ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 5(11), стр. 1616–1629

КОНВЕКТИВНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

*В. А. Городцов**

Институт проблем механики Российской академии наук
117526, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 мая 1999 г.

Концентрирование примеси в локализованных структурах описывается на базе аналитических решений модельных уравнений конвективной диффузии в одномерном гидродинамическом приближении без давления. Простота получения аналитических результатов зависит от величины отношения кинетических коэффициентов жидкости (числа Прандтля). При равных кинетических коэффициентах решение любой нестационарной задачи приводится к решению задач для обычного уравнения теплопроводности. При целых числах Прандтля решение задач нестационарной конвективной диффузии в поле течения равномерно движущейся ударной волны также приводится к решению задач для уравнения теплопроводности. Установлены связи между задачами с целочисленными различиями в числах Прандтля. Проанализированы различные представления функций Грина уравнений конвективной диффузии. При целых числах Прандтля они выражены через интегралы ошибок. Асимптотический характер решений существенно зависит от выполнения интегральных законов сохранения. При интегральном сохранении массы примеси эффекту коалесценции ударных волн соответствует эффект слияния примесных солитонов, их кластеризация.

PACS: 47.27.Te; 66.20.+d

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическое и стохастическое описание эволюции и взаимодействия многих степеней свободы, ведущих к формированию структур благодаря особенностям коллективного поведения, получило существенное развитие в рамках теории сплошной среды. В гидродинамическом приближении эффективно учитываются основные особенности типа нелинейности, вязкой диссипации и дисперсии, на балансе которых базируется неравновесное структурообразование. Даже упрощенные одномерные гидродинамические модели позволяют выявить важные черты явлений и, прежде всего, определяющую роль локализованных образований в форме ударных волн и солитонов. Одномерная модель вязкой жидкости без давления, известная как модель Бюргерса [1], давно привлекает большое внимание при описании детерминированных и стохастических течений в аэродинамике и физике плазмы [1–3]. При всем модельном упрощении в ней сохраняются инерционная нелинейность и вязкая диссипация, играющие ведущую роль в формировании турбулентного режима течения. Квазилинейное дифференциальное уравнение Бюргерса оказалось особенно привлекательным из-за приводимости его к линейному уравнению диффузии (теплопроводности) с помощью нелинейной замены

*E-mail: teodor@ipmnet.ru

Коула—Хопфа [4, 5]. Новый всплеск интереса к этому уравнению и его многомерным модификациям обязан дальнейшему развитию методов решения проблем теории турбулентности [6–8] и существенному расширению его физических приложений в теориях транспортных потоков [3], структурообразования при эволюции Вселённой [9], роста границ раздела [10, 11], конвективной диффузии [12].

Одномерная гидродинамическая модель без давления остается достаточно простой и при распространении ее на задачи конвективной диффузии (или/и теплопроводности), когда происходит объединение молекулярного и конвективного переносов в текущей жидкости. Особенно простым оказывается случай равных кинетических коэффициентов (единичного числа Прандля), для которого существует обобщение преобразования Коула—Хопфа, позволяющее привести нелинейные уравнения движения и конвективной диффузии к линейному уравнению теплопроводности [13]. При различии кинетических коэффициентов ситуация несколько усложняется, и допускает достаточно полное аналитическое исследование лишь при частных типах течений. Для течения в форме равномерно распространяющейся ударной волны уравнения нестационарной конвективной диффузии могут быть снова приведены к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами в случае любых целых чисел Прандтля (в общем случае будет установлен вид связи решений задач с числами Прандтля, различающимися на целое число). При этом асимптотический характер распределения примеси в ударной волне зависит от выполнимости интегрального закона сохранения примеси для уравнений модели. Сначала в разд. 2 будет рассмотрена модель без полного сохранения примеси, а затем на ее основе совершенно аналогично в разд. 4 — модель с интегральным законом сохранения. В последнем случае ударную волну в конечном итоге (в пределе больших времен) будет сопровождать «примесный солитон». Тем самым известному эффекту абсолютно неупругого столкновения одномерных ударных волн для уравнения Бюргерса [2, 3] будет соответствовать эффект слияния примесных солитонов и растущего локального концентрирования примеси. В этом заключается одномерное описание эффекта кластеризации примеси, привлекшего большое внимание в литературе в более сложной многомерной и стохастической ситуации [9, 14–16]. В разд. 3 дается анализ функции Грина уравнения конвективной теплопроводности на основе решения известной спектральной задачи квантовой механики для потенциала Пешля—Теллера [17, 18]. Демонстрируется, что упрощение анализа при целых числах Прандтля связано с безотражательным характером такого потенциала в этом случае.

2. УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Уравнение конвективной теплопроводности (диффузии) через поле скоростей оказывается зацепленным за уравнение движения, которое в одномерной гидродинамике без давления является уравнением Бюргерса. В приближении пассивной примеси (в этом приближении нет смысла различать теплопроводность и диффузию, поэтому будет использоваться любой из этих терминов), не оказывающей обратного влияния на течение жидкости, один из вариантов такого зацепления (другой рассматривается позже в разд. 4) представляется системой дифференциальных уравнений

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u, \quad \partial_t\theta + u\partial_x\theta = \chi\partial_x^2\theta, \tag{2.1}$$

для которой решение начальной задачи предусматривает задание начальных данных

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \partial_x \phi_0(x), \quad \theta(x,t)\big|_{t=0} = \theta_0(x) \tag{2.2}$$

для полей скорости и концентрации пассивной примеси.

В работе [13] было показано, что эта система уравнений в случае одинаковых кинетических коэффициентов (единичного числа Прандтля $P \equiv \nu/\chi = 1$) оказывается столь же простой, как и отдельное уравнение Бюргерса. С помощью обобщенной замены Коула—Хопфа:

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln\varepsilon(x,t), \quad \theta(x,t) = \psi(x,t)/\varepsilon(x,t), \tag{2.3}$$

ее решение сводится к решению двух одинаковых линейных уравнений теплопроводности:

$$\partial_t\varepsilon = \nu\partial_x^2\varepsilon, \quad \partial_t\psi = \chi\partial_x^2\psi \quad (\nu = \chi), \tag{2.4}$$

$$\varepsilon(x,t)\big|_{t=0} = \exp\left(-\frac{\phi_0(x)}{2\nu}\right), \quad \psi(x,t)\big|_{t=0} = \theta_0(x)\exp\left(-\frac{\phi_0(x)}{2\nu}\right).$$

Обратимся к анализу уравнений одномерной модели (2.1) при произвольных (всегда положительных в силу термодинамических ограничений) числах Прандтля. Не различая теплопроводность и диффузию, для безразмерного отношения коэффициента кинематической вязкости к другим кинетическим коэффициентам употребляем единый термин (в литературе часто для отношения коэффициентов вязкости и диффузии употребляют особое наименование — число Шмидта). Удобно пользоваться безразмерными переменными, выбирая для их образования некоторую характерную скорость u_0 и коэффициент вязкости. При этом система уравнений принимает вид

$$\partial_\tau v + 2Pv\partial_\xi v = P\partial_\xi^2 v, \quad \partial_\tau\theta + 2Pv\partial_\xi\theta = \partial_\xi^2\theta, \tag{2.5}$$

$$\xi \equiv \frac{u_0 x}{2\nu}, \quad \tau P \equiv \frac{u_0^2 t}{4\nu}, \quad v \equiv \frac{u}{u_0} = v(\xi,\tau).$$

В силу линейности второго уравнения по концентрации примеси нет особой необходимости в приведении последней к безразмерному виду.

В общем случае рассматриваемая система уравнений не может быть преобразована к простым раздельным уравнениям типа (2.4), как это ясно из выполнимости испытания Пенлеве для уравнений (2.1) только в случае единичного числа Прандтля [13]. Тем не менее в частных случаях такое возможно.

С помощью обобщенного преобразования Коула—Хопфа вида

$$v = -\partial_\xi \ln\varepsilon, \quad \theta = \psi/\varepsilon^P \tag{2.6}$$

нелинейное уравнение движения по-прежнему приводится к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\partial_\tau\varepsilon = P\partial_\xi^2\varepsilon,$$

а уравнение для концентрации примеси — к линейному уравнению с переменным коэффициентом, не содержащему первой пространственной производной неизвестной ψ:

$$\hat{L}_{p-1}\psi = 0, \quad \hat{L}_p \equiv \partial_\tau - \partial_\xi^2 + P(P+1)v_\xi. \tag{2.7}$$

Для возникшего дифференциального оператора справедливо важное коммутационное соотношение

$$\hat{L}_{p-m}\hat{M}_{p-m} - \hat{M}_{p-m}\hat{L}_{p-1-m} = \frac{m(P-m)}{P} v_\tau, \quad \hat{M}_p \equiv \partial_\xi + Pv. \tag{2.8}$$

Кроме явно указанной в нем зависимости от P, имеется также неявная (через вид безразмерной скорости). Исключение составляет, как ясно из уравнения движения в (2.5), случай стационарного течения. При стационарном течении коммутационное соотношение становится однородным и позволяет с помощью «оператора понижения» $\hat{M}_p$ свести решение рассматриваемой задачи при некотором числе Прандтля к решению аналогичной задачи с числом Прандтля на единицу меньшим. Таким образом, по современной терминологии указанный оператор является оператором Дарбу для дифференциального оператора задачи. Благодаря свойству симметрии последнего, $\hat{L}_{-p} = \hat{L}_{p-1}$, «оператором повышения» будет $\hat{M}_{-p}$. Повторным применением операторов понижения или повышения можно добиться любого целочисленного изменения числа Прандтля. В частности, при целых числах Прандтля задача оказывается приводимой к простой упомянутой выше задаче для уравнения теплопроводности (задаче с $P = 1$). При стационарном течении и целом P с помощью (2.8) связь между дифференциальными операторами этих задач легко устанавливается:

$$\hat{L}_{p-1}\hat{M}_{p-1}\hat{M}_{p-2}\ldots\hat{M}_1 = \hat{M}_{p-1}\hat{M}_{p-2}\ldots\hat{M}_1\hat{L}_0, \quad \hat{L}_0 = \partial_\tau - \partial_\xi^2. \tag{2.9}$$

Если начать с уравнения теплопроводности, умножить его слева на оператор $\hat{M}_1$ и воспользоваться коммутационным соотношением (2.8) при $v_\tau = 0$, получим

$$\hat{L}_1\psi^{(2)} = 0, \quad \hat{L}_0\varphi = 0; \quad \psi^{(2)} = \hat{M}_1\varphi. \tag{2.10}$$

Продолжая подобные шаги, доказываем возможность следующего представления решения уравнения с целым числом Прандтля через решение уравнения теплопроводности

$$\hat{L}_{p-1}\psi^{(p)} = 0, \quad \hat{L}_0\varphi = 0; \quad \psi^{(p)} = \hat{M}_{p-1}\hat{M}_{p-2}\ldots\hat{M}_1\varphi. \tag{2.11}$$

Достаточно просто находится явный вид требуемого одномерного стационарного течения. Ограниченное на бесконечности стационарное решение уравнения движения (2.1) имеет вид

$$u(x) = -u_0 \operatorname{th}\frac{u_0 x}{2\nu}; \quad v = -\operatorname{th}\xi. \tag{2.12}$$

В силу галилеевской инвариантности уравнений такое течение соответствует равномерно движущейся ударной волне с вязким переходным слоем при выборе движущейся вместе с волной системы отсчета (далее все выкладки проводятся в такой системе координат). Отметим, что соответствующий указанному стационарному распределению скоростей потенциал ε в преобразовании Коула—Хопфа не является стационарным

$$\varepsilon(\xi,\tau) = C_0 e^{P\tau}\operatorname{ch}\xi, \tag{2.13}$$

поскольку он должен удовлетворять нестационарному уравнению теплопроводности (2.4). Однако разделение временной и пространственной зависимостей приводит при действии преобразования Коула—Хопфа к выпадению первой (вместе с произвольной константой C_0) из результата для скорости (2.12).

Здесь следует еще завершить доказательство того, что любое решение рассматриваемого уравнения для ψ при целых числах Прандтля представимо в виде (2.11). Для этого рассмотрим решение в виде $\psi^{(p)} = \hat{M}_{p-1}\chi$ и воспользуемся для преобразований коммутационным соотношением (2.8) при $v_\tau = 0$:

$$\hat{L}_{p-1}\psi^{(p)} = 0; \quad \hat{L}_{p-1}\hat{M}_{p-1}\chi = \hat{M}_{p-1}\hat{L}_{p-2}\chi = 0; \quad \left(\partial_\xi - (P-1)\,\mathrm{th}\,\xi\right)\hat{L}_{p-2}\chi = 0.$$

После однократного интегрирования последнего уравнения приходим к неоднородному уравнению, решение которого удобно представляется суммой частного решения и общего решения однородного уравнения:

$$\hat{L}_{p-2}\chi = C\,\mathrm{ch}^{P-1}\xi; \quad \chi = -\frac{C}{(P-1)^2}\,\mathrm{ch}^{P-1}\xi + \psi^{(p-1)}.$$

При действии оператора $\hat{M}_{p-1}$ на эту сумму вклад от первого члена исчезает, и в итоге получаем формулу связи решений двух задач с числами Прандтля, различающимися на единицу:

$$\psi^{(p)} = \hat{M}_{p-1}\psi^{(p-1)}. \tag{2.14}$$

Повторно применяя эту формулу, вновь приходим к результату (2.11), где $\varphi \equiv \psi^{(1)}$.

Далее, при рассмотрении нестационарной конвективной диффузии пассивной примеси в поле равномерно движущейся ударной волны, сосредоточим внимание на начальной задаче с концентрированным выделением примеси в некоторой точке (решение других начальных задач находится суперпозицией таких сингулярных):

$$\left(\partial_\tau - 2P\,\mathrm{th}\,\xi\partial_\xi - \partial_\xi^2\right)\theta = 0, \quad \theta(\xi,\tau)\big|_{\tau=0} = \delta(\xi - \xi_0). \tag{2.15}$$

Распределение примеси в последующие моменты времени при целых числах Прандтля будет выражаться в соответствии с (2.6), (2.11) и (2.13) следующим образом (в произведении подразумевается такое упорядочение операторов, что номер растет справа налево)

$$\theta(\xi,\tau) = \left(C_0 e^{P\tau}\,\mathrm{ch}\,\xi\right)^{-P}\prod_{m=1}^{P-1}\left(\partial_\xi - m\,\mathrm{th}\,\xi\right)\varphi = (C_0 e^{P\tau})^{-P}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{sh}\,\xi}\right)^{P-1}\frac{\varphi}{\mathrm{ch}\,\xi}, \tag{2.16}$$

через решение начальной задачи для уравнения теплопроводности вида (в начальное условие входит единичная функция Хевисайда)

$$(\partial_\tau - \partial_\xi^2)\varphi = 0, \quad \varphi|_{\tau=0} = C_0^P\,\mathrm{ch}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi\frac{(\mathrm{sh}\,\xi - \mathrm{sh}\,\xi_0)^{P-2}}{(P-2)!}\,H(\xi - \xi_0). \tag{2.17}$$

Отсюда следует представление распределения примеси через интегральную свертку между функцией Грина и начальным распределением для уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered}\theta(\xi,\tau) = e^{-P^2\tau}\,\mathrm{ch}\,\xi_0\mathrm{sech}^P\xi\prod_{m=1}^{P-1}(\partial_\xi - m\,\mathrm{th}\,\xi)I_{p-2},\\ I_n \equiv \int_{\xi_0}^{\infty} d\eta\,\mathrm{ch}\,\eta\frac{(\mathrm{sh}\,\eta - \mathrm{sh}\,\xi_0)^n}{n!}\,D_0(\xi-\eta,\tau), \quad D_0(\xi,\tau) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Эти интегралы могут быть выражены через интеграл ошибок $\operatorname{erf} z = 1 - \operatorname{erfc} z$. Например,

$$I_0 = \frac{e^\tau}{4}(2\operatorname{ch}\xi + S_1), \quad S_1 \equiv \sum_{\pm}(\pm e^{\pm\xi})\operatorname{erf}\left(\sqrt{\tau} \pm \frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right),$$
$$I_1 + I_0 \operatorname{sh}\xi_0 = \frac{e^{4\tau}}{8}(2\operatorname{sh}2\xi + S_2), \quad S_2 = \sum_{\pm} e^{\pm 2\xi}\operatorname{erf}\left(2\sqrt{\tau} \pm \frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right), \tag{2.19}$$

и для распределений концентрации пассивной примеси в случаях $P = 2$ и $P = 3$ будем иметь соответственно

$$\theta(\xi, \tau) = e^{-3\tau}\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{4}\operatorname{sech}^2\xi(\partial_\xi - \operatorname{th}\xi)S_1, \tag{2.20}$$

$$\theta(\xi, \tau) = e^{-5\tau}\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{8}\operatorname{sech}^3\xi(\partial_\xi - 2\operatorname{th}\xi)(\partial_\xi - \operatorname{th}\xi)(S_2 - 2e^{-3\tau}S_1\operatorname{sh}\xi_0).$$

Поскольку выражения S_n имеют при фиксированных координатах ξ, ξ_0 конечную асимптотику больших времен ($\tau \to \infty$), возмущения концентрации будут исчезать в этом пределе. Следовательно, в рассмотренной модели конвективный перенос примеси из-за течения жидкости в ударной волне оказывается недостаточным, для того чтобы компенсировать диффузионное расплывание.

Для дальнейшего удобно также переписать последний результат (ограничимся случаем $P = 2$) в виде

$$\theta(\xi, \tau) = e^{-4\tau}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{\operatorname{ch}\xi}\right)^2 D(\xi, \xi_0, \tau; P = 2), \quad \hat{L}_1 D = 0, \quad D|_{\tau=0} = \delta(\xi - \xi_0),$$

$$D(\xi, \xi_0, \tau; P = 2) = \frac{e^\tau}{4}\operatorname{sech}\xi_0\left(\partial_\xi - \operatorname{th}\xi\right)S_1. \tag{2.21}$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Решение уравнения конвективной теплопроводности при течении, создаваемом равномерно движущейся ударной волной, может быть получено при любой величине числа Прандтля с помощью разложений по собственным функциям стационарной части его оператора. Последняя задача хорошо изучена в квантовой механике и известна под именем спектральной задачи для модифицированного потенциала Пешля—Теллера. Простота случая целых чисел Прандтля при этом соответствует случаю безотражательных потенциалов и обязана дополнительной внутренней симметрии задачи.

Если искать решение (в движущейся вместе с волной системе отсчета) уравнения (2.7), переписанного для обсуждаемого конкретного случая ударной волны в виде

$$\hat{L}_{P-1}\psi(\xi, \tau) \equiv \left(\partial_\tau - \partial_\xi^2 - P(P-1)\operatorname{sech}^2\xi\right)\psi = 0, \tag{3.1}$$

с помощью метода разделения переменных (метода Фурье):

$$\psi(\xi, \tau) = a(\tau)\Psi(\xi); \quad a(\tau) = e^{-\lambda\tau}, \quad \left(\partial_\xi^2 + P(P-1)\operatorname{sech}^2\xi\right)\Psi = -\lambda\Psi, \tag{3.2}$$

то в зависимости от знака постоянной разделения возникают дискретный (при $\lambda = -\mu^2 < 0$) и непрерывный (при $\lambda = k^2 > 0$) спектры. Полное решение представляется линейной комбинацией собственных функций дискретного спектра и интеграла от собственных функций непрерывного спектра,

$$\psi(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n \tau}\Psi_n(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, b(k)\Psi_+(\xi,k)e^{-k^2\tau}, \tag{3.3}$$

за исключением ситуации с $0 < P < 1$, когда имеется вклад только непрерывного спектра (в квантовой механике это соответствует прохождению частицы над потенциальным барьером $U(\xi) = P(1-P)\,\mathrm{sech}^2\,\xi > 0$).

Для функции Грина рассматриваемого оператора (D-функцию, разрешающую сингулярную начальную задачу, будем также именовать функцией Грина)

$$\begin{gathered}\hat{L}_{p-1}G = \delta(\xi-\xi_0)\delta(\tau); \quad G(\xi,\xi_0,\tau) = H(\tau)D(\xi,\xi_0,\tau), \\ \hat{L}_{p-1}D = 0, \quad D|_{\tau=0} = \delta(\xi-\xi_0)\end{gathered} \tag{3.4}$$

такое разложение должно выглядеть следующим образом:

$$D(\xi,\xi_0,\tau) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda_n\tau}\Psi_n(\xi)\Psi_n(\xi_0) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\Psi_+(\xi,k)\Psi_+^*(\xi_0,k)e^{-k^2\tau}. \tag{3.5}$$

При известных собственных функциях и собственных значениях это дает альтернативный способ получения решения задачи эволюции сконцентрированного вначале в точке распределения примеси в потоке жидкости, создаваемом равномерно движущейся ударной волной. Спектральные данные для уравнения Шредингера с модифицированной ямой Пешля—Теллера хорошо известны [17, 18]. Дискретный спектр для такого потенциала конечен:

$$\lambda_n = -(P-n)^2 < 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N < P, \tag{3.6}$$

и собственные функции дискретной части спектра имеют полиномиальный вид:

$$\begin{aligned}\Psi_n(\xi)/A_n &= (1-\sigma^2)^{(P-n)/2} F\left(-n+1, -n+2P; 1+P-n; (1-\sigma)/2\right) = \\ &= (1-\sigma^2)^{(P-n)/2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(1+P-n)}{\Gamma(P)}\, P_{n-1}^{(P-n,P-n)}(\sigma) = \\ &= (1-\sigma^2)^{(P-n)/2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(1+2P-2n)}{\Gamma(2P-n)}\, C_{n-1}^{P-n+1/2}(\sigma) = 2^{P-n}\Gamma(1+P-n)P_{P-1}^{-(P-n)}(\sigma).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь приведены эквивалентные выражения собственных функций через обрывающиеся гипергеометрические ряды, полиномы Якоби, ультрасферические (Гегенбауэра) многочлены и присоединенные функции Лежандра.

Условие ортонормированности собственных функций дискретного спектра для рассматриваемого уравнения Шредингера,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\Psi_n(\xi)\Psi_m(\xi) = \delta_{nm},$$

позволяет нормировать амплитуду следующим образом:

$$A_n = 2^{n-P}\sqrt{\frac{(P-n)\Gamma(2P-n)}{\Gamma(n)\Gamma^2(1+P-n)}}\,. \tag{3.8}$$

Для собственных функций непрерывного спектра, функций Йоста, выделяемых в соответствии с асимптотическим поведением $\Psi_+(\xi,k) \to \exp(ik\xi)$ при $\xi \to \infty$, имеем также представление через гипергеометрическую функцию

$$\Psi_+(\xi,k) = e^{ik\xi}F\left(-P+1,P;1-ik;\frac{1-\sigma}{2}\right),$$

причем последняя сводится к полиному Якоби при целых числах Прандтля (гипергеометрический ряд обрывается при неположительных целых значениях первого аргумента):

$$\Psi_+(\xi,k) = e^{ik\xi}\frac{\Gamma(P)\Gamma(1-ik)}{\Gamma(P-ik)}\,P_{P-1}^{(-ik,ik)}(\sigma).$$

Пользуясь известными формулами преобразования гипергеометрических функций, можно переписать рассматриваемую функцию Йоста в виде, удобном для оценки ее асимптотического поведения на другой границе при $\xi \to -\infty$:

$$\Psi_+(\xi,k) = c_{21}(k)e^{ik\xi}F\left(-P+1,P;1+ik;\frac{1+\sigma}{2}\right) +$$

$$+\, c_{22}(k)e^{-ik\xi}F\left(-P+1,P;1-ik;\frac{1+\sigma}{2}\right) \xrightarrow[\xi\to-\infty]{} c_{21}(k)e^{ik\xi} + c_{22}(k)e^{-ik\xi},$$

$$c_{21}(k) = \frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)}{\Gamma(P-ik)\Gamma(1-P-ik)}, \quad c_{22}(k) = i\,\frac{\sin\pi(P-1)}{\operatorname{sh}\pi k}\,.$$

Как видно отсюда, при целых числах Прандтля отраженная волна $\sim \exp(-ik\xi)$ исчезает:

$$c_{22}(k) = 0, \quad c_{21}(k) = \prod_{n=1}^{P-1}\frac{ik+n}{ik-n}\,,$$

т. е. потенциал $U(\xi) = -P(P-1)\,\mathrm{sech}^2\,\xi < 0$ в этой ситуации является «безотражательным» по терминологии теории рассеяния в квантовой механике.

В диапазоне наиболее малых чисел Прандтля, $0 < P < 1$, спектральная задача сводится к задаче рассеяния над положительным барьером, имеющей только непрерывный спектр, и разложение функции Грина по нему примет вид

$$D = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,e^{-k^2\tau}e^{ik(\xi-\xi_0)}F\left(1-P,P;1-ik;\frac{1-\sigma}{2}\right)F^*\left(1-P,P;1-ik;\frac{1-\sigma_0}{2}\right),$$

$$\sigma \equiv \operatorname{th}\xi, \quad \sigma_0 \equiv \operatorname{th}\xi_0.$$

В предельных случаях $P = 0$ и $P = 1$ гипергеометрические функции здесь сводятся к единице, а интеграл — к известному выражению функции Грина для уравнения теплопроводности

$$D_0(\xi - \xi_0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-k^2\tau} e^{ik(\xi-\xi_0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right).$$

В следующем диапазоне, $2 \geq P > 1$, появляется одно дискретное собственное значение с $n = 1$ и соответствующая собственная функция принимает вид (особенно простой при $P = 2$)

$$n = 1; \quad \lambda_1 = -(P-1)^2, \quad \Psi_1(\xi) = \frac{\sqrt{2\Gamma(2P-2)}}{2^{P-1}\Gamma(P-1)} \operatorname{sech}^{P-1}\xi \xrightarrow[P\to 2]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}\xi, \tag{3.9}$$

а собственной функцией непрерывного спектра (функцией Йоста с асимптотикой $\exp(ik\xi)$ при $\xi \to \infty$) будет

$$\Psi_+(\xi, k) = e^{ik\xi} F\left(-P+1, P; 1-ik; \frac{1-\sigma}{2}\right) \xrightarrow[P\to 2]{} e^{ik\xi}\left(1 + \frac{1-\sigma}{ik-1}\right). \tag{3.10}$$

При этом разложение функции Грина по собственным функциям будет выглядеть (для дальнейшего целесообразно указывать в D-функции и параметрическую зависимость от числа Прандтля явно) следующим образом:

$$D(\xi, \xi_0, \tau; P) = e^{(P-1)^2\tau} \frac{\Gamma(P-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(P-1)} \operatorname{sech}^{P-1}\xi \operatorname{sech}^{P-1}\xi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \Psi_+(\xi, k)\Psi_+^*(\xi_0, k) e^{-k^2\tau}.$$

В пределе $P \to 2$ интеграл от собственных функций непрерывного спектра выражается через интегралы ошибок, и после комбинирования их с функцией дискретного спектра получаем

$$D(\xi, \xi_0, \tau; P = 2) = D_0(\xi - \xi_0, \tau) + \frac{e^\tau}{4} \operatorname{sech}\xi \operatorname{sech}\xi_0 \sum_{\pm} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi} \pm \frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Последнее выражение, относящееся к случаю целого числа Прандтля, соответствует полученному в предыдущем пункте «алгебраическим» методом. В этом можно убедиться, выполнив дифференцирование и простые преобразования в (2.21).

В диапазоне чисел Прандтля $3 \geq P > 2$ имеются два дискретных уровня

$$n = 1: \quad \lambda_1 = -(P-1)^2, \quad \Psi_1(\xi) = \sqrt{\frac{\Gamma(P-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(P-1)}} \operatorname{sech}^{P-1}\xi,$$

$$n = 2: \quad \lambda_1 = -(P-2)^2, \quad \Psi_2(\xi) = \sqrt{\frac{2\Gamma(P-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(P-2)}} \operatorname{th}\xi \operatorname{sech}^{P-2}\xi,$$

и в пределе $P \to 3$ нормированные собственные функции дискретного спектра примут простой вид:

$$\Psi_1(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2\xi, \quad \Psi_2(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{th}\xi \operatorname{sech}\xi.$$

Для функции непрерывного спектра в таком диапазоне чисел Прандтля справедливо представление

$$\Psi_+(\xi,k) = e^{ik\xi} F\left(-P+1, P; 1-ik; \frac{1-\sigma}{2}\right) \underset{P\to 3}{\longrightarrow} e^{ik\xi}\left(1+\frac{\sigma(1-\sigma)}{ik-1}+2\frac{(1-\sigma)^2}{ik-2}\right).$$

Теперь разложение функции Грина по собственным функциям будет выглядеть следующим образом:

$$D(\xi,\xi_0,\tau;P) = e^{(P-1)^2\tau}\frac{\Gamma(P-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(P-1)}\operatorname{sech}^{P-1}\xi\operatorname{sech}^{P-1}\xi_0 +$$

$$+ e^{(P-2)^2\tau}\frac{2\Gamma(P-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(P-2)}\frac{\operatorname{th}\xi\operatorname{th}\xi_0}{(\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\xi_0)^{P-2}} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\Psi_+(\xi,k)\Psi_+^*(\xi_0,k)e^{-k^2\tau},$$

и в пределе $P\to 3$ она будет выражаться через интегралы ошибок

$$D(\xi,\xi_0,\tau;P=3) = D_0(\xi-\xi_0,\tau) + \frac{3e^{4\tau}}{8}\operatorname{sech}^2\xi\operatorname{sech}^2\xi_0\sum_{\pm}\operatorname{erf}\left(2\sqrt{\tau}\pm\frac{\xi-\xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ \frac{3e^{\tau}}{4}\operatorname{sech}\xi\operatorname{sech}\xi_0\operatorname{th}\xi\operatorname{th}\xi_0\sum_{\pm}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\tau}\pm\frac{\xi-\xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Обобщением приведенных трех выражений для функций Грина при $P = 1, 2$ и 3 будет формула, справедливая при любых целых числах Прандтля (полное ее доказательство дано в [19] в случае мнимого времени, т. е. для пропагатора нестационарного уравнения Шредингера),

$$D(\xi,\xi_0,\tau;P) = D_0(\xi-\xi_0,\tau) + \sum_{n=1}^{P-1} e^{(P-n)^2\tau}\frac{\Psi_n(\xi)\Psi_n(\xi_0)}{2}\sum_{\pm}\operatorname{erf}\left((P-n)\sqrt{\tau}\pm\frac{\xi-\xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Поскольку при целых числах Прандтля собственные функции непрерывного спектра пропорциональны сумме простых полюсных вкладов,

$$\Psi_+(\xi,k) = e^{ik\xi}\left(1+\sum_{n=1}^{P-1}\frac{a_n^{(p)}(\sigma)}{ik-n}\right),$$

интегралы от их произведений в (3.5) сводятся к суммам вычетов, пропорциональных интегралам ошибок.

В силу обобщенной замены Коула—Хопфа (2.6) между рассмотренной функцией Грина оператора $\hat{L}_{p-1}$ и функцией Грина оператора исходного уравнения конвективной теплопроводности (2.5) при течении, создаваемом ударной волной,

$$\hat{K}_p \equiv \partial_\tau - 2P\operatorname{th}\xi\partial_\xi - \partial_\xi^2, \quad \hat{K}_p G^{(\theta)} = \delta(\xi-\xi_0)\delta(\tau),$$

устанавливается простая связь:

$$G^{(\theta)} = e^{-P^2\tau}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{\operatorname{ch}\xi}\right)^P D(\xi,\xi_0,\tau;P)H(\tau).$$

Используя выражение (2.13), функцию Грина сингулярной начальной задачи теплопроводности можно записать в виде

$$\theta(\xi,\tau) = e^{-P^2\tau}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{\operatorname{ch}\xi}\right)^P \left\{D_0(\xi-\xi_0,\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{P-1} e^{m^2\tau}\Psi_{P-m}(\xi)\Psi_{P-m}(\xi_0)\left[\operatorname{erf}\left(m\sqrt{\tau}+\frac{\xi-\xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right)+\operatorname{erf}\left(m\sqrt{\tau}-\frac{\xi-\xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\}. \quad (3.11)$$

Из полученного результата следует, что при больших временах (при $\tau \to \infty$) температурное возмущение в любом заданном месте ($\xi = \text{const}$), созданное начальным точечным воздействием (в точке ξ_0), быстро исчезает. Действительно, первый экспоненциальный множитель убывает быстрее вторичных экспоненциальных сомножителей, из которых наиболее быстро растущий относится к низшему дискретному уровню. Следовательно, здесь преобладает диффузионное размазывание.

4. КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ СОХРАНЕНИИ ПРИМЕСИ

Рассмотрим теперь модельную систему уравнений конвекции пассивной примеси типа (2.1), модифицированную таким образом, чтобы уравнение для концентрации примеси допускало закон сохранения полного количества примеси:

$$\partial_t c + \partial_x(uc) = \chi\partial_x^2 c; \quad \partial_t \int c\,dx = 0. \quad (4.1)$$

В случае течения жидкости, создаваемого равномерно движущейся ударной волной с вязким переходным слоем, для распределения примеси в движущейся вместе с волной системе координат, пользуясь безразмерными переменными, будем иметь уравнение

$$\left(\partial_\tau - \partial_\tau^2 - 2P\operatorname{th}\xi\partial_\xi - 2P\operatorname{sech}^2\xi\right)c = 0, \quad (4.2)$$

отличающееся от уравнения проанализированной модели лишь добавлением последнего члена, пропорционального концентрации. Замечательно, что после прежней обобщенной замены Коула—Хопфа (2.6) оно приводится к уравнению для новой неизвестной функции ψ того же типа, что и ранее:

$$\psi = \varepsilon^P c; \quad \hat{L}_P\psi \equiv (\partial_\tau - \partial_\xi^2 - P(P+1)\operatorname{sech}^2\xi)\psi = 0. \quad (4.3)$$

Однако при этом возникает важное различие в асимптотическом поведении решений при больших временах даже при одинаковых начальных условиях, связанное с повышением здесь номера оператора. Например, возмущения концентрации, вызванные точечным начальным воздействием типа (2.15) (задача о функции Грина)

$$c(\xi,\tau)\big|_{\tau=0} = \delta(\xi-\xi_0), \quad (4.4)$$

представляются аналогично тому, что было в рассмотренной ранее модели,

$$c(\xi,\tau) = e^{-P^2\tau}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi_0}{\operatorname{ch}\xi}\right)^P D(\xi,\xi_0,\tau;P+1). \quad (4.5)$$

Небольшое, на первый взгляд, но решающее здесь различие на единицу чисел Прандтля имеет место в аргументах функции Грина. Это, благодаря неодинаковости асимптотического поведения функций Грина при различных числах Прандтля, ведет к различному асимптотическому поведению решений двух анализируемых типов модельных уравнений при больших временах.

Согласно общему представлению D-функции из предыдущего пункта ее асимптотическое поведение при фиксированных координатах ξ, ξ_0 и больших временах $\tau \to \infty$ определяется собственной функцией с низшим дискретным собственным значением (основным состоянием):

$$D(\xi, \xi_0, \tau; P+1) \sim e^{P^2\tau} \Psi_1^{(P+1)}(\xi) \Psi_1^{(P+1)}(\xi_0), \tag{4.6}$$

и в соответствии с (4.5) итоговое распределение примеси, в отличие от ранее рассмотренной ситуации, не исчезает при больших временах и имеет локализованный солитоноподобный вид (асимптотика при фиксированной координате ξ, т. е. для распределения, сопровождающего ударную волну):

$$c(\xi, \tau) \xrightarrow[\tau \to \infty]{} \frac{2\Gamma(2P)}{\Gamma^2(P) 2^{2P}} \operatorname{sech}^{2P} \xi. \tag{4.7}$$

Нетрудно проверить, что такое предельное распределение является стационарным решением рассматриваемого уравнения конвективной диффузии. Наиболее классическая, sech^2, форма получается в случае единичного числа Прандтля. При больших числах Прандтля солитон становится более заостренным.

В ситуации единичного числа Прандтля простой анализ со сведением к уравнению теплопроводности допускает общий нестационарный случай [13]. При этом взаимодействие (столкновение) ударных волн в приближении, характеризуемом моделью Бюргерса, носит абсолютно неупругий характер [2, 3]. Каждой ударной волне при достаточно большой длине свободного пробега будет соответствовать асимптотически упрощенное распределение примеси — «примесный солитон». Следует подчеркнуть, что несмотря на классическую форму примесные солитоны кардинально отличаются от классических (например, солитонов уравнения Кортевега—де Вриза) по характеру своих взаимодействий. Коагуляции сталкивающихся ударных волн соответствует абсолютно неупругое слияние примесных солитонов. При больших числах Прандтля отдельные примесные солитоны оказываются более заостренными, а асимптотически упрощенным итогом столкновений пар ударная волна — примесный солитон можно ожидать аналогичное неупругое слияние. Итогом таких нелинейных взаимодействий будет обострение поля концентрации примеси, большая локализация примеси при общем сохранении ее полного количества.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ (ЭФФЕКТ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ПРИМЕСИ)

Проведенное аналитическое исследование конвективной диффузии в одномерной гидродинамике без давления позволяет выявить общую физическую картину явления, существенно зависящую от числа Прандтля. В случае среды с одинаковыми кинетическими коэффициентами разрешимыми, как для модельного уравнения Бюргерса, оказываются нестационарные задачи конвективной диффузии. Они сведены к задачам для линейного уравнения теплопроводности. При целых числах Прандтля уравнения конвективной диффузии в поле равномерно движущейся ударной волны также сводятся к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами, и функцию Грина для нестационарной диффузии при стационарном течении удается выразить через интегралы ошибок. Решения этих детерминированных начальных задач могут служить основой понимания эффекта накопления и локализации примеси.

Пассивная примесь выполняет прежде всего роль метки для выявления локализованных динамических структур скоростного поля течения жидкости. Она успешно отражает особенности формирования, взаимодействия и перестройки локализованных структур. Однако в итоге конкуренции диффузии и конвективного переноса происходит перестройка и самих примесных меток. Образование устойчивых асимптотически упрощенных примесных структур на фоне динамических оказывается, как ясно из предыдущего изложения, весьма чувствительным к детальным особенностям зацепления примесного и скоростного полей, к выполнимости интегральных законов сохранения. При интегральном сохранении проявляется эффект кластеризации примеси.

Развитая гидродинамическая турбулентность в одномерной модели Бюргерса («бюргерлентность») обладает структурой газа неупруго сталкивающихся ударных волн, достаточно разреженного на далекой стадии эволюции [20, 21]. Поэтому решающим становится анализ элементарного процесса столкновения ударных волн, динамической основы стохастического волнового ансамбля.

Динамическая картина кластеризации в одномерном приближении оказывается особенно простой при единичном числе Прандтля, при котором точно решаемой является нестационарная задача столкновения ударных волн с образованием более крупной волны в итоге коагуляции исходных. Асимптотически каждая ударная волна сопровождается примесным солитоном, и абсолютно неупругому столкновению ударных волн будет соответствовать слияние сталкивающихся примесных солитонов. Примесь все более концентрируется в отдельных местах по мере все большего слияния ударных волн. Острота примесной локализации (локального разогрева) при этом зависит от величины отношения кинетических коэффициентов среды, она увеличивается с ростом величины числа Прандтля.

Следует отметить, что с точки зрения эволюции стохастического волнового ансамбля подобное укрупнение структур характерно для обратного каскадного процесса, возможность которого тесно связана с низкой размерностью задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00435).

Литература

1. J. M. Burgers, *The nonlinear diffusion equation*, Reidel, Dordrecht/Boston (1974).
2. M. J. Lighthill, in *Surveys in mechanics*, ed. by G. K. Batchelor and R. M. Davies, University Press, Cambridge (1956), p. 250.
3. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
4. E. Hopf, Commun. Pure Appl. Math. **3**, 201 (1950).
5. J. D. Cole, Quart. Appl. Math. **9**, 225 (1951).
6. A. M. Polyakov, Phys. Rev. E **52**, 6183 (1995).

7. V. Gurarie and A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4908 (1996).
8. W. A. Woyczynsky, *Burgers-KPZ turbulence. Göttingen lectures*, Springer, Berlin (1998).
9. S. F. Shandarin and Ya. B. Zeldovich, Rev. Mod. Phys. **61**, 185 (1989).
10. M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
11. Э. В. Теодорович, ЖЭТФ **109**, 506 (1996).
12. A. I. Saichev and W. A. Woyczynsky, Physica D **100**, 119 (1997).
13. В. А. Городцов, ПММ **62**, 1021 (1998).
14. С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, Наука, Москва (1990).
15. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, ЖЭТФ **111**, 1297 (1997).
16. С. Н. Гурбатов, Г. В. Пасманик, ЖЭТФ **115**, 564 (1999).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
18. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, Мир, Москва (1974).
19. R. E. Crandall, J. Phys. A **16**, 3005 (1983).
20. J. M. Burgers, in *Statistical models and turbulence*, ed. by M. Rosenblatt & C. Van Atta, Springer, N. Y. (1972), p. 41.
21. T. Tatsumi and S. Kida, J. Fluid Mech. **55**, 659 (1972).