^{4/3}\,\mathrm{Re}, \tag{24}$$

где $\mathrm{Re} = r_0 \left(f_0^2 r_0 \tau_0\right)^{1/3}/\nu$ при $\gamma \ll 1$ и $\mathrm{Re} = r_0 \left(f_0 r_0\right)^{1/2}/\nu$ при $\gamma \gg 1$. Рассмотрим подробно три различных случая, которые могут реализовываться в турбулентных течениях ($\mathrm{Re} \gg 1$).

Рассмотрение характера диссипации при различных значениях Γ представляется разумным провести подробно, выделяя различные частные случаи, поскольку рассмотрение природы диссипации позволит сделать важные качественные заключения о структуре турбулентного потока.

6.1. Физика турбулентной диссипации при $\gamma \ll 1$

При $\gamma \ll 1$, $\Gamma \ll 1$, согласно (19), (24), вязкая длина превышает $f_0\tau_0^2$, т. е. колмогоровский спектр непосредственно примыкает к вязкому интервалу. Удельная мощность диссипации ϵ в этом случае, оцениваемая как вязкие потери на масштабах порядка вязкой длины, составляет

$$\epsilon \sim f_0^2 \tau_0, \tag{25}$$

т. е. не зависит от вязкости (ср. с (21)). Полученный результат полностью соответствует ставшему классическим утверждению о независимости вязких потерь в турбулентной жидкости от величины вязкости; однако, как мы сейчас убедимся, подобное положение дел справедливо лишь до тех пор, пока колмогоровский спектр непосредственно примыкает к вязкому интервалу.

Пусть по-прежнему $\gamma \ll 1$, но $\Gamma \gg 1$. Тогда из (19), (24) следует, что размер $f_0\tau_0^2$ значительно превышает вязкую длину, т. е. колмогоровский спектр отделен от вязкого интервала спектром (19). Удельная мощность диссипации оценивается при этом как

$$\epsilon \sim \nu^{1/3} f_0^{4/3}, \tag{26}$$

т. е. примерно в $\mathrm{Re}_*^{1/3}$ раза меньше потока энергии по колмогоровскому участку спектра, где Re_* — число Рейнольдса, относящееся к коротковолновому концу колмогоровского спектра. Таким образом, участок спектра (19) «экранирует» вязкий интервал от потока энергии, распространяющегося по колмогоровскому участку спектра, и «выключает» вязкую диссипацию.

Дадим физическую интерпретацию последнего результата. Приводимые ниже наглядные качественные рассуждения позволяют понять его физическое содержание. Чтобы понять физический смысл (26), заметим, что внешняя сила $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ наиболее эффективно взаимодействует с пульсациями жидкости, которые либо имеют «резонансный» волновой вектор $k \sim 1/r_0$, либо «резонансную» частоту $\omega \sim 1/\tau_0$ ($k \sim 1/f_0\tau_0^2$). Согласно (25), пульсации, находящиеся в «пространственном резонансе» с внешней силой, эффективно возбуждаются (находятся в «фазе» с внешней силой, и последняя эффективно их «раскачивает»). По колмогоровскому участку спектра энергия поступает к модам, находящимся во «временном резонансе» с внешней силой, которые «колеблются» в «противофазе» с внешней силой, т. е. внешняя сила «гасит» колебания с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ и «забирает» энергию из этих мод. Возникающий таким образом «коллективный сток» энергии представляется чрезвычайно важным физическим явлением. Иными словами, можно сказать, что внешняя сила выступает одновременно как источник энергии, и как «сток» для энергии. Таким образом, при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ в жидкости «выключается» диссипация, что должно иметь значение в теориях машущего полета и кризиса сопротивления.

Важным с практической точки зрения представляется то, что снижение сопротивления (кризис сопротивления), связанное с «выключением» вязкой диссипации согласно (26), возникает уже при увеличении мощности источника, т. е. без каких-либо дополнительных требований к изменению структуры границы.

Учитывая значение скейлинга (19) в «выключении» диссипации в турбулентной жидкости, выясним, с каким интегралом движения этот скейлинг может быть связан, т. е. укажем сохраняющуюся для идеальной жидкости величину, плотность которой имеет единицу измерения, совпадающую с единицей измерения f_0. Такой величиной является спиральность $G = \int \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{r}$. Следовательно, формирование (19) и выключение диссипации могут быть связаны с флуктуациями спиральности вблизи вязкого интервала (так называемый I-инвариант [19]). Во избежании недоразумений специально укажем, что кроме рассматриваемого в настоящей работе спектра $E(k) \propto 1/k^2$, связываемого со спиральностью вблизи вязкого интервала, в литературе часто рассматривается и «спиральный» спектр $E(k) \propto 1/k^{7/3}$, связанный с постоянным потоком спиральности.

Вопрос о теореме Колмогорова в случае $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ для двухточечного коррелятора (скорость, скорость)–скорость рассмотрен в Приложении.

6.2. Турбулентные потоки с $\gamma \gg 1$

При $\gamma \gg 1$ величина Γ всегда подчинена неравенству $\Gamma \gg 1$. Легко убедиться, что в этом случае удельная мощность диссипации определяется выражением (26), т. е. диссипативные потери зависят от величины вязкости.

Вместе с тем физика турбулентного течения в этом предельном случае принципиально изменяется. Заметим, что при $\gamma \gg 1$ весь инерционный интервал заполняется «спиральным» спектром, при этом вне инерционного интервала коррелятор скорость–скорость начинает медленно уменьшаться. Однако хорошо известно, что возникновение спиральности в турбулентном потоке может приводить к спонтанной генерации крупномасштабных структур [8]. Таким образом, следует ожидать, что при $\gamma \gg 1$ в турбулентном потоке начинается спонтанная генерация структур. Медленное уменьшение коррелятора (23) при $r_0 \ll r \ll \gamma^{2/5} r_0$ является убедительным подтверждением этого принципиально важного утверждения. Важно заметить, что генерация крупномасштабных структур в турбулентном потоке начинается не при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$, когда в спектре турбулентных пульсаций появляется «спиральный» участок спектра, а лишь тогда, когда «спиральный» спектр $E(k) \propto 1/k^2$ заполнит весь инерционный интервал, т. е. целиком «вытеснит» колмогоровский спектр.

Разумеется, подобная картина согласуется с развитыми представлениями о роли «пространственных» и «временных» резонансов в обмене энергией между турбулентными пульсациями различного масштаба и внешним источником (силой), приводящим жидкость в движение. С указанной точки зрения энергия подводится к пульсациям с характерным масштабом порядка r_0, которым отвечают максимальные скорости $(f_0 r_0)^{1/2}$ («пространственный резонанс»). Введенная в эти моды энергия передается длинноволновым пульсациям, т. е. идет на генерацию крупномасштабных структур (обратный каскад), достигая, таким образом, турбулентных пульсаций с характерным масштабом $\gamma^{2/5} r_0$, которые находятся во «временном» резонансе с внешней силой (имеют характерный временной масштаб порядка τ_0). Совершая колебания в «противофазе», пульсации с размером порядка $\gamma^{2/5} r_0$ могут эффективно отдавать энергию внешнему источнику, т. е. сила, приведшая жидкость в движение, эффективно гасит их колебания.

Интересно отметить, что пространственный масштаб образующихся структур может значительно (в $\gamma^{2/5}$ раз) превышать характерный масштаб силы, приводящей жидкость в движение. Последнее может иметь интересные геофизические применения, так как дает естественный механизм формирования гидродинамических структур с «горизонтальным» масштабом, значительно превышающим толщину атмосферы (глубину океана), в то время как пространственный масштаб силы, приводящей воздух в движение, может не превышать толщину атмосферы (глубину океана).

7. ИЕРАРХИЯ СОСТОЯНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Чтобы почувствовать физическое содержание полученных результатов, рассмотрим простой пример. Рассмотрим жидкость, приводимую в движение силой с амплитудой f_0, пространственным масштабом r_0 и характерным временным масштабом τ_0. Выясним, как изменяется структура потока при изменении величины f_0, когда пространственный и временной масштабы силы фиксированы. Если амплитуда f_0 силы очень мала, то течение жидкости является ламинарным и этот случай не является предметом настоящей работы. При увеличении амплитуды силы до некоторого значения, малого в силу малости вязкости жидкости, приводимой в движение, происходит переход к турбулентному течению. Если вязкость достаточно мала, то переход к турбулентности происходит при $\gamma \ll 1$, $\Gamma \ll 1$, т.е. в этом случае колмогоровский спектр примыкает к вязкому интервалу и диссипируемая энергия не зависит от вязкости и совпадает с потоком энергии по колмогоровскому спектру $E(k) \propto 1/k^{5/3}$. При дальнейшем увеличении амплитуды f_0 силы картина изменяется: происходит переход в область $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$, т.е. вблизи инерционного интервала «вырастает» участок «спирального» спектра $E(k) \propto 1/k^2$, приводящий к уменьшению в $\mathrm{Re}^{1/3}$ раз диссипируемой энергии по сравнению с потоком энергии по колмогоровскому отрезку спектра. При дальнейшем увеличении f_0 «спиральный» участок спектра расширяется за счет сужения участка колмогоровского спектра в инерционном интервале. Дальнейшее увеличение f_0 приводит к режиму с $\gamma \gg 1$, когда весь спектр в инерционном интервале является «спиральным», а в области вне инерционного интервала на масштабах $r_0 \ll r \ll \gamma^{2/5} r_0$ начинается генерация крупномасштабных структур.

Таким образом, существует целая иерархия турбулентных состояний жидкости, качественно различающихся своими свойствами и сменяющих друг друга при увеличении амплитуды силы, приводящей жидкость в движение.

8. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Поскольку результаты, полученные в настоящей работе, опираются на формализм кинетического уравнения в теории сильной турбулентности, который сам по себе является достаточно сложным, возникает вопрос о том, в какой степени их можно получить с использованием традиционного формализма теории сильной турбулентности. Рассмотрение этого вопроса важно еще и потому, что позволяет с новой точки зрения посмотреть на физику процессов, протекающих в турбулентной среде.

Прежде всего заметим, что нетривиальная физика поведения турбулентной жидкости возникла из-за рассмотрения силы с конечным временем корреляции. Иными словами, учтено, что турбулентные пульсации могут находиться не только в «пространственном», но и во «временном» резонансе с гармониками внешней силы, приводящей жидкость в движение. Возникающий режим турбулентности определяется соотношением характерных размеров этих двух типов «резонансных» пульсаций. Поскольку два типа «резонансных» волновых векторов делят пространство длин на три области, возникают ровно три области волновых векторов с различной природой турбулентных пульсаций. Оказывается, что каждой из этих областей соответствует своя размерная константа, однозначно определяющая спектр турбулентных пульсаций. Возможность столь простого описания спектров является совершенно нетривиальной, поскольку из-за нелинейности уравнения Эйлера пульсации разных масштабов существенно взаимодействуют между собой и наличие универсальных размерных параметров, описывающих физику на различных масштабах, представляется достаточно неожиданным.

Рассмотрим возможность получения результатов настоящей работы с использованием цепочки уравнений для моментов. Если с самого начала задать коррелятор силы не общим выражением (2), а обратиться к одной из его упрощенных форм, например, (17), (20) или (22), то соответствующие спектры будут сразу же следовать из размерных соображений или более продвинутого «скейлингового» формализма, развитого, например, в [8]. Однако подобный подход не позволяет соотнести вычисленный спектр с тем или иным интервалом волновых векторов при описании внешней силы коррелятором (2). Попытка прямого переноса метода настоящей работы на систему уравнений для моментов наталкивается на следующую трудность: в системе уравнений естественным образом возникают корреляторы типа сила–сила $\langle f_i(\mathbf{r}_1, t) f_j(\mathbf{r}_2, t)\rangle$ и корреляторы типа скорость–сила $\langle f_i(\mathbf{r}_1, t) v_j(\mathbf{r}_2, t)\rangle$, причем из общих соображений непонятно, конечности какого коррелятора необходимо требовать при использовании скейлинговой техники настоящей работы. С этой точки зрения достоинство метода кинетического уравнения состоит в том, что кинетическое уравнение содержит лишь одну «случайную» величину — внешнюю силу, в то время как скорость является просто аргументом функции распределения. Вместе с тем, если допустить, что «главным» коррелятором, под который «подстраиваются» все другие корреляторы, является именно коррелятор сила–сила, то все результаты настоящей работы могут быть получены и в рамках метода моментов. Другим преимуществом метода кинетического уравнения по сравнению с методом моментов является ясная трактовка безвязкого предела с ненулевой диссипацией, допускаемого уравнением Эйлера.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из основных результатов настоящей работы является доказательство того, что представления об универсальности развитой турбулентности несжимаемой жидкости, возникшие на основе классических работ Колмогорова, нуждаются в существенном уточнении. Оказывается, что в спектре турбулентных пульсаций действительно возникает ряд участков универсального характера, однако сам факт их возникновения, относительное расположение и протяженность в пространстве волновых векторов определяются параметрами источника, подводящего к жидкости энергию и приводящего ее в движение. Таким образом, возникают целых три принципиально отличающихся друг от друга класса стационарных однородных изотропных течений несжимаемой жидкости, изученных в настоящей статье. Впервые установленная в настоящей работе классификация турбулентных течений может представлять интерес в ряде геофизических и технологических задач.

Специально подчеркнем, что в настоящей работе не рассматривались те радикальные изменения в колмогоровской картине турбулентности, которые могут возникать из-за перемежаемости. Проведенный анализ ставил перед собой совершенно другую цель: изучить изменения, возникающие в энергетической структуре турбулентного потока (втором корреляторе скорости) при учете конечного времени корреляции силы, приводящей жидкость в движение.

Важным новым результатом, полученным при учете конечного времени корреляции источника, приводящего жидкость в движение, является нетривиальная физика потока энергии по спектру. В частности, при определенных условиях, найденных выше, поток энергии течет лишь по ограниченному участку спектра, целиком расположенному внутри инерционного интервала. Иными словами, возможна ситуация, когда поток энергии не доходит до вязкого интервала, а «наталкивается» на участок спектра, связанный со спиральностью, при этом энергия забирается внешней силой на границе колмогоровского и спирального спектров (соответствующие гармоники жидкости колеблются в «противофазе» с внешней силой). Возникающая при этом структура корреляторов не противоречит теореме Колмогорова (см. Приложение).

Говоря о полученных нами результатах, связанных с длинноволновым участком спектра, необходимо заметить, что ранее вопрос о роли интеграла Лойцянского рассматривался в работе [21].

Авторы выражают искреннюю благодарность С. И. Анисимову и Э. И. Юрченко за интерес к работе и полезную дискуссию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-02-17229, 98-02-17441) и Совета по программе поддержки ведущих научных школ (гранты № 96-15-96448).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Укажем на некоторые особенности в выводе теоремы Колмогорова в случае внешней силы с $\gamma \ll 1$. При доказательстве теоремы Колмогорова для двухточечного коррелятора (скорость, скорость)–скорость возникает выражение $\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle$ [20], которое преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle &= \langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_2,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle + \langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t)-\mathbf{f}(\mathbf{r}_2,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle = \\ &= \langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_1,t))\rangle + \langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t)-\mathbf{v}(\mathbf{r}_1,t))\rangle. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Поскольку представляют интерес лишь точки, расположенные внутри инерционного интервала, усредняемое выражение во втором слагаемом в (П.1) содержит дополнительную малость типа отношения $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ к характерному масштабу силы r_0. Поэтому вторым слагаемым в (П.1) можно пренебречь по сравнению с первым, что сразу же приводит к теореме Колмогорова. Отметим, однако, что указанная процедура оценки величины различных слагаемых в правой части (П.1) является математически строгой лишь в том случае, когда усредняемая функция является знакопостоянной; в случае, когда усредняемая функция меняет знак, из малости по абсолютной величине поправки к ней еще не следует малость вклада от этой поправки в среднее.

Убедимся сейчас, что стандартное рассуждение, приводящее к теореме Колмогорова, нуждается в существенном уточнении при учете конечного времени корреляции источника. Специально подчеркнем, что пренебрежение вторым слагаемым по сравнению с первым в (П.1) из-за указанной малости во втором слагаемом оправдано лишь тогда, когда первое слагаемое не равно в точности нулю или не содержит дополнительной малости по сравнению со вторым слагаемым по какому-либо другому малому параметру. В случае $\gamma \ll 1$ рассуждение, обычно приводящее к теореме Колмогорова, нуждается в уточнении именно по последней причине: в этом случае наименьшим параметром задачи является время корреляции τ_0 и поэтому необходимо детально изучить вопрос о зависимости величины $\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle$ от τ_0. Для этой цели запишем

$$\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1,t),\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t))\,dt. \tag{П.2}$$

Представим скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t)$ в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_2,t) = \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}_2,t) + \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}_2,t), \tag{П.3}$$

где $\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}_2, t)$ — вклад в скорость, связанный с гармониками с волновыми векторами $k \ll k_*$, где $1/r_0 \ll k_* \ll 1/f_0\tau_0^2$, а $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}_2, t)$ — вклад всех остальных гармоник. Таким образом, перепишем (П.3) в виде

$$\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t), \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t))\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \left(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t), \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}_2, t)\right) dt + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} (\mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t), \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}_2, t))\, dt. \qquad (\text{П.4})$$

Заметим, что $|\mathbf{v}^{(1)}| \gg |\mathbf{v}^{(2)}|$, однако характерные времена, связанные с гармониками, входящими в $\mathbf{v}^{(1)}$, значительно превосходят характерный временной масштаб силы τ_0, а в $\mathbf{v}^{(2)}$ входят и гармоники с характерными временами порядка τ_0. Таким образом, неравенство $|\mathbf{v}^{(1)}| \gg |\mathbf{v}^{(2)}|$ не дает оснований для того, чтобы пренебречь вторым слагаемым в (П.4) по сравнению с первым из-за различных осцилляционных свойств подынтегральных функций в этих выражениях. Следовательно, вклад гармоник с волновым вектором $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ в (П.4) может быть сравним с вкладом длинноволновой части.

Однако роль гармоник с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ различна в случае $\Gamma \ll 1$ и $\Gamma \gg 1$. Наибольший интерес представляет случай $\Gamma \gg 1$, когда гармоники с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ лежат вне вязкого интервала. В этом случае следует ожидать, что при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg f_0\tau_0^2$ основной вклад в (П.1) дают длинноволновые гармоники, так как на столь больших расстояниях коротковолновые пульсации не скоррелированы с внешней силой. Однако при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll f_0\tau_0^2$, т. е. на расстояниях, сравнимых с амплитудой колебаний лагранжевой частицы под действием внешней силы, следует ожидать значительного вклада коротковолновых пульсаций в (П.4) и (П.1). Таким образом, стандартный вывод теоремы Колмогорова при учете конечного времени корреляции внешней силы с $\gamma \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ справедлив лишь при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg f_0\tau_0^2$. Следовательно, теорема Колмогорова не запрещает существенную перестройку коррелятора (скорость, скорость)–скорость при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll f_0\tau_0^2$. Согласно (19) и (20), второе слагаемое в (П.4) при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < f_0\tau_0^2$, когда можно ожидать, что корреляции между внешней силой и мелкомасштабной составляющей скорости значительны, оценивается величиной $f_0^2\tau_0$, поскольку $v^{(2)} \sim f_0\tau_0$, что, согласно (25), сравнимо с потоком энергии ϵ по колмогоровскому участку спектра.

В случае $\Gamma \ll 1$ гармоники с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ попадают в вязкий интервал, что приводит к подавлению указанных пульсаций вязкими эффектами. Однако, если $v^{(2)} \ll f_0\tau_0$, вклад коротковолновых гармоник с $k \sim 1/f_0\tau_0^2$ в (П.1) заведомо мал. Следовательно, в этом случае стандартное доказательство теоремы Колмогорова не наталкивается ни на какие трудности.

Заметим, что величину $\langle(\mathbf{f}(\mathbf{r}_1, t), \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t))\rangle$ можно также представить в виде среднего по объему. Таким образом, можно убедиться, что внешняя сила также существенно взаимодействует с пульсациями, находящимися с ней в «пространственном» резонансе. Следовательно, выделенная роль «резонансных» гармоник возникает уже при доказательстве теоремы Колмогорова.

Литература

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т. 2, Наука, Москва (1967).
2. D. Foster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Phys. Rev. A **19**, 732 (1977).
3. C. DeDominicis and D. C. Martin, Phys. Rev. A **19**, 419 (1979).
4. K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3175, 3184 (1971).
5. В. Е. Захаров, В. С. Львов, Изв. ВУЗов, Радиофизика **28**, 1470 (1975).
6. С. С. Моисеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, ДАН **279**, 96 (1984).
7. E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. **1**, 87 (1952).
8. S. Moiseev and O. Onishenko, Physica B **228**, 83 (1996).
9. С. Н. Гордиенко, С. С. Моисеев, Письма в ЖЭТФ **68**, 194 (1998).
10. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **52**, 4924 (1995).
11. In *Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics*, ed. by R. Z. Sagdeev, Mir, Moscow (1986).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
13. С. Н. Гордиенко, Физика плазмы **25**, 137 (1999).
14. С. Н. Гордиенко, ЖЭТФ **106**, 436 (1994).
15. М. А. Леонтович, ЖЭТФ **5**, 211 (1935).
16. С. Н. Гордиенко, Э. И. Юрченко, Письма в ЖЭТФ **67**, 640 (1998).
17. H. Branover, A. Eidelman, M. Nagorny, and M. Kireev, *Progress in Turbulence Researh, AIAA*, **162**, 64 (1994).
18. V. Borue and S. Orszag, J. Fluid Mech. **306**, 293 (1995).
19. А. В. Белян, С. С. Моисеев, О. Г. Чхетиани, Препринт № 1845, ИКИ РАН, Москва (1992).
20. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univercity Press, New York (1995).
21. E. Kuznetsov, A. C. Newell, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **67**, 3243 (1991).