ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 5(11), стр. 1523–1538

ЕДИНАЯ АМПЛИТУДА СОХРАНЕНИЯ ВАКУУМА В ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕРКАЛ В ДВУМЕРНОМ И ЗАРЯДОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

*В. И. Ритус**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 1999 г.

Для ускоренного зеркала, взаимодействующего со скалярным и спинорным вакуумными полями в $1+1$-пространстве, найдены изменения действия (и, следовательно, амплитуды сохранения вакуума) в собственно-временном представлении. Показано, что с точностью до множителя e^2 они совпадают с изменениями действия электрического и скалярного зарядов, ускоренных в $3+1$-пространстве. Совпадение объясняется тем, что бозе- и ферми-пары, излучаемые зеркалом, имеют те же спины 1 и 0, что и фотоны и скалярные кванты, излучаемые зарядами. Показано, что распространение виртуальных пар в $1+1$-пространстве описывается причинной функцией Грина $\Delta_f(z,\mu)$ волнового уравнения для $3+1$-пространства. Это связано с тем, что пары могут иметь любую положительную массу и их функция распространения представляется совпадающим с $\Delta_f(z,\mu)$ интегралом по массе от причинной функции распространения массивной частицы в $1+1$-пространстве. В этом интеграле нижний предел μ выбирается малым, но отличным от нуля, для устранения инфракрасной расходимости. Показано, что вещественная и мнимая части изменения действия связаны дисперсионными соотношениями, в которых дисперсионной переменной служит параметр массы. Они являются следствием таких же соотношений для причинной функции $\Delta_f(z,\mu)$. Поэтому возникновение вещественной части изменения действия есть прямое следствие причинности, согласно которой $\mathrm{Re}\,\Delta_f(z,\mu)\neq 0$ только для времениподобных и нулевых интервалов.

PACS: 11.10.Kk, 11.30.-j, 11.55.Fv, 03.65.Pm

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] была обнаружена интригующая симметрия между рождением пар частиц ускоренным зеркалом в $1+1$-пространстве и излучением одиночных квантов ускоренным как зеркало зарядом в $3+1$-пространстве. Эта симметрия заключается в совпадении спектров бозе- и ферми-пар, рождаемых зеркалом, со спектрами фотонов и скалярных квантов, излучаемых электрическим и скалярным зарядами, если отождествить удвоенные частоты ω, ω' квантов пары, рожденной зеркалом, с компонентами $k_\pm = k^0 \pm k^1$ волнового 4-вектора k^α кванта, излученного зарядом:

$$2\omega = k_+, \quad 2\omega' = k_-. \tag{1}$$

Было показано [3], что коэффициенты Боголюбова $\beta^B_{\omega'\omega}$ и $\beta^F_{\omega'\omega}$, описывающие спектры бозе- и ферми-излучений зеркала, связаны с фурье-образами плотности 4-тока

*E-mail: ritus@lpi.ac.ru

$j_\alpha(k_+,k_-)$ и плотности скалярного заряда $\rho(k_+,k_-)$, описывающими спектры фотонов и скалярных квантов, излучаемых зарядами, следующими соотношениями[1)]

$$\beta^{B*}_{\omega'\omega} = -\sqrt{\frac{k_+}{k_-}}\,\frac{j_-}{e} = \sqrt{\frac{k_-}{k_+}}\,\frac{j_+}{e}\,, \tag{2}$$

$$\beta^{F*}_{\omega'\omega} = \frac{1}{e}\,\rho(k_+,k_-). \tag{3}$$

Было показано также, что $\beta^*_{\omega'\omega}$ — это амплитуда источника пары частиц, лишь потенциально излучаемых направо и налево с частотами ω и ω'. Иными словами, это амплитуда рождения виртуальной пары. Пара станет реальной, когда одна из ее частиц испытает внутреннее отражение с изменением частоты и обе частицы будут двигаться в одном направлении — направо в случае правостороннего зеркала и налево в случае левостороннего. Поэтому для правостороннего зеркала, например, амплитуда $\langle out\,\omega''\omega|in\rangle$ излучения реальной пары частиц с частотами ω, ω'' связана с амплитудой $\beta^*_{\omega'\omega}$ рождения виртуальной пары соотношением

$$\langle out\,\omega''\omega|in\rangle = -\sum_{\omega'}\langle out\,\omega''|\omega' in\rangle\beta^*_{\omega'\omega}, \tag{4}$$

где $\langle out\,\omega''|\omega' in\rangle$ — амплитуда одночастичного рассеяния на зеркале. Энергия и импульс этой реальной пары равны $\omega+\omega''$ и $\omega+\omega''$, т. е. пара не имеет массы, как и ее компоненты.

Иное дело — виртуальная пара. Согласно (1) нулевая и первая компоненты 4-импульса k^α кванта, излучаемого зарядом, представляют собой энергию и импульс рождаемой зеркалом виртуальной пары безмассовых частиц:

$$k^0 = \omega+\omega', \quad k^1 = \omega-\omega', \tag{5}$$

и образуют в $1+1$-пространстве времениподобный 2-импульс пары. Очевидно, что величина

$$m = \sqrt{k_+k_-} = 2\sqrt{\omega\omega'}\,, \tag{6}$$

будучи инвариантом лоренцевых преобразований вдоль оси 1, есть масса виртуальной пары и в то же время — это поперечный импульс $k_\perp = \sqrt{k_2^2+k_3^2}$ безмассового реального кванта, излучаемого зарядом.

То, что амплитуда $\beta^B_{\omega'\omega}$ источника виртуальной пары бозонов определяется током $j^\alpha(k_+,k_-)$, а амплитуда $\beta^F_{\omega'\omega}$ источника виртуальной пары фермионов — скаляром $\rho(k_+,k_-)$, означает, что спин бозонной пары равен 1, а спин фермионной равен 0. Таким образом, совпадение спектров излучения зеркала в $1+1$-пространстве и зарядов в $3+1$-пространстве можно объяснить совпадением момента пары, излучаемой зеркалом, и спина частицы, излучаемой зарядом [3].

---

1) Используются естественная система единиц, хевисайдовы единицы заряда и метрики четырехмерного и двумерного пространств со следами 2 и 0, так что $\hbar = c = 1$, $e^2/4\pi = 1/137$, $k_\alpha x^\alpha = \mathbf{kx} - k^0x^0$, $j_\pm = j^0 \pm j^1$. Остальные обозначения см. в [1–3].

Соотношение (2) можно записать в явно инвариантной форме:

$$e\beta^{B*}_{\omega'\omega} = \varepsilon_{\alpha\beta}k^{\alpha}j^{\beta}/\sqrt{k_+k_-}, \tag{7}$$

а именно, в виде скалярного произведения 2-вектора тока j^{β} и 2-псевдовектора поляризации бозе-пары a_{β}:

$$a_{\beta} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}k^{\alpha}}{\sqrt{k_+k_-}}, \quad a_0 = -\frac{k^1}{\sqrt{k_+k_-}}, \quad a_1 = \frac{k^0}{\sqrt{k_+k_-}}. \tag{8}$$

Пространствуподобный псевдовектор a_{β} построен из нулевой и первой компонент 4-импульса k^{α} кванта, излучаемого зарядом. Он ортогонален 2-импульсу пары, имеет длину, равную 1, и в собственной системе пары представляется только пространственной компонентой, как и вектор тока j^{α}.

В этой работе найдена амплитуда сохранения вакуума при ускорении зеркала, которая определяется изменением ΔW самодействия зеркала из-за его ускорения. По существу речь идет о нахождении $\mathrm{Re}\,\Delta W$ по найденной ранее $\mathrm{Im}\,\Delta W$, удвоенное значение которой совпадает в известном приближении (см. ниже) со средним числом реальных пар, образованных зеркалом. Для этого используются три разных способа.

Первый (и основной) рассматривается в разд. 2 и состоит в преобразовании исходного пространственно-временного представления для среднего числа пар в собственно-временное представление, ядром которого оказывается релятивистски-инвариантное сингулярное четное решение $(1/2)D^1(z)$ волнового уравнения в $3+1$-пространстве. Далее, в полученном выражении для числа пар функция $D^1(z)$ заменяется четным решением $\Delta^1(z,\mu)$ уравнения Клейна—Гордона, чтобы инвариантным и симметричным образом устранить инфракрасную расходимость в интеграле для числа пар с помощью малого параметра массы μ вместо большого параметра длины траектории L, использованного в исходном выражении. Параметры μ, $L^{-1} \ll \kappa$, если κ — характерное ускорение на траектории. Наконец, рассматривая функцию $(1/2)\Delta^1(z,\mu)$ как мнимую часть ядра, определяющего ΔW, аналитическим продолжением по z^2 восстанавливается релятивистски-инвариантное и четное по z ядро, совпадающее с причинной функцией Грина $\Delta_f(z,\mu)$, специфичной для $3+1$-пространства. Изменения действий зеркала и зарядов в результате различаются лишь множителем e^2, а взаимодействия описываются одной и той же причинной функцией распространения. Таким образом, различие размерностей пространств компенсируется различием в механизме переноса взаимодействия: в $1+1$-пространстве оно осуществляется парами, а в $3+1$-пространстве — отдельными частицами.

В разд. 3 проводится непосредственный расчет самодействий $\Delta W_f^{B,F}$ для конкретной, но достаточно общей траектории зеркала. Полученные для $\Delta W_f^{B,F}$ инвариантные функции относительной скорости концов траектории согласуются с результатами разд. 2.

В разд. 4 $\mathrm{Re}\,\Delta W_f$ восстанавливается по $\mathrm{Im}\,\Delta W_f$ с помощью дисперсионных соотношений, в которых масса μ фигурирует как дисперсионная переменная. Показано, что дисперсионные соотношения для ΔW_f являются следствием таких же соотношений для $\Delta_f(z,\mu)$ с времениподобным z как параметром. Вследствие причинности только для таких z значения $\mathrm{Re}\,\Delta_f$ и $\mathrm{Re}\,\Delta W_f$ отличны от нуля и связаны дисперсионными соотношениями соответственно с $\mathrm{Im}\,\Delta_f$ и $\mathrm{Im}\,\Delta W_f$.

В пятом разделе рассматриваются другие аналитические продолжения функции $i\Delta^1/2$ на вещественную ось z^2, приводящие к ядрам для ΔW, вещественные части которых не являются четными по z.

В шестом заключительном разделе излагается физическая интерпретация результатов. Появление в двумерном пространстве-времени причинной функции распространения, характерной для четырехмерного пространства-времени, объяснено переносом взаимодействия парами различной массы.

2. СОБСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ДЕЙСТВИЯ

В работе [2] для средних чисел излученных бозе- и ферми- частиц были получены следующие представления:

$$N^{B,F} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} du\, K^{B,F}(u), \tag{9}$$

$$K^B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v - f(u)}\left[\frac{1}{g(v) - u} - \frac{f'(u)}{v - f(u)}\right], \tag{10}$$

$$K^F(u) = -\sqrt{f'(u)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v - f(u)}\left[\frac{\sqrt{g'(v)}}{g(v) - u} - \frac{\sqrt{f'(u)}}{v - f(u)}\right]. \tag{11}$$

Из этих представлений следует, что для траекторий с асимптотически постоянными скоростями β_1, β_2 на концах и ненулевой лоренц-инвариантной относительной скоростью

$$\beta_{21} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_2\beta_1}, \quad \theta = \operatorname{Arth}\beta_{21}, \tag{12}$$

среднее число излучаемых квантов нулевой массы оказывается бесконечным (инфракрасная расходимость). Действительно, в этом случае из формул (10), (11) следует, что при $u \to \pm\infty$ (точнее, при $|u| \gg \kappa^{-1}$, т. е. вне области, где зеркало испытывает характерное ускорение κ) функции $K^{B,F}(u)$ обладают универсальным, зависящим только от β_{21}, поведением:

$$K^B(u) \approx \pm\frac{1}{u}\left(\frac{\theta e^{\mp\theta}}{\operatorname{sh}\theta} - 1\right) = \pm\frac{1}{u}\left(\frac{\theta}{\operatorname{th}\theta} - 1\right) - \frac{\theta}{u}, \tag{13}$$

$$K^F(u) \approx \pm\frac{1}{u}\left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta}\right). \tag{14}$$

Релятивистски-инвариантные коэффициенты при u^{-1} формируются на участках траектории с асимптотически постоянными скоростями. В результате среднее число квантов, излученных на участке траектории, охватывающем область ускорения, логарифмически растет с ростом длины $2L$ этого участка:

$$N^B = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\theta}{\operatorname{th}\theta} - 1\right)\ln(L\kappa) + 2b^B(\theta), \tag{15}$$

$$N^F = \frac{1}{2\pi^2}\left(1-\frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta}\right)\ln(L\kappa)+2b^F(\theta), \quad L\kappa \gg 1. \tag{16}$$

Обратим внимание на то, что нечетное (как по u, так и по θ) слагаемое в асимптотике $K^B(u)$ не дает вклада в интеграл N^B. Члены $2b^{B,F}$ не зависят от L при $L\kappa \gg 1$, но могут зависеть от конкретного вида траекторий.

Заметим, что для $N^{B,F}$ существуют представления, отличающиеся от (9)–(11) зеркальной симметрией, т. е. перестановкой $u \rightleftarrows v$, $f(u) \rightleftarrows g(v)$. Определяющие их подынтегральные функции $K^{B,F}(v)$ отличаются от $K^{B,F}(u)$, но обозначаются ниже той же буквой, так как являются значениями одного и того же функционала, взятого для двух зеркально-симметричных траекторий: $K(u) \equiv K[u;g]$, $K(v) \equiv K[v;f]$. При $v \to \pm\infty$ $K^{B,F}(v)$ имеют асимптотики, отличающиеся от (13), (14) заменой $u \to v$, $\theta \to -\theta$.

Амплитуда сохранения вакуума ускоренным зеркалом определяется изменением действия $\Delta W = W|_0^F$ (т. е. разностью действий для ускоренного и неускоренного зеркал) и имеет вид $\exp(i\Delta W)$, где $2\operatorname{Im}\Delta W = N$, если пренебречь интерференционными эффектами в рождении двух или более пар. Мы будем считать частицу и античастицу нетождественными, иначе в том же приближении $2\operatorname{Im}\Delta W = (1/2)N$, см. [3].

Основная задача теперь состоит в нахождении $\operatorname{Re}\Delta W$. Для этого мы получим подходящее представление для $\operatorname{Im}\Delta W$ и воспользуемся соображениями релятивистской инвариантности и причинности.

Рассмотрим для N пространственно-временное представление, которое было непосредственным «родителем» представления (9)–(11), см [2]. В этом представлении

$$N^B = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} du\,dv\,S(u,v)\Big|_0^F, \quad S(u,v) = \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{(v-f(u)-i\varepsilon)\,(g(v)-u-i\delta)}+\text{c.c.}\right]. \tag{17}$$

Перейдем от независимых характеристических переменных u, v к моментам собственного времени τ, τ' двух точек на мировой траектории зеркала $x^\alpha(\tau)$:

$$u = x^0(\tau) - x^1(\tau) = x_-(\tau), \quad v = x^0(\tau') + x^1(\tau') = x_+(\tau'). \tag{18}$$

Тогда

$$f(u) = x^0(\tau) + x^1(\tau) = x_+(\tau), \quad g(v) = x^0(\tau') - x^1(\tau') = x_-(\tau'), \tag{19}$$

и функция $S(u,v)$ становится релятивистски-инвариантной функцией двумерного вектора $z^\alpha = x^\alpha(\tau) - x^\alpha(\tau') \equiv (x-x')^\alpha$, соединяющего точки $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, $x'^\alpha = x^\alpha(\tau')$ на траектории зеркала:

$$S(z) = \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{(x'_+ - x_+ - i\varepsilon)(x'_- - x_- - i\delta)} + \text{c.c.}\right] =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{z_+z_- + i\varepsilon\operatorname{sign}z^0} + \text{c.c.}\right] = \frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{1}{-z^2 + i\varepsilon\operatorname{sign}z^0} + \text{c.c.}\right] = -P\frac{1}{4\pi^2 z^2}. \tag{20}$$

Отдельные слагаемые в (20) и их сумма — это хорошо известные в квантовой электродинамике релятивистски-инвариантные сингулярные функции (мы используем обозна-

чения книги [4], но наши D^1 и Δ^1 лишены множителя i):

$$\begin{aligned} D^{\pm}(z) &= \frac{\pm i}{4\pi^2(z^2 \pm i\varepsilon \operatorname{sign} z^0)} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\pi\varepsilon(z^0)\delta(z^2) \pm \frac{i}{z^2}\right], \\ D^1(z) &= \frac{1}{2\pi^2 z^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

так что

$$S(z) = -\frac{i}{2}\left[D^-(z) - D^+(z)\right] = -\frac{1}{2}D^1(z). \tag{22}$$

Подчеркнем, что эти функции являются сингулярными решениями волнового уравнения в 3+1-пространстве, если под z^α понимать не двумерный, а четырехмерный вектор. Появление здесь этих функций, зависящих от 2-вектора z^α, — результат глубокой симметрии между рождением пар зеркалом в 1 + 1- пространстве и излучением одиночных квантов зарядом в 3 + 1-пространстве.

Используя

$$\begin{aligned} du\,dv &= d\tau\,d\tau'\dot{x}_-\dot{x}'_+ = d\tau\,d\tau'\left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}_-\dot{x}'_+ + \dot{x}_+\dot{x}'_-\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_-\dot{x}'_+ - \dot{x}_+\dot{x}'_-\right)\right] = \\ &= d\tau\,d\tau'\left(-\dot{x}_\alpha\dot{x}'^\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}'^\beta\right) \end{aligned} \tag{23}$$

в виде суммы четного и нечетного относительно перестановки $\tau \rightleftarrows \tau'$ слагаемых (точка обозначает дифференцирование по собственному времени), получаем

$$N^B = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,d\tau'\left(\dot{x}_\alpha\dot{x}'^\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}'^\beta\right)\frac{1}{2}D^1(z)\Big|_0^F. \tag{24}$$

Для устранения инфракрасной расходимости в (24) естественно использовать явно релятивистский, сохраняющий симметрию относительно перестановки $\tau \rightleftarrows \tau'$ способ. Он состоит в замене функции $D^1(z)$ также четной по z функцией $\Delta^1(z,\mu)$ с малым параметром массы $\mu \ll \kappa$, где κ — характерное ускорение зеркала.

Эта функция

$$\frac{1}{2}\Delta^1(z,\mu) = \frac{\mu}{8\pi s}N_1(\mu s) = -\frac{1}{4\pi^2 s^2} - \frac{\mu}{4\pi^2 s}J_1(\mu s)\ln\frac{2}{\mu s} + R \tag{25}$$

(где J_1 и N_1 — функции Бесселя и Неймана, а R — регулярная функция s) является сингулярным решением волнового уравнения в 3 + 1-пространстве, зависящим только от интервала $s = \sqrt{-z^2}$ между двумя точками и содержащим все особенности по s в точке $s = 0$. Оно называется основным решением [5] или элементарной функцией Адамара. Коэффициент при логарифме, называемый функцией Римана [5] — регулярная функция s, удовлетворяющая тому же уравнению, что и Δ^1. Именно эти две функции будут определять мнимую и вещественную части изменения действия.

Таким образом,

$$N^B = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,d\tau'\left(\dot{x}_\alpha\dot{x}'^\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}'^\beta\right)\frac{1}{2}\Delta^1(z,\mu)\Big|_0^F. \tag{26}$$

В выражениях для N^B нечетное слагаемое несущественно, так как $D^1(z)$ и $\Delta^1(z,\mu)$ четны относительно замены $z \to -z$.

Рассматривая теперь N как мнимую часть удвоенного действия, естественно считать функцию $(1/2)\Delta^1(z,\mu)$ мнимой частью некоторой, взятой на вещественной оси z^2, функции $F(z^2)$, аналитической в комплексной плоскости z^2 с разрезом вдоль полуоси $z^2 \leq 0$, где лоренц-инвариантность позволяет ей зависеть еще от знака z^0, и совпадающей с $(i/2)\Delta^1(z,\mu)$ при $z^2 > 0$. Тогда переход от iN^B к $2W$ эквивалентен аналитическому продолжению функции $F(z^2)$ на вещественную полуось $z^2 \leq 0$. Хорошо известно [6], что граничным значением такой функции, не зависящим от знака z^0 и, стало быть, четным, является предел сверху ($\varepsilon \to +0$), называемый причинной функцией:

$$\Delta_f(z,\mu) = F(z^2 + i\varepsilon) = \frac{\mu}{4\pi^2 s} K_1(i\mu s) = \frac{1}{4\pi}\delta(s^2) - \frac{\mu}{8\pi s}\left[J_1(\mu s) - iN_1(\mu s)\right]. \qquad (27)$$

Здесь K_1 — функция Макдональда, а $s = \sqrt{-z^2 - i\varepsilon}$. Последнее равенство написано для $z^2 \leq 0$, когда $s \geq 0$ и у Δ_f имеется вещественная часть, совпадающая с умноженной на $\pi/2$ функцией Римана. Если же $z^2 > 0$, то $s = -i\sqrt{z^2}$ и Δ_f чисто мнима и ее мнимая часть положительна.

Таким образом, для ΔW_f^B получаем

$$\Delta W_f^B = \frac{1}{2}\iint d\tau\, d\tau' \dot{x}_\alpha(\tau)\dot{x}^\alpha(\tau')\Delta_f(z,\mu)\Big|_0^F. \qquad (28)$$

Как показано в [2], пространственно-временное представление для N^F отличается от представления (17) для N^B дополнительным множителем $-\sqrt{f'(u)g'(v)}$ под интегралом. Поэтому при замене переменных (18) вместо (23) мы имеем дело с

$$-du\, dv \sqrt{f'(u)g'(v)} = -d\tau\, d\tau'. \qquad (29)$$

Тогда

$$N^F = \frac{1}{2}\iint d\tau\, d\tau' \Delta^1(z,\mu)\Big|_0^F, \qquad (30)$$

а изменение действия равно

$$\Delta W_f^F = \frac{1}{2}\iint d\tau\, d\tau' \Delta_f(z,\mu)\Big|_0^F. \qquad (31)$$

Полученные для $\Delta W_f^{B,F}$ собственно-временные представления лишь отсутствием множителя e^2 отличаются от самодействий ΔW_1 и ΔW_0 электрического и скалярного зарядов, движущихся по той же траектории, что и зеркало, но в $3+1$-пространстве.

При $\mu \to 0$ коэффициенты при $\ln \mu^{-1}$ в мнимых частях собственно-временных интегралов (28) и (31) должны совпадать с коэффициентами при $\ln L$ в соответствующих выражениях для N^B и N^F, см. (15) и (16), так как эти коэффициенты не могут зависеть от способа устранения инфракрасной расходимости в разных представлениях для каждой из величин N^B и N^F.

Так как для интервала между двумя точками на времениподобной траектории

$$\operatorname{Re}\Delta_f(z,\mu) = -\frac{\mu}{8\pi s} J_1(\mu s) \qquad (32)$$

и отличается от коэффициента при логарифме в $\operatorname{Im}\Delta_f$ лишь множителем $\pi/2$, см. (27) и (25), то и $\operatorname{Re}\Delta W_f$ отличается этим же множителем от коэффициента при $\ln\mu^{-1}$ в $\operatorname{Im}\Delta W_f$. Таким образом, с точностью до членов, исчезающих при $\mu \to 0$,

$$\Delta W_f = \pi a(\theta) + i\left[a(\theta)\ln\frac{\kappa^2}{\mu^2} + b(\theta)\right], \tag{33}$$

$$a^B(\theta) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\theta}{\operatorname{th}\theta} - 1\right), \quad a^F(\theta) = \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta}\right). \tag{34}$$

Функция $b(\theta)$ может зависеть от других безразмерных параметров, например от изменений скорости на участках траектории, содержащих другие экстремальные значения собственного ускорения.

Существенно, что $\operatorname{Re}\Delta W_f = \pi a$ имеет конечный, положительный для $\theta \neq 0$ предел при $\mu \to 0$.

В заключение этого раздела напомним, что $\operatorname{Re}\Delta W_f$ — это вызванный ускорением сдвиг собственной энергии источника, проинтегрированный по собственному времени, а $2\operatorname{Im}\Delta W_f$ — это среднее число излученных пар (или частиц — в случае их нетождественности с античастицами). Точнее, $\exp(-2\operatorname{Im}\Delta W_f)$ — это вероятность нерождения пар за все время ускорения.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ДЕЙСТВИЯ ПРИ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЗЕРКАЛА

Представляет интерес непосредственное вычисление $\Delta W_f^{B,F}$ для частной, но очень важной траектории зеркала

$$x = \xi(t) = v_\infty\sqrt{\frac{v_\infty^2}{\kappa^2} + t^2}, \tag{35}$$

которую можно назвать квазигиперболической. Здесь $\pm v_\infty$ — скорости зеркала при $t \to \pm\infty$, а κ — его ускорение в точке поворота ($t = 0$). Это движение замечательно тем, что при $v_\infty \to 1$ оно становится все более близким к равноускоренному (гиперболическому) на все большем интервале времени

$$|t| \lesssim t_1 = \frac{v_\infty}{\kappa}(1 - v_\infty^2)^{-1/2},$$

гладко переходя в равномерное движение вне этого интервала. Это видно из выражения для величины ускорения в собственной системе

$$a = \kappa\left(1 + \frac{t^2}{t_1^2}\right)^{-3/2}.$$

В работе [7] для электрического заряда, движущегося по траектории (35), были найдены спектр и полная энергия излучения.

Для вычисления ΔW^B используем в (28) вместо времени t переменную u, определенную формулой

$$t = \frac{v_\infty}{\kappa}\operatorname{sh}u.$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
d\tau\, d\tau' \dot{x}_\alpha(\tau)\dot{x}^\alpha(\tau') = -dx\, dy \frac{v_\infty^2}{\kappa^2}\left(\frac{1+v_\infty^2}{2}\operatorname{ch} x + \frac{1-v_\infty^2}{2}\operatorname{ch} 2y\right), \\
(x-x')^2 = -2\frac{v_\infty^2}{\kappa^2}(\operatorname{ch} x - 1)\left[v_\infty^2 + (1-v_\infty^2)\operatorname{ch}^2 y\right], \quad x = u - u', \quad y = \frac{u+u'}{2},
\end{gathered}
\tag{36}
$$

и ΔW^B выражается интегралом от функций Макдональда

$$
\Delta W^B = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} e^{-i\mu^2\xi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{v_\infty^2}{\kappa^2} e^{iz}\left[(1+v_\infty^2)K_1(iz) + (1-v_\infty^2)K_0(iz)\operatorname{ch} 2y\right]_0^F, \tag{37}
$$

если воспользоваться представлением

$$
\Delta_f(x-x',\mu) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\exp\left[i\frac{(x-x')^2}{4\xi} - i\mu^2\xi\right] \tag{38}
$$

для причинной функции и обозначить

$$
z = \frac{v_\infty^2}{2\kappa^2\xi}\left[v_\infty^2 + (1-v_\infty^2)\operatorname{ch}^2 y\right]. \tag{39}
$$

Переходя теперь в формуле (37) от переменной интегрирования ξ к переменной z, получаем

$$
\Delta W^B = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{\frac{1+v_\infty^2}{2Q}\left[S_1(\Lambda) + S_0(\Lambda)\right] - S_0(\Lambda)\right\}, \tag{40}
$$

где

$$
\Lambda = \lambda v_\infty^2 Q, \quad \lambda = \frac{\mu^2}{\kappa^2}, \quad Q = v_\infty^2 + (1-v_\infty^2)\operatorname{ch}^2 y, \tag{41}
$$

$$
S_n(\Lambda) = (-1)^{n+1}\int_0^\infty dz\, e^{-i\Lambda/2z}\left[e^{iz}K_n(iz) - \sqrt{\frac{\pi}{2iz}}\right]. \tag{42}
$$

Вычитание $\Big|_0^F$ в (40) свелось к вычитанию асимптотики $(\pi/2iz)^{1/2}$ подынтегральной функции в представлении (42) для $S_n(\Lambda)$. Как показано в [8, 9], функции $S_n(\Lambda)$ выражаются через произведения модифицированных функций Бесселя $I_n(\sqrt{\Lambda})$ и $K_n(\sqrt{\Lambda})$. Обратим внимание также на более компактные выражения для производных

$$
S_n'(\Lambda) = (-1)^n\pi\left[I_n(x)K_n(x) - \frac{1}{2x}\right] + iK_n^2(x), \quad x = \sqrt{\Lambda}. \tag{43}
$$

Из формул (40)–(42) видно, что ΔW^B зависит от двух безразмерных параметров λ и $v_\infty = \operatorname{th}(\theta/2)$.

Для вычисления асимптотики интеграла (40) при $\lambda \to 0$ заметим, что в этом случае в первом члене будут эффективны значения $\Lambda \to 0$, и поэтому

$$S_1(\Lambda) + S_0(\Lambda) \approx -\pi - i \ln \frac{4}{\gamma^2 \Lambda}, \quad \gamma = 1.781\ldots, \tag{44}$$

а во втором члене интеграл можно свести к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, S_0(\Lambda) \approx -\int_0^{\infty} d\Lambda\, S_0'(\Lambda) \ln \Lambda + S_0(0) \ln \frac{4}{\lambda v_\infty^2 (1 - v_\infty^2)} =$$

$$= -\pi - i \left[\ln \frac{16}{\gamma^2 v_\infty^2 (1 - v_\infty^2) \lambda} - 2 \right]. \tag{45}$$

В результате с точностью до членов, исчезающих при $\lambda \to 0$, получаем

$$\Delta W^B \approx \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \pi \left(\frac{\theta}{\operatorname{th}\theta} - 2 \right) + i \left[\left(\frac{\theta}{\operatorname{th}\theta} - 1 \right) \ln \left[\frac{8(\operatorname{ch}\theta + 1)^2}{\gamma^2 \lambda (\operatorname{ch}\theta - 1)} \right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2 - \frac{L_2(1 - e^{-2\theta}) + \theta^2}{\operatorname{th}\theta} \right] \right\}. \tag{46}$$

Здесь $\theta = \operatorname{Arth} \beta_{21} = 2 \operatorname{Arth} v_\infty$, а функция $L_2(x)$ — дилогарифм Эйлера [10, 11].

Для квазиравноускоренного зеркала, взаимодействующего со спинорным полем, вместо формулы (40) получаем

$$\Delta W^F = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ \int_0^{\infty} dz \exp\left(-\frac{i\Lambda}{2z} + iz \right) R(iz) - S_0(\Lambda) \right\}, \tag{47}$$

где

$$R(iz) = \int_0^{\infty} dx \left(\sqrt{\frac{(\operatorname{ch} x + c)^2 - s^2}{(1 + c)^2 - s^2}} - 1 \right) \exp(-iz \operatorname{ch} x),$$
$$c = \operatorname{ch}\theta \operatorname{ch} 2y, \quad s = \operatorname{sh}\theta \operatorname{sh} 2y, \quad \theta = 2 \operatorname{Arth} v_\infty, \tag{48}$$

остальные обозначения те же, что и в (40). Видно, что ΔW^F зависит от двух безразмерных параметров λ и θ.

При $\lambda \to 0$ выражение в круглых скобках в (48) можно заменить на

$$\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt{(1 + c)^2 - s^2}}.$$

Эта аппроксимация верна при $\operatorname{ch} x \gg 1$ и имеет правильное (нулевое) значение при $x = 0$. Тогда

$$\Delta W^F \approx \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 + c)^2 - s^2}} [S_1(\Lambda) + S_0(\Lambda)] - S_0(\Lambda) \right\} \tag{49}$$

и, используя (44), (45), получаем

$$\Delta W^F \approx \frac{1}{8\pi^2}\left\{\pi\left(1-\frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta}\right)+i\left[\left(1-\frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta}\right)\ln\left[\frac{8(\operatorname{ch}\theta+1)^2}{\gamma^2\lambda(\operatorname{ch}\theta-1)}\right]-2+\frac{L_2(1-e^{-2\theta})+\theta^2}{\operatorname{sh}\theta}\right]\right\} \quad (50)$$

с точностью до членов, исчезающих при $\lambda \to 0$.

Полученные формулы для $\Delta W^{B,F}$ не только обладают структурой (33), но и представляют явные выражения для функций $b^{B,F}(\theta)$. Видно также, что $\Delta W^{B,F}$ не зависят от знака θ или β_{21}, если учесть, что $L_2(1-e^{-2\theta})+\theta^2$ — нечетная функция θ, см. формулу Ландена (1.12) в [11]. Заметим в этой связи, что при малых значениях θ

$$L_2(1-e^{-2\theta})+\theta^2 = 2\theta+\frac{2}{9}\theta^3-\frac{2}{225}\theta^5+\ldots, \quad (51)$$

а при $\theta \to \pm\infty$ с точностью до экспоненциально малых членов

$$L_2(1-e^{-2\theta})+\theta^2 = \pm\left(\theta^2+\frac{\pi^2}{6}\right)+\ldots. \quad (52)$$

Мнимая и вещественная части $\Delta W^{B,F}$ в (46) и (50) положительны вследствие унитарности и причинности. При $\theta = 0$ величина ΔW исчезает, так как квазигиперболическая траектория становится прямой.

Точка $\theta = \infty$ для $\Delta W_f^{B,F}(\theta,\lambda)$ является существенно особой. Физически она соответствует чисто гиперболической траектории, для которой $\beta_{21} = 1$ или -1 соответственно знаку κ. При фиксированном λ и $\theta \to \pm\infty$ из (40) и (47) получаем

$$\Delta W_f^{B,F}(\theta,\lambda) = \mp\theta\frac{1}{8\pi^2}S_{1,0}(\lambda), \quad (53)$$

причем $\pm\theta = |\kappa|(\tau_2-\tau_1) \gg 1$, и на концах как угодно большого интервала (τ_1,τ_2) собственного времени относительная скорость β_{21} как угодно близка к $+1$ или -1. Для равноускоренных зарядов в $3+1$-пространстве формула (53) была получена в [12] и подробно обсуждалась в [8, 9]. Там она определяла классический сдвиг массы равноускоренного заряда:

$$\Delta m_{1,0} = -\frac{\partial\Delta W_{1,0}}{\partial\tau_2} = \frac{\alpha}{2\pi}|\kappa|S_{1,0}(\lambda). \quad (54)$$

В соответствии с унитарностью и причинностью мнимая и вещественная части Δm отрицательны. В точке $\kappa = 0$ функция $\Delta m(\kappa)$ неаналитична и поэтому невоспроизводима теорией возмущений по κ или по ускоряющему заряд полю.

4. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ΔW И ИХ ПРОИСХОЖДЕНИЕ

В работе [9] было показано, что изменения действий $\Delta W_s(\mu^2)$ точечных зарядов, движущихся по времениподобным траекториям, как функции квадрата массы квантов их собственного поля со спином $s = 1, 0$ аналитичны в комплексной плоскости μ^2 с разрезом вдоль положительной полуоси μ^2, на берегах которого мнимые части каждой из функций совпадают, а реальные отличаются знаком. Для таких функций справедливы дисперсионные представления ($\mathrm{Im}\,\mu < 0$):

$$\Delta W(\mu^2) = \frac{2i}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\, x\,\mathrm{Re}\,\Delta W(x^2)}{x^2-\mu^2} = -\frac{2\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\,\mathrm{Im}\,\Delta W(x^2)}{x^2-\mu^2}, \tag{55}$$

которые восстанавливают функцию $\Delta W_s(\mu^2)$ в комплексной плоскости μ^2 по ее вещественной или мнимой части, заданной на нижнем берегу разреза. При $\mu = i\kappa$, $\kappa > 0$, из этих соотношений следуют важные равенства:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\, x\,\mathrm{Re}\,\Delta W(x^2)}{x^2+\kappa^2} = \frac{2\kappa}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx\,\mathrm{Im}\,\Delta W(x^2)}{x^2+\kappa^2} = \mathrm{Im}\,\Delta W(-\kappa^2) > 0, \tag{56}$$

$$\mathrm{Re}\,\Delta W(-\kappa^2) = 0. \tag{57}$$

Вследствие унитарности $\mathrm{Im}\,\Delta W(\mu^2)$ положительна на вещественной полуоси $\mu^2 > 0$. Тогда согласно второму из представлений (55) $\mathrm{Im}\,\Delta W(\mu^2)$ положительно определена во всей комплексной плоскости μ^2 (или в нижней полуплоскости μ).

Здесь мы покажем, что приведенные дисперсионные соотношения для $\Delta W(\mu^2)$ обязаны аналитическим свойствам причинной функции $\Delta_f(z,\mu)$, которая, как мы видим, определяет не только $\Delta W_s(\mu^2)$ для вакуумной амплитуды ускоренных зарядов в $3+1$-пространстве, но и $\Delta W^{B,F}(\mu^2)$ для вакуумной амплитуды ускоренного зеркала в $1+1$-пространстве.

Покажем, что причинная функция $\Delta_f(z,\mu)$ для времениподобного z удовлетворяет приведенным дисперсионным соотношениям. Согласно формулам (2.12.4.28) и (2.13.3.20) из [13]

$$\int_0^\infty \frac{dx\, x^2 J_1(sx)}{x^2+\kappa^2} = -\kappa\int_0^\infty \frac{dx\, x N_1(sx)}{x^2+\kappa^2} = \kappa K_1(s\kappa), \tag{58}$$

где параметры s, $\mathrm{Re}\,\kappa > 0$. При аналитическом продолжении по κ в точку $\kappa = i\mu + \varepsilon$, где $\mu > 0$, а $\varepsilon \to +0$, эти соотношения переходят в

$$\int_0^\infty \frac{dx\, x^2 J_1(sx)}{x^2-\mu^2+i\varepsilon} = -i\mu\int_0^\infty \frac{dx\, x N_1(sx)}{x^2-\mu^2+i\varepsilon} = i\mu K_1(i\mu s) = -\frac{i\pi\mu}{2}\left[J_1(\mu s) - iN_1(\mu s)\right]. \tag{59}$$

После умножения на $-i/4\pi^2 s$ они образуют первую пару дисперсионных соотношений (55), в которых вместо $\Delta W(\mu^2)$ фигурирует причинная функция (27) с времениподобным вектором z^α, для которого $s = \sqrt{-z^2} > 0$. Для пространствуподобных z^α интервал $s = -i\sqrt{z^2}$ и $\Delta_f(z,\mu)$ чисто мнима.

Исходные же формулы (58) при умножении на $-1/4\pi^2 s$ совпадают со второй парой соотношений (56) с заменой $\Delta W(\mu^2)$ на $\Delta_f(z,\mu)$. Появляющаяся в правой части этих соотношений функция

$$-\frac{\kappa}{4\pi^2 s}K_1(\kappa s) = \mathrm{Im}\,\Delta_f(z,-i\kappa) \tag{60}$$

в отличие от $\operatorname{Im}\Delta W(-\kappa^2)$ отрицательна. При этом

$$\operatorname{Re}\Delta_f(z,-i\kappa)=0, \tag{61}$$

как это видно из (27). Это свойство является следствием причинности, согласно которой $\operatorname{Re}\Delta_f(z,\mu)=0$ вне светового конуса, т.е. для пространствуподобных z^α. В этом случае аргумент функции Макдональда в (27) вещественный и положительный. При переходе к времениподобным z^α и чисто мнимому отрицательному $\mu=-i\kappa$ этот аргумент остается вещественным и положительным, откуда следует (61).

Удовлетворяя дисперсионным соотношениям (55), (56) по «дисперсионной» переменной μ, функция $\Delta_f(z,\mu)$, в отличие от $\Delta W(\mu^2)$, зависит еще от фиксированного пока параметра s — инвариантного интервала между двумя выбранными на траектории зеркала точками с собственными временами τ, τ', т.е. от $s=s(\tau,\tau')$. Интегрируя дисперсионные соотношения для Δ_f по τ, τ' с весом $(1/2)\dot{x}_\alpha(\tau)\dot{x}^\alpha(\tau')$ или $1/2$ и проведя процедуру вычитания, получаем дисперсионные соотношения для ΔW^B или ΔW^F, если, конечно, выполнены известные условия для перемены порядка интегрирования по x и τ,τ'.

Таким образом, дисперсионные соотношения для $\Delta W(\mu^2)$ являются следствием дисперсионных соотношений для $\Delta_f(z,\mu)$.

Из (56) следует, что если $\operatorname{Im}\Delta W(\mu^2)$ ограничена в нуле, то при $\mu\to+0$ величина $\operatorname{Re}\Delta W(\mu^2)$ должна обращаться в нуль. Если же $\operatorname{Im}\Delta W(\mu^2)$ при $\mu\to 0$ стремится к бесконечности логарифмически

$$\operatorname{Im}\Delta W(\mu^2)=a\ln\mu^{-2}+b(\mu^2) \tag{62}$$

($a>0$, $b(\mu^2)$ ограничена в нуле), то из (56) следует, что при $\mu\to 0$ величина $\operatorname{Re}\Delta W(\mu^2)$ стремится к положительной величине $\operatorname{Re}\Delta W(0)=\pi a$. Согласно (57) это означает, что на вещественной оси μ^2 функция $\operatorname{Re}\Delta W(\mu^2)$ обладает скачком в нуле равным πa.

5. О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА $\operatorname{Re}\Delta W$

Рассмотрим теперь другие граничные значения функции $F(z^2)$, аналитической в комплексной плоскости z^2 с разрезом по полуоси $z^2\le 0$ и совпадающей с $(i/2)\Delta^1(z,\mu)$ на полуоси $z^2>0$.

Предел $F(z^2-i\varepsilon)$ на вещественной оси снизу отличается от предела сверху (27) противоположным знаком вещественной части. Согласно этой функции, в 3 + 1-пространстве свободные поля переносили бы отрицательную энергию; поэтому это граничное условие здесь не рассматривается.

Другими, но уже зависящими от знака z^0, граничными значениями функции $F(z^2)$ могут быть пределы $F(z^2\pm i\varepsilon\operatorname{sign}z^0)$, $\varepsilon\to+0$. Это положительно- и отрицательно-частотная функции, точнее $\pm\Delta^\pm(z,\mu)$ [4]:

$$\pm\Delta^\pm(z,\mu)=\pm\varepsilon(z^0)\operatorname{Re}\Delta_f+i\operatorname{Im}\Delta_f. \tag{63}$$

Такие функции изменяют, естественно, только вещественную часть действия, полученного для Δ_f, так что

$$\operatorname{Re}\Delta W^B_\pm=\pm\frac{1}{2}\iint d\tau\,d\tau'\left(\dot{x}^\alpha\dot{x}'^\alpha-\varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}'^\beta\right)\operatorname{Re}\Delta^\pm(z,\mu)\Big|_0^F \tag{64}$$

отличаются от $\operatorname{Re}\Delta W_f^B$ и в пределе $\mu \to 0$ даются выражениями

$$\operatorname{Re}\Delta W_\pm^B = \mp\frac{1}{8\pi}\iint d\tau\, d\tau' \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}'^\beta \varepsilon(z^0)\delta(z^2). \tag{65}$$

Подынтегральную функцию можно разложить по τ' вблизи $\tau' = \tau$ и представить в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}'^\beta \varepsilon(z^0)\delta(z^2) = -\varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \ddot{x}^\beta \delta(\tau - \tau'). \tag{66}$$

Здесь использовалось равенство $|x|\delta(x^2) = \delta(x)$, см., например, [14].

Тогда, интегрируя по τ' и выражая собственное ускорение

$$a(\tau) = \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \ddot{x}^\beta = \frac{f''}{2(f')^{3/2}} = \frac{d\ln f'(u)}{2d\tau} = \frac{d\operatorname{Arth}\beta(\tau)}{d\tau} \tag{67}$$

в виде производной быстроты по собственному времени, получаем

$$\operatorname{Re}\Delta W_\pm^B = \pm\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \ddot{x}^\beta = \pm\frac{1}{8\pi}\operatorname{Arth}\beta_{21} = \pm\frac{\theta}{8\pi}. \tag{68}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re}\Delta W_\pm^F = \pm\frac{1}{2}\iint d\tau\, d\tau' \operatorname{Re}\Delta^\pm(z,\mu) = 0 \tag{69}$$

из-за нечетности $\operatorname{Re}\Delta^\pm$ по z.

Полученные выражения для $\operatorname{Re}\Delta W_\mp$ с точностью до множителя $(8\pi)^{-1}$ совпадают с нечетными по θ коэффициентами пропорциональных u^{-1} и v^{-1} членов асимптотических разложений функций $K(u)$ и $K(v)$ соответственно, см. (13), (14) и замечание ниже формулы (16). В то же время $\operatorname{Re}\Delta W_f$ с точностью до того же множителя $(8\pi)^{-1}$ совпадает с четным по θ коэффициентом пропорционального u^{-1} или v^{-1} члена асимптотического разложения функции $K(u)$ или $K(v)$. Обратим внимание на то, что все эти коэффициенты, как и сами функции $K(u)$, $K(v)$, формируются без всякого участия параметра L, устраняющего инфракрасную расходимость пространственно-временных интегралов (9) для среднего числа излучаемых частиц.

Таким образом, информация о взаимодействии, содержащаяся в функциях $K(u)$, $K(v)$, определяющих $\operatorname{Im}\Delta W$, благодаря причинности и граничным условиям передается в $\operatorname{Re}\Delta W$. При этом $\operatorname{Re}\Delta W_f$ содержит информацию о взаимодействии, распространяющемся внутри светового конуса, а $\operatorname{Re}\Delta W_\pm$ — о взаимодействии, распространяющемся вдоль светового конуса и, следовательно, локальном благодаря времениподобности траектории.

Как известно [4], полусумма запаздывающего и опережающего полей есть собственное поле источника, а их полуразность — уходящее на бесконечность поле излучения. Поскольку

$$\operatorname{Re}\Delta_f = \frac{1}{2}\left(\Delta^{ret} + \Delta^{adv}\right),$$

а

$$\operatorname{Re}\Delta^+ = \frac{1}{2}\left(\Delta^{ret} - \Delta^{adv}\right),$$

то $\mathrm{Re}\,\Delta W_f$ описывает сдвиг собственной энергии источника, а $\mathrm{Re}\,\Delta W_+$ — взаимодействие с полем излучения, т. е. с реальными квантами. Граничное условие, исключающее взаимодействие с виртуальными квантами или парами, представляется неестественным.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наиболее существенными результатами этой работы можно считать собственно-временные представления для изменений самодействия зеркала при его ускорении в двумерном вакууме скалярного и спинорного полей. Эти представления совпали с представлениями для изменений самодействия электрического и скалярного зарядов, ускоренных в четырехмерном пространстве-времени. Иными словами, те и другие оказались одними и теми же функционалами траектории источника.

Это совпадение, во-первых, подтверждает правильность данной в [3] интерпретации коэффициента Боголюбова $\beta^*_{\omega'\omega}$ как амплитуды источника виртуальной пары частиц, потенциально излучаемых направо и налево с частотами ω и ω', с временеподобным 2-импульсом пары (5), массой $m = 2\sqrt{\omega\omega'}$ и спином бозонной пары равным 1, а фермионной — равным 0.

Во-вторых, оно означает, что взаимодействие зеркала с самим собой осуществляется путем рождения и поглощения виртуальных пар, а не отдельных частиц, и передается от одной точки траектории к другой причинной функцией Грина волнового уравнения для четырехмерного, а не двумерного пространства-времени.

В формировании интеграла действия участвуют виртуальные пары с массой $m = 2\sqrt{\omega\omega'}$, принимающей любые положительные значения. Поэтому естественно ожидать, что эффективная функция распространения таких пар будет интегралом по массе m от функции распространения массивной частицы в двумерном пространстве-времени.

Вместе с тем можно показать, что причинные функции Грина, будучи функциями инвариантного интервала $s = \sqrt{-z^2}$ между двумя точками и массы μ, для пространств размерностей d и $d+2$ связаны между собой соотношениями

$$\Delta_f^{(d+2)}(z,\mu) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s^2}\Delta_f^{(d)}(z,\mu) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \Delta_f^{(d)}(z,m) \tag{70}$$

и выражаются через функцию Макдональда с индексом, определяемым размерностью пространства-времени:

$$\Delta_f^{(d)}(z,\mu) = \frac{i\mu^{2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}(i\mu s)^\nu} K_\nu(i\mu s), \quad \nu = \frac{d-2}{2}. \tag{71}$$

Второе равенство в (70) при $d = 2$ подтверждает появление причинной функции, характерной для четырехмерного пространства-времени, в качестве эффективной функции распространения виртуальных пар с разными массами m в двумерном пространстве-времени. Теперь малый параметр массы μ, введенный в разд. 2 для устранения инфракрасной расходимости, можно интерпретировать как нижнюю границу масс виртуальных пар, переносящих взаимодействие зеркала с самим собой.

Виртуальная пара не может уйти на бесконечность, так как одна из ее частиц неизбежно отражается от зеркала, после чего пара становится реальной и безмассовой. Излучение таких пар формирует $\operatorname{Im}\Delta W$. Благодаря безмассовости на траекториях с $\beta_{21} \neq 0$ становится возможным излучение как угодно большого числа сколь угодно мягких квантов — возникает инфракрасная расходимость $\operatorname{Im}\Delta W_f$. Выбирая для μ ненулевое, но достаточно малое значение, мы устраняем инфракрасную расходимость в $\operatorname{Im}\Delta W_f$ и убеждаемся в том, что $\operatorname{Re}\Delta W_f$ не зависит от μ при $\mu \ll |\kappa|$. Это означает, что $\operatorname{Re}\Delta W_f$ формируется в основном за счет вклада виртуальных пар с массой порядка $|\kappa|$.

В общем случае, когда среднее число рождающихся пар не мало по сравнению с 1, величина $2\operatorname{Im}\Delta W$ уже не равна среднему числу пар $\operatorname{tr}(\beta^+\beta)$. Из-за интерференции двух и более рождающихся пар она равна

$$2\operatorname{Im}\Delta W = \pm\operatorname{tr}\,\ln(1 \pm \beta^+\beta)\Big|_0^F = \pm\operatorname{tr}\,\ln(\alpha^+\alpha)\Big|_0^F. \tag{72}$$

Последняя формула побудила Де Витта [15] считать естественным для W выражение

$$W = \pm i\,\operatorname{tr}\,\ln\alpha. \tag{73}$$

В этих формулах принята матричная запись коэффициентов Боголюбова α, β. Кроме того, для тождественных частицы и античастицы tr нужно заменить на (1/2)tr [3].

Автору не известны какие-либо конкретные результаты для $\operatorname{Re}\Delta W$, вытекающие из (73).

Обсуждаемая симметрия была бы полной, если бы в хевисайдовых единицах выполнялось $e^2 = \hbar c$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96463, 96-02-17314а).

Литература

1. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **108**, 1125 (1995).
2. В. И. Ритус, ЖЭТФ **110**, 526 (1996).
3. В. И. Ритус, ЖЭТФ **114**, 46 (1998); Поправка, ЖЭТФ **115**, 384 (1999).
4. В. Е. Тирринг, *Принципы квантовой электродинамики*, Высшая школа, Москва (1964).
5. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 2, Гостехиздат, Москва (1951).
6. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
7. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **56**, 2035 (1969).
8. В. И. Ритус, ЖЭТФ **80**, 1288 (1981).
9. В. И. Ритус, ЖЭТФ **82**, 1375 (1982).
10. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1965).
11. L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York (1981).
12. В. И. Ритус, ЖЭТФ **75**, 1560 (1978).
13. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).
14. Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля*, Гостехиздат, Москва (1949).
15. B. S. De Witt, Phys. Rep. C **19**, 295 (1975).