

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХФАЗНЫХ КОМПОЗИТАХ

А. А. Снарский^{аb*}, К. В. Слипченко^а, В. А. Севрюков^б

^а Национальный технический университет Украины (Киевский политехнический институт)
252056, Киев, Украина

^б Научно-производственное предприятие «Наука-Сервис»
103473, Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 марта 1999 г.

Рассмотрено критическое поведение эффективной проводимости сильно нелинейной двухфазной среды с конечным отношением проводимости фаз. Найдены критические индексы выше и ниже порога протекания и на самом пороге протекания, установлены критерий применимости перколяционно-подобного описания. На пороге протекания найдены условия линеаризации среды в целом. Исследована гомогенизация системы вблизи критических полей.

PACS: 05.40.+j; 84.20.Pc

1. ВВЕДЕНИЕ

Физика нелинейных композитов вблизи порога протекания постоянно привлекает большое внимание (см., например, материалы ЕТОРІМ [1]). Особая роль нелинейности в сильно неоднородных средах связана с тем, что в таких средах распределение полей и токов также сильно неоднородно, что приводит к отклонению от закона Ома.

Условно типы нелинейности можно разделить на два — слабую и сильную. В первом случае, при слабых полях и токах, вольт-амперная характеристика (ВАХ) фазы со слабой нелинейностью близка к линейному закону Ома: $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E} + \chi |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$, где \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{E} — напряженность поля, σ_0 — «обычная» омическая проводимость, χ — константа, характеризующая отклонение от линейности, и предполагается, что $\chi |\mathbf{E}|^2 \ll \sigma_0$. Изучению эффективных свойств двухфазных композитов вблизи порога протекания при слабой нелинейности фаз посвящено большое число работ (см., например, списки литературы в обзоре [2] и в [3]).

В отличие от ВАХ среды со слабой нелинейностью, ВАХ среды с сильной нелинейностью и при как угодно малых полях не является близкой к линейной:

$$\mathbf{j} = \sigma |\mathbf{E}|^\beta \mathbf{E}. \quad (1)$$

Для простоты мы оставим в (1) за коэффициентом, характеризующим свойства среды, то же обозначение σ , что и для «обычной» проводимости, однако только при $\beta = 1$ этот коэффициент, который далее будем называть проводимостью, переходит в обычную омическую проводимость.

*E-mail: asnar@phys.carrier.kiev.ua

При изучении эффективных свойств случайно-неоднородных сред в первую очередь необходимо: 1) найти ВАХ среды в целом, 2) определить зависимость параметров ВАХ от концентрации фаз.

Далее мы будем рассматривать стандартную перколяционную задачу: среда состоит из двух фаз, сильно различающихся по своим свойствам, в нашем случае — по проводимости, причем концентрация p хорошо проводящей фазы (условно будем называть ее «черной») близка к порогу протекания p_c , $\tau = (p - p_c)/p_c \ll 1$.

Впервые эффективные свойства перколяционных сред с законом (1) были изучены в [4]. Выше порога протекания ($p > p_c$) был рассмотрен случай, когда вторая фаза является изолятором, т. е. проводимость осуществляется только по «черной» фазе. При этом средний по объему ток, как оказалось, связан со средней по объему напряженностью поля $\langle E \rangle$ следующим образом:

$$\langle j \rangle = \sigma_1 \tau^{t(\beta)} |\langle E \rangle|^\beta \langle E \rangle, \quad p > p_c. \quad (2)$$

Таким образом, поскольку все конечные сопротивления среды имеют одинаковые ВАХ (1), то, естественно, и в целом среда имеет ВАХ, характеризующуюся тем же параметром β (2). Критический индекс $t(\beta)$, характеризующий изменение тока (при постоянном поле) при приближении к порогу протекания, согласно [4] равен $t(\beta) = (d - 2 - \beta)\nu + (1 + \beta)\zeta_R$, где ν — критический индекс корреляционной длины, d — размерность задачи, а ζ_R для всех d близко к единице.

В [5, 6] показано, что ζ_R практически не зависит от β и, согласно NLB-модели (nodes-links-blobs model) [7], $\zeta_R = 1$. В моделях перколяционной структуры [8, 9] принято $\zeta_R = \alpha_1 = t - \nu(d - 2)$, где t — критический индекс проводимости выше порога протекания в линейном случае. На основе этих моделей было получено аналитическое выражение $t(\beta) = t + [t - \nu(d - 1)]\beta$ [10], которое хорошо согласуется с численными и модельными представлениями [4–6].

В [11] был рассмотрен противоположный случай — первая фаза («черные» сопротивления) является идеальным проводником, падением напряжения на котором можно пренебречь. Среда при этом находится ниже порога протекания и все падение напряжения приходится на вторую фазу («белые» сопротивления) с ВАХ типа (1). В этом случае вместо (2) имеет место зависимость

$$\langle j \rangle = \sigma_2 |\tau|^{-q(\beta)} |\langle E \rangle|^\beta \langle E \rangle, \quad p < p_c, \quad (3)$$

где согласно [11] $q(\beta) = \zeta_G - (d - 2 - \beta)\nu$, где ζ_G — величина, характеризующая так называемые связи плохо проводящей фазы (SDCB, single disconnected bounds, см. [11–13]). Если принять $\zeta_G = \alpha_2 = q + \nu(d - 2)$ [8, 9, 11, 13], то для $q(\beta)$ получаем $q(\beta) = q + \nu\beta$ [10], где q — критический индекс проводимости ниже порога протекания в линейном случае. Одновременный учет двух фаз ($\sigma_1 \neq \infty$, $\sigma_2 \neq 0$) проведен в [10], где в частности показано, что на пороге протекания (в области размазки)

$$\langle j \rangle = \left(\sigma_1^{q(\beta)} \sigma_2^{t(\beta)} \right)^{1/[t(\beta) + q(\beta)]} |\langle E \rangle|^\beta \langle E \rangle. \quad (4)$$

Скейлинговые выражения для двухфазной среды обсуждаются в [14], где также приведены результаты численного моделирования. Существует также много работ, посвященных анализу сильно нелинейных сред различными вариантами методов эффективной среды (см., например, [15–19]), нелинейным фрактальным сеткам сопротивлений (например, [5, 20]), методам разложения в ряд (series expansion) (например, [6, 21]).

Во всех перечисленных выше работах было принято, что либо обе фазы имеют одинаковые ВАХ, т. е. что $\beta_1 = \beta_2$, либо одна из фаз является идеальным проводником ($\sigma_1 = \infty$) или изолятором ($\sigma_2 = 0$). Ясно, однако, что для нелинейных двухфазных сред с конечными отношениями фаз равенство показателей $\beta_1 = \beta_2$ возможно как исключительный случай. Так, например, для среды, состоящей из смеси нелинейной и линейной фаз, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$. Ниже будет рассмотрен общий случай, когда $\beta_1 \neq \beta_2$, т. е. когда обе фазы являются сильно нелинейными, но с различными ВАХ. В частности это может означать, что одна из фаз сильно нелинейная, а вторая — линейная с конечной проводимостью.

В разд. 2 рассмотрен для перколяционной области специальный случай нелинейности фаз, позволяющий, с одной стороны, ввести основные понятия — критическое локальное поле, ограничения на средние поля, область размазки, а с другой стороны, — избежать громоздких выражений. В разд. 3 рассмотрен двумерный случай с «взаимной» нелинейностью фаз (см. (34)), для которого методом Дыхне можно получить точное решение на пороге протекания. Изучен как континуальный, так и сеточный варианты задачи. В разд. 4 проведено обобщение перколяционного подхода на d -мерный случай и произвольную нелинейность фаз. В разд. 5 рассмотрены случаи полей близких к локальным критическим, когда можно применить метод самосогласованного поля (типа Бруггемана—Ландауэра), и полей много больше критических, когда можно опять вернуться к перколяционному подходу.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДВУХФАЗНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Для начала, чтобы избежать громоздких выражений, рассмотрим следующий частный случай с «противоположными» нелинейными характеристиками фаз (рис. 1):

$$\mathbf{E} = \rho_1 |\mathbf{j}|^2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sigma_1 |\mathbf{E}|^{-2/3} \mathbf{E}, \tag{5}$$

$$\mathbf{j} = \sigma_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \rho_2 |\mathbf{j}|^{-2/3} \mathbf{j}, \tag{6}$$

где $\sigma_1 = \rho_1^{-1/3}$, $\rho_2 = \sigma_2^{-1/3}$ — константы, характеризующие проводимость фаз.

Для определения эффективных свойств среды воспользуемся второй ступенью иерархической модели перколяционной структуры (см., например, [9, 22–25]), которая как выше, так и ниже p_c учитывает протекание по обоим фазам (рис. 2).

Сопrotивления мостика и прослойки (как выше, так и ниже порога протекания они одинаковы) можно записать в виде ВАХ:

$$U_1 = \frac{N_1}{a_0^3 \sigma_1^3} J_1^3, \quad U_2 = \frac{a_0}{\sigma_2 N_2} J_2^{1/3}, \tag{7}$$

где $U_{1,2}$ — падение напряжения на мостике и прослойке, $J_{1,2}$ — токи, a_0 — минимальный размер в системе (размер «единичного» сопротивления). В (7) учтено, что токи через единичные сопротивления в мостике одинаковы и равны полному току через мостик и падения напряжения на сопротивлениях прослойки одинаковы и равны полному падению на прослойке:

$$N_1 = |\tau|^{-\alpha_1}, \quad N_2 = |\tau|^{-\alpha_2}. \tag{8}$$

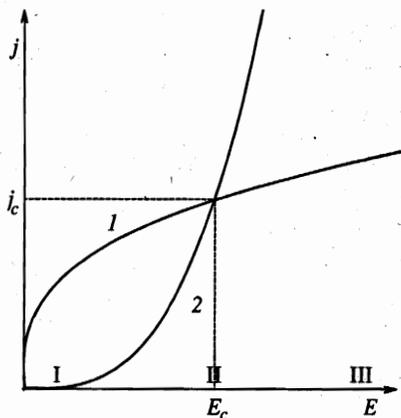


Рис. 1

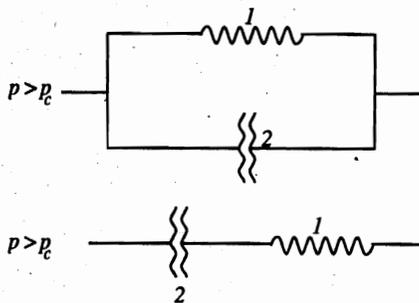


Рис. 2

Рис. 1. Вольт-амперная характеристика первой (1) и второй (2) фаз

Рис. 2. Иерархическая модель перколяционной структуры: 1 — мостик — совокупность N_1 «единично соединенных связей» из хорошо проводящей («черной») фазы (SCB, single connected bounds), $N_1 = |\tau|^{-\alpha_1}$, где $\alpha_1 = \zeta_R = t - \nu(d-2)$; 2 — прослойка — совокупность N_2 параллельных связей из плохо проводящей («белой») фазы (SDCB, single disconnected bounds), $N_2 = |\tau|^{-\alpha_2}$, $\alpha_2 = \zeta_G = q + \nu(d-2)$

Выше порога протекания основной ток проходит в данном случае по главному элементу перколяционной структуры — мостику. Прослойка дает поправку, которую можно найти, учитывая, что в данном случае $U_1 = U_2 = U_\xi$, $J_1 + J_2 = J_\xi$ (рис. 2), где U_ξ — падение напряжения на размерах корреляционной длины ξ , J_ξ — ток через поперечное сечение порядка ξ^2 :

$$J_\xi = \left(\frac{a_0^5 \sigma_1}{N_1} \right)^{1/3} U_\xi^{1/3} \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{N_2 N_1^{1/3}}{a_0^{8/3}} U_\xi^{8/3} \right), \quad p > p_c. \tag{9}$$

Аналогично находим поправку к проводимости системы ниже порога протекания, которую дает мостик:

$$U_\xi = \left(\frac{a_0}{\sigma_2 N_2} \right)^{1/3} J_\xi^{1/3} \left[1 + \left(\frac{\sigma_2 N_2}{a_0} \right)^{1/3} \frac{N_1}{a_0^5 \sigma_1^3} J_\xi^{8/3} \right], \quad p < p_c. \tag{10}$$

Необходимо отметить, что (9) и (10) имеют место только при выполнении определенных ограничений. Сильная неоднородность означает, что локальная проводимость «черной» фазы много больше проводимости «белой», в нашем случае это возможно, только когда локальные поля E_{loc} и токи j_{loc} много меньше своих критических значений E_c и j_c , определяемых пересечением локальных ВАХ (рис. 1):

$$E_{loc} \ll E_c, \quad j_{loc} \ll j_c, \tag{11}$$

где из (5) и (6)

$$E_c = (\sigma_1/\sigma_2)^{3/8}, \quad j_c = (\sigma_1^9/\sigma_2^{1/8})^{3/8}. \tag{12}$$

Максимальная локальная напряженность электрического поля в перколяционной структуре имеет место там, где элементы «черной» фазы разделены самым тонким слоем «белой» фазы, т. е. на прослойке, $E_{max} = U_2/a_0$, а наибольший локальный ток — на мостике, $j_{max} = J_1/a_0^2$ (a_0^2 — сечение мостика). Переходя к средним по объему полям и токам $|\langle \mathbf{E} \rangle| = U_\xi/\xi$ и $|\langle \mathbf{j} \rangle| = J_\xi/\xi$ и учитывая, что практически все падение напряжения U_ξ на объеме среды с характерным размером ξ приходится на падение напряжения на прослойке, т. е. что $U_\xi \approx U_2$, и что практически весь ток, проходящий через корреляционный объем J_ξ , сосредоточивается в мостике, $J_\xi \approx J_1$, для E_{max} и j_{max} получаем

$$E_{max} = |\langle \mathbf{E} \rangle| |\tau|^{-\nu}, \quad j_{max} = |\langle \mathbf{j} \rangle| |\tau|^{-2\nu}. \quad (13)$$

Используя (13) и (12), ограничения (11) можно переписать в виде

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll (\sigma_1/\sigma_2)^{3/8} |\tau|^\nu, \quad |\langle \mathbf{j} \rangle| \ll (\sigma_1^9/\sigma_2)^{1/8} |\tau|^{2\nu}. \quad (14)$$

Заметим, что чем система ближе к p_c , тем τ меньше и тем более жестки ограничения (14).

Кроме ограничений, связанных с сильной неоднородностью двухфазной среды (14), существуют еще ограничения, связанные непосредственно с перколяционной структурой. Согласно иерархической модели, выше порога протекания главным элементом корреляционного объема является мостик, а прослойка дает поправки в первом приближении: $Q_1 \gg Q_2$, где Q_i — диссипация энергии в мостике и прослойке. Так как $U_1 = U_2$ при $p > p_c$ (рис. 2), это условие принимает вид

$$J_1 \gg J_2, \quad (15)$$

что с помощью (7) можно записать в виде

$$U_2 \ll a_0 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{3/8} |\tau|^{(3\alpha_2 + \alpha_1)/8}, \quad p > p_c. \quad (16)$$

Согласно иерархической модели, $\alpha_1 = t - \nu(d - 2)$, $\alpha_2 = q + \nu(d - 2)$, поэтому показатель степени τ в трехмерном случае ($d = 3$) равен $(3q - t + 4\nu)/3$. Заметим, что выражение (16) есть не что иное как требование малости по сравнению с единицей второго слагаемого в скобках в (9).

Аналогичное ограничение существует и для $p < p_c$, в этом случае главным элементом является прослойка и условие $Q_2 \gg Q_1$ с учетом $J_1 = J_2$ (рис. 2) дает

$$U_2 \gg U_1, \quad (17)$$

что с помощью (7) можно записать в виде

$$J_1 \ll a_0^2 \left(\frac{\sigma_1^9}{\sigma_2} \right)^{1/8} |\tau|^{(3\alpha_1 + \alpha_2)/8}, \quad p < p_c, \quad (18)$$

где в трехмерном случае $(3\alpha_1 + \alpha_2)/8 = (3t + q - 2\nu)/8$. Это ограничение означает, что второе слагаемое в (10) много меньше единицы.

Переходя к средним по объему плотности тока $|\langle \mathbf{j} \rangle| = J_\xi/\xi^2$ и напряженности поля $|\langle \mathbf{E} \rangle| = U_\xi/\xi$, а также учитывая, что $\xi = a_0|\tau|^{-\nu}$, из (9) и (10) получаем

$$|\langle j \rangle| = \sigma_1 \tau^{\bar{t}} |\langle E \rangle|^{1/3} \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \left[1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tau^{-\bar{\varphi}} |\langle E \rangle|^{8/3} \right], \quad p > p_c, \quad (19)$$

$$|\langle j \rangle| = \sigma_2 \tau^{-\bar{q}} |\langle E \rangle|^3 \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \left[1 - 3 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-\bar{\varphi}} |\langle E \rangle|^{8/3} \right)^3 \right], \quad p < p_c, \quad (20)$$

где

$$\bar{t} = \frac{5\nu + \alpha_1}{3}, \quad \bar{q} = \nu + \alpha_2, \quad \bar{\varphi} = \bar{t} + \bar{q} = \frac{8\nu + \alpha_1 + 3\alpha_2}{3}. \quad (21)$$

Переходя от α_1 и α_2 к t , q и ν , для рассматриваемого трехмерного случая ($d = 3$) получаем

$$\bar{t} = \frac{4\nu + t}{3}, \quad \bar{q} = 2\nu + q, \quad \bar{\varphi} = \frac{t + 3q + 10\nu}{3}. \quad (22)$$

Подставляя сюда $\nu = 0.88$, $t = 2.0$, $q = 0.73$ [7], находим численные значения для критических индексов: $\bar{t} = 1.84$, $\bar{q} = 2.49$, $\bar{\varphi} = 4.33$.

Ограничения (16) и (18) можно переписать через средние по объему поля и токи, они сразу же следуют из требования малости вторых слагаемых в (19) и (20):

$$|\langle E \rangle| \ll (\sigma_1/\sigma_2)^{3/8} \tau^{(t+3q+10\nu)/8}, \quad p > p_c, \quad (23)$$

$$|\langle j \rangle| \ll (\sigma_1^9/\sigma_2)^{1/8} \tau^{(3t+q+14\nu)/8}, \quad p < p_c. \quad (24)$$

На первый взгляд условия для $p > p_c$ и $p < p_c$ различны, однако если, например, в условии (24) заменить $|\langle j \rangle|$ на $|\langle E \rangle|$ (из (20) $|\langle j \rangle| \approx \sigma_2 |\tau|^{-\bar{q}} |\langle E \rangle|^3$), то это условие перейдет в условие (23). Таким образом, на самом деле требования малости вторых слагаемых в (19) и (20) приводят к одному условию, которое может быть записано в различном виде через среднее поле (23) или средний ток (24). Наряду с условием $|\tau| \ll 1$, эти условия означают, что система находится в критической области, но вне области размазки [26] (аналога области размытия фазового перехода в теории фазовых переходов второго рода [27]).

При дальнейшем уменьшении τ условия (23), (24) нарушаются, это происходит при $|\tau| \approx \Delta$, где Δ — величина области размазки. Ее значение можно определить, либо считая, что вторые слагаемые в (19) и (20) становятся приблизительно равными единице, либо считая равными друг другу слагаемые в (19) и (20) (так же поступают в линейном случае):

$$\sigma_1 \Delta^{\bar{t}} |\langle E \rangle|^{1/3} \approx \sigma_2 \Delta^{-\bar{q}} |\langle E \rangle|^3. \quad (25)$$

Во всех этих случаях для Δ получаем

$$\Delta = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{3/(t+3q+10\nu)} |\langle E \rangle|^{8/(t+3q+10\nu)}. \quad (26)$$

Так как в критической области $|\tau| \ll 1$, то, конечно, необходимо выполнение условия $\Delta \ll 1$. Из (26) сразу же следует

$$|\langle E \rangle| \ll (\sigma_1/\sigma_2)^{3/8}, \quad (27)$$

и так как $|\tau|^\nu < 1$, ясно, что если выполняется (14), то условие (27) заведомо имеет место.

Таким образом, область применимости иерархической модели в задаче с сильной нелинейностью ограничена условиями (14) и (23), (24).

Подставляя в (19) или (20) вместо τ выражения (26) для Δ , с точностью до первого слагаемого получаем ВАХ системы в области размазки:

$$\langle j \rangle = \left(\sigma_1^{3(q+2\nu)} \sigma_2^{t+4\nu} \right)^{1/(t+3q+10\nu)} |\langle E \rangle|^{(3t+q+14\nu)/(t+3q+10\nu)} \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \quad (28)$$

Подстановка численных значений критических индексов дает $(3t+q+14\nu)/(t+3q+10\nu) \approx 1.47$. Таким образом, в области размазки крутизна ВАХ имеет промежуточное значение между соответствующими значениями выше и ниже p_c .

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ

Полученные выражения для ВАХ выше, ниже и в области размазки несложно переписать для двумерного случая:

$$\langle j \rangle = \sigma_1 \tau^{(\alpha_1+2\nu)/3} |\langle E \rangle|^{1/3} \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \equiv \sigma_1 \tau^{(t+2\nu)/3} |\langle E \rangle|^{1/3} \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|}, \quad p > p_c, \quad (29)$$

$$\langle j \rangle = \sigma_2 \tau^{-(\alpha_2+2\nu)} |\langle E \rangle|^3 \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \equiv \sigma_2 |\tau|^{-(q+2\nu)} |\langle E \rangle|^3 \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|}, \quad p < p_c. \quad (30)$$

Для простоты мы ограничились первым слагаемым, и теперь, конечно, критические индексы относятся к двумерному случаю: $t = q = 1.33$, $\nu = 4/3$ [7].

Для области размазки из (29) и (30) следует

$$\Delta = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{8/(\alpha_1+3\alpha_2+8\nu)} |\langle E \rangle|^{8/(\alpha_1+3\alpha_2+8\nu)} \equiv \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{3/4(t+2\nu)} |\langle E \rangle|^{2/(t+2\nu)}. \quad (31)$$

Удивительно, что ВАХ такой двумерной системы с нелинейными характеристиками фаз (5) и (6) в области размазки является линейной. Действительно, подставляя (31) в (29) или (30), сразу же получаем

$$\langle j \rangle = (\sigma_1^3 \sigma_2)^{1/4} \langle E \rangle. \quad (32)$$

Условие применимости соотношения (32) то же, что для трехмерного случая — (27).

Воспользовавшись методом, предложенным в работе [28], можно строго доказать, что на пороге протекания ($p = p_c$) система с локальными ВАХ (5) и (6) линейна. Для этого рассмотрим двухфазную среду Дыхне [28], фазы которой находятся в геометрически эквивалентном среднем положении — взаимная замена фаз не изменяет свойств среды в целом, в частности не изменяется ВАХ. Примером таких сред могут служить как случайно-неоднородная среда на пороге протекания ($p = p_c$), так и среда со «специальным» расположением фаз, например шахматная доска, черные и белые квадраты которой соответствуют «черной» и «белой» фазам. Как показано в [28], эффективная

проводимость таких сред в линейном случае не зависит от конкретной структуры. Согласно [28], при помощи преобразований

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \Lambda [\mathbf{n} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Lambda^{-1} [\mathbf{n} \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})], \quad (33)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к двумерной среде, перейдем от основной среды с локальными законами

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho_1 |\mathbf{j}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in O_1, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_2 |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in O_2 \quad (34)$$

к взаимной:

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \Lambda^4 \rho_1 |\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in O_1, \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \Lambda^{-4} \sigma_2 |\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})|^2 \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in O_2. \quad (35)$$

Здесь O_1 и \bar{O}_1 — области расположения первой («черной») фазы, а O_2 , \bar{O}_2 — второй («белой») в основной и взаимной среде соответственно.

Требования взаимности («белая» фаза в начальной среде переходит в «черную» с тильдой, а «черная» в начальной — в «белую» с тильдой) фиксируют значения Λ :

$$\Lambda^4 = \sigma_2 / \rho_1. \quad (36)$$

При помощи усредненных преобразований $\langle \mathbf{j} \rangle = \Lambda [\mathbf{n} \langle \bar{\mathbf{E}} \rangle]$, $\langle \mathbf{E} \rangle = \Lambda^{-1} [\mathbf{n} \langle \bar{\mathbf{j}} \rangle]$ с Λ из (36) перейдем от удельной по объему ВАХ начальной среды,

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e (|\langle \mathbf{E} \rangle|^2, |\langle \mathbf{j} \rangle|^2) \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (37)$$

к взаимной:

$$\langle \bar{\mathbf{j}} \rangle = \frac{\Lambda^2}{\sigma_e (|\langle \bar{\mathbf{j}} \rangle|^2 / \Lambda^2, \Lambda^2 |\langle \bar{\mathbf{E}} \rangle|^2)} \langle \bar{\mathbf{E}} \rangle. \quad (38)$$

Так как начальная среда и среда с тильдой имеют одинаковые эффективные свойства, должно выполняться равенство

$$\sigma_e (|\langle \mathbf{E} \rangle|^2, |\langle \mathbf{j} \rangle|^2) = \frac{\Lambda^2}{\sigma_e (|\langle \bar{\mathbf{j}} \rangle|^2 / \Lambda^2, \Lambda^2 |\langle \bar{\mathbf{E}} \rangle|^2)}. \quad (39)$$

Запишем функциональное уравнение (39) в более удобных обозначениях $x = |\langle \mathbf{E} \rangle|^2$, $y = |\langle \mathbf{j} \rangle|^2$:

$$f(y/\Lambda^2, \Lambda^2 x) f(x, y) = \Lambda^2. \quad (40)$$

Теперь можно найти его разные решения, например,

$$f(x, y) = x/y, \quad f(x, y) = \Lambda e^{\beta(\Lambda^2 x - y)}, \dots \quad (41)$$

Их подстановка в (37) приводит к линейному закону Ома (32).

Полученный вывод — линеаризация двумерной двухфазной сильно нелинейной локально среды на пороге протекания — справедлив и в сеточном варианте среды Дыхне

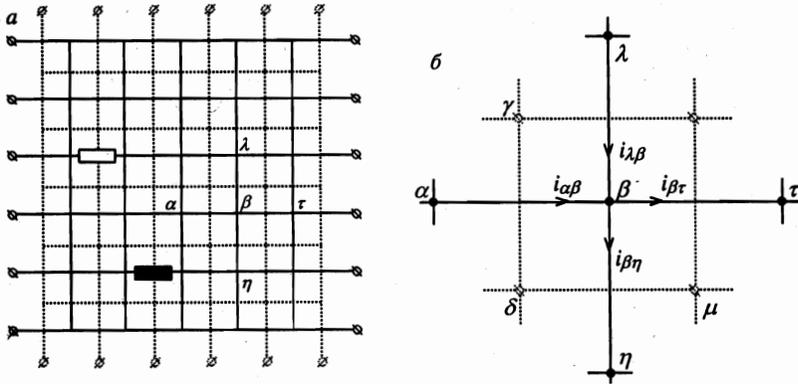


Рис. 3. Сеточный вариант среды Дыхне (а). Связи, обозначенные сплошными линиями — сопротивления начальной среды, пунктирными — взаимной. Каждой связи соответствует сопротивление согласно закону (5) или (6). При этом сопротивления одного типа в исходной сетке пересекаются с сопротивлениями другого типа во взаимной сетке и наоборот. Если взаимная сетка совпадает с исходной, то она является самодуальной. Белый и черный прямоугольники — два сопротивления, соответствующие друг другу в самодуальной сетке. На рис. б — часть сетки, изображенной на рис. а

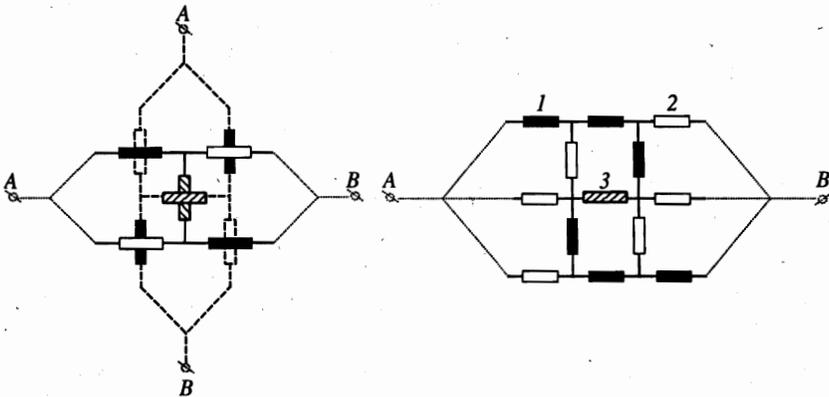


Рис. 4. Самодуальные сетки 2×2 и 3×3 : 1 — сопротивления с ВАХ $u = r_1 i^3$, обозначены черными прямоугольниками, 2 — сопротивления с ВАХ $i = g_2 u^3$, 3 — сопротивление $r_3 = \Lambda = (r_1/g_2)^{1/4}$. В линейном случае обе сетки дают результат Дыхне [28], в рассматриваемом случае численный расчет дает линейную ВАХ $I = \Lambda U$ между контактами А и В

(см. рис. 3 и подписи к нему). Сеточный аналог преобразования (33) может быть записан так (рис. 3):

$$i_{\alpha\beta} = \Lambda \tilde{u}_{\gamma\delta}, \quad u_{\alpha\beta} = \Lambda^{-1} \tilde{i}_{\gamma\delta}, \quad (42)$$

где $i_{\alpha\beta}$, $\tilde{i}_{\gamma\delta}$ — токи в связях $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ начальной и взаимной сред, а $u_{\alpha\beta}$ и $\tilde{u}_{\gamma\delta}$ — падение напряжения на этих связях.

При наличии указанной симметрии (подпись к рис. 3) сопротивление сетки определяется однозначно и не зависит от размера сетки. На рис. 4 приведены два примера

сетки, обладающей указанной симметрией. При этом, каков бы ни был размер сетки, найдется хотя бы одно сопротивление, которое должно переходить в себя — сопротивление Z на рис. 4. Напомним, что в средах Дыхне всегда присутствуют места (точки, если речь идет о континуальной задаче, и сопротивления, если — о сеточной), в которых сходятся обе фазы. В «шахматной» реализации среды — это углы квадратов. Подробные исследования поведения плотности тока и напряженности поля вблизи этих углов проведены в [29, 30].

Для численной проверки соотношения (32) были выбраны три сетки — минимальная и следующие за ней (рис. 4). Численный счет с большой точностью показывает линейность всей среды, т.е. дает линейную ВАХ между контактами A и B (рис. 4). Заметим, что, так как цепи, состоящие из нелинейных резисторов, имеющих строго монотонно возрастающие ВАХ, могут находиться не более чем в одном режиме [31], полученные решения уравнений Кирхгофа для изображенных на рис. 4 сеток единственные.

Все вышеизложенное имеет место и для более общей (но, конечно, специальной) ВАХ фаз:

$$\mathbf{j} = \sigma_2 |\mathbf{E}|^{\gamma-1} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \rho_1 |\mathbf{j}|^{\gamma-1} \mathbf{j}. \quad (43)$$

Более того, можно показать, что связь между средним полем и током в двумерной среде будет линейной и $\langle \mathbf{j} \rangle = \Lambda(\mathbf{E})$, если ВАХ фаз удовлетворяют следующей симметрии: ВАХ одной фазы можно получить зеркальным отражением ВАХ другой относительно наклонной прямой $|\mathbf{j}| = \Lambda|\mathbf{E}|$ при соответствующем масштабе осей. При этом накладывается условие: обе ВАХ являются однозначными монотонно возрастающими функциями, а расположение фаз геометрически эквивалентно.

4. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрим теперь d -мерный случай, когда локальные ВАХ в первой и второй фазах соответственно имеют вид

$$\mathbf{E} = \rho_1 |\mathbf{j}|^{\gamma-1} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sigma_1 |\mathbf{E}|^{(1-\gamma)/\gamma} \mathbf{E}, \quad (44)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_2 |\mathbf{E}|^{\beta-1} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \rho_2 |\mathbf{j}|^{(1-\beta)/\beta} \mathbf{j}, \quad (45)$$

где $\rho_1 = 1/\sigma_1^\gamma$, $\rho_2 = 1/\sigma_2^{1/\beta}$. Здесь γ и β — параметры, задающие сильную нелинейность.

В частности, при $\gamma = 1/\beta$ и $\sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ приходим к ранее рассмотренному случаю [10], когда обе фазы имеют одинаковые ВАХ. Вычисления проводятся аналогично вычислениям в разд. 2, поэтому приведем сразу конечный результат.

Выше и ниже порога протекания

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_1 \tau^{\tilde{t}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{1/\gamma} \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left[1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tau^{-\tilde{q}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\beta-1/\gamma} \right], \quad p > p_c, \quad (46)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_2 \tau^{-\tilde{q}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^\beta \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left[1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tau^{-\tilde{q}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\beta-1/\gamma} \right)^\gamma \right], \quad p < p_c, \quad (47)$$

где критические индексы проводимости \tilde{t} и \tilde{q} имеют вид

$$\tilde{t} = \frac{\alpha_1 - \nu + \nu\gamma(d-1)}{\gamma} = \frac{t + \nu(d-1)(\gamma-1)}{\gamma}, \quad (48)$$

$$\bar{q} = \alpha_2 + \nu\beta - \nu(d - 1) = q + \nu(\beta - 1) \tag{49}$$

и так называемый скейлинговый критический индекс $\bar{\varphi}$ равен

$$\bar{\varphi} = \bar{t} + \bar{q} = \frac{\alpha_1 + \gamma\alpha_2 + \nu(\beta\gamma - 1)}{\gamma} = \frac{t + \gamma q + \nu[(\gamma - 1)(d - 1) + \gamma(\beta - 1)]}{\gamma} \tag{50}$$

Заметим, что второе слагаемое в квадратных скобках в (46) совпадает с выражением в круглых скобках в (47), что означает наличие единого скейлингового индекса. Из этого, в частности, следует единая для задачи область размазки Δ , величина которой определяется из условия того, что второе слагаемое в (46) или (47) по порядку величины приближается к единице:

$$\Delta = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\langle E \rangle|^{\beta - 1/\gamma} \right)^{1/\bar{\varphi}} \tag{51}$$

Подстановка (51) в $\langle j \rangle = \sigma_1 \tau^{\bar{t}} |\langle E \rangle|^{1/\gamma} \langle E \rangle / |\langle E \rangle|$ или $\langle j \rangle = \sigma_2 \tau^{-\bar{q}} |\langle E \rangle|^\beta \langle E \rangle / |\langle E \rangle|$ дает ВАХ в области размазки:

$$\langle j \rangle = \left(\sigma_1^{\bar{q}} \sigma_2^{\bar{t}} \right)^{1/\bar{\varphi}} |\langle E \rangle|^{(1/\bar{\varphi})(\beta\bar{t} + \bar{q}/\gamma)} \frac{\langle E \rangle}{|\langle E \rangle|} \tag{52}$$

Чтобы не загромождать изложение, критерии применимости перколяционного подхода для общего случая (они аналогичны критериям для специального случая (11), (14), (16), (18)...) даны в Приложении.

Отметим, что линейаризация системы в двумерном случае на пороге протекания (32) скорее исключение, чем правило, и имеет место для специально подобранных локальных законов типа (5), (6) или (43). В пространстве параметров (γ, β) область линейаризации системы как в двумерном, так и в трехмерном случаях одномерна. Вид этой области легко получить, приравняв единице показатель $y \langle E \rangle$ в (52) (см. рис. 5).

В отличие от линейного случая теперь область размазки (51) зависит от приложенного к образцу поля, поэтому при изменении поля $\langle E \rangle$ возможен переход системы из одной области в другую, например, от (46) или (47) к (52). При этом переходе изменяется вид ВАХ. Заметим, что даже если одна из фаз линейна, например $\gamma = 1$, ВАХ в области размазки не совпадает ни с одной из ВАХ составляющих среду фаз.

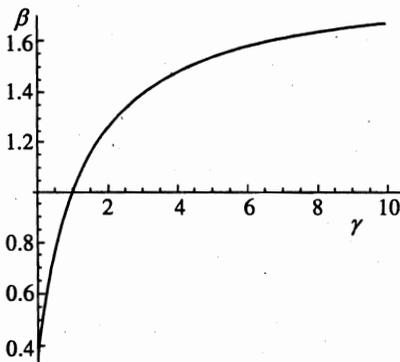


Рис. 5. Область значений γ и β , при которых вольт-амперная характеристика всей среды в области размазки в трехмерном случае становится линейной. В двумерном случае эта область — прямая $\gamma = \beta$

5. ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОБЛАСТЕЙ $E \ll E_c, j \ll j_c$

Все вышеизложенное имеет место при выполнении ограничений (см. Приложение), т. е. при полях и токах малых по сравнению с E_c и j_c соответственно. Рассмотрим, как ведет себя система вблизи $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$.

Легко показать, что в самой точке $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$ система становится однородной. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим сеточный вариант задачи. Для определенности будем считать, что контакты на образце размерами $\xi \times \xi \times \xi$ расположены слева направо и на них задано падение напряжения U_ξ . Зададим на каждом сопротивлении, расположенном вдоль контактов, напряжения U_c ($U_c = E_c a_0$), тогда все сопротивления, по которым протекает ток, становятся одинаковыми. На каждом таком элементе среды напряженность поля равна E_c , средняя напряженность поля $|\langle \mathbf{E} \rangle|$ также равна E_c . Такое распределение полей при любой концентрации p «черной» фазы удовлетворяет граничным условиям. Так как решение задачи (режим работы среды) при монотонных ВАХ единственно [31], то предложенное распределение полей ($\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle$, $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$) и есть истинное распределение.

В континуальном варианте среды локальные законы (44) и (45) в фазах в точке $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$ одинаковы:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_c \mathbf{k}_0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = j_c \mathbf{k}_0, \quad (53)$$

где \mathbf{k}_0 — направление $\langle \mathbf{E} \rangle$, не зависящее от координат. Эти поля и токи (53), таким образом, удовлетворяют уравнениям ($\text{div } \mathbf{j} = 0, \text{rot } \mathbf{E} = 0$) и граничным условиям на границе раздела фаз ($\mathbf{E}_\tau|_1 = \mathbf{E}_\tau|_2, \mathbf{j}_n|_1 = \mathbf{j}_n|_2$), а поскольку решение единственно, то (53) и есть решение задачи в точке $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$.

Вблизи $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$ среда является слабо неоднородной и для определения эффективных характеристик можно воспользоваться приближением эффективных средних. Это приближение было использовано для описания проводимости в системе с

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \chi_\alpha |\mathbf{E}|^\alpha \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_b \mathbf{E} \quad (54)$$

в работе [16]. В наших обозначениях $\alpha + 1 \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow 1, \chi_\alpha \rightarrow \sigma_1, \sigma_b \rightarrow \sigma_2$. Согласно [16] $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \langle \mathbf{E} \rangle \rangle$, где

$$\sigma_e = \frac{1}{2} (1 - 2p) (\sigma_2 - \sigma_1 \langle |\mathbf{E}|^{\gamma-1} \rangle_1) - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2p)^2 (\sigma_2 - \sigma_1 \langle |\mathbf{E}|^{\gamma-1} \rangle_1)^2 + 4\sigma_2 \sigma_1 \langle |\mathbf{E}|^{\gamma-1} \rangle_1}. \quad (55)$$

В (55) $\langle \dots \rangle_1$ означает усреднение по первой фазе, p — концентрация нелинейной (первой) фазы; предполагается, что для средних полей имеет место соотношение $\langle |\mathbf{E}|^{\gamma-1} \rangle_1 \approx (\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1)^{(\gamma-1)/2}$ и что среднее поле $\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1$ можно определить из условий самосогласования:

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1 = \frac{|\langle \mathbf{E} \rangle|}{2p} \times \left\{ -(1 - 2p) + \frac{2\sigma_2 - (1 - 2p)^2 (\sigma_2 - \sigma_1 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{(\gamma-1)/2})}{\sqrt{(1 - 2p)^2 (\sigma_2 - \sigma_1 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{(\gamma-1)/2}) + 4\sigma_2 \sigma_1 (\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{(\gamma-1)/2})}} \right\}. \quad (56)$$

Введем в рассмотрение параметр ε , характеризующий малость отклонения поля от E_c :

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1 = E_c^2 (1 + \varepsilon)^2. \quad (57)$$

Тогда в первом порядке малости по ϵ получим

$$|\langle E \rangle| = E_c \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{4} (1 - p) - 1 \right) \epsilon \right]. \quad (58)$$

Подстановка (57) и (58) в (55) дает зависимость эффективной проводимости вблизи E_c от концентрации:

$$\sigma_e = \sigma_2 \left(1 - 2 \frac{\gamma - 1}{(1 - p)(\gamma - 1) - 2} p \frac{|\langle E \rangle| - E_c}{E_c} \right). \quad (59)$$

Конечно, выражение (59) справедливо при малом по сравнению с единицей втором слагаемом в скобках, что кроме требования близости поля $|\langle E \rangle|$ к E_c (т. е. $(|\langle E \rangle| - E_c)/E_c \ll 1$) налагает условия на значения γ и p . Так, например, при $\gamma = 2$ зависимость σ_e от концентрации справедлива для любого значения p , а при $\gamma = 4$ — только при p далеких от значения 0.5.

Рассмотрим теперь поведение системы при $|E| \gg E_c$. Будем считать верным следующее утверждение: при увеличении среднего поля $|\langle E \rangle|$ локальные поля могут только увеличиваться. Это означает, что при $|\langle E \rangle| \gg E_c$ элементы «черной» и «белой» фаз, на которых падает основное напряжение и через которые проходит основной ток, меняются местами. Таким образом, мы имеем ту же перколяционную структуру, что и при $|\langle E \rangle| \ll E_c$, но только теперь мостики состоят из «белой», а прослойки из «черной» фаз и в (46), (47), (51) и (52) надо провести замену $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ и $p \rightarrow 1 - p$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче об эффективной проводимости в двухфазной сильно нелинейной среде с конечным отношением фаз существует три области полей. В первой и третьей из них (I — $|E| \ll E_c$ и III — $|E| \gg E_c$) возможен перколяционно-подобный подход, в определенном смысле среда является сильно неоднородной. Во второй, промежуточной, области (II — $|E| \approx E_c$) среда слабо неоднородна и возможно применение методов самосогласованного поля. В самой точке $|E| = E_c$ система становится гомогенной и эффективная проводимость определяется точно. Эта гомогенизация, как нам представляется, должна приводить к резкому уменьшению $1/f$ -шума, который, являясь вторым моментом джоулевого тепловыделения, тем больше, чем больше неоднородность.

Мы благодарны Р. М. Нуи за присылку оттисков статей и А. М. Сатанину за обсуждение затронутых вопросов. Работа частично поддержана Международной научно-образовательной программой (проекты QSU082187 и PSU082057).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ограничения на выражения (46), (47), вызванные требованием того, чтобы главным элементом перколяционной структуры выше порога протекания был мостик, а ниже порога протекания — прослойка, аналогичные формулам (23) и (24), будут иметь вид

$$|\langle j \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1^\beta}{\sigma_2^{1/\gamma}} \tau^{\beta i + q/\gamma} \right)^{1/(\beta - 1/\gamma)}, \quad (П.1)$$

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tau^{\dot{\varphi}} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} \quad (\text{П.2})$$

Так же, как (46) и (47), эти выражения переходят друг в друга при замене $|\langle \mathbf{j} \rangle|$ на $|\langle \mathbf{E} \rangle|$ или $|\langle \mathbf{E} \rangle|$ на $|\langle \mathbf{j} \rangle|$.

Ограничения, которые накладываются на (46) и (47) требованием малости локальных полей и токов по сравнению с критическими значениями j_c и E_c , можно записать в виде условий для средних полей и токов:

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1^\beta}{\sigma_2^{1/\gamma}} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} \tau^{\nu(d-1)}, \quad (\text{П.3})$$

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} |\tau|^\nu. \quad (\text{П.4})$$

Эти условия аналогичны ограничениям (14), при этом (П.3) следует из ограничения на максимальную локальную плотность тока в мостике, а (П.4) — из ограничения на максимальное локальное поле в прослойке. В такой форме (П.3) и (П.4) применимы как выше, так и ниже порога протекания. Однако (П.3) можно переписать как условие для среднего поля, а (П.4) — как ограничение на среднюю плотность тока:

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} \tau^{-\gamma[\dot{i}-\nu(d-1)]}, \quad p > p_c, \quad (\text{П.5})$$

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} |\tau|^{(1/\beta)[\dot{q}+\nu(d-1)]}, \quad p < p_c, \quad (\text{П.6})$$

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1^\beta}{\sigma_2^{1/\gamma}} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} \tau^{\dot{i}+\nu/\gamma}, \quad p > p_c, \quad (\text{П.7})$$

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1^\beta}{\sigma_2^{1/\gamma}} \right)^{1/(\beta-1/\gamma)} |\tau|^{-\dot{q}+\beta\nu}, \quad p < p_c. \quad (\text{П.8})$$

В области размазки из требования малости величины Δ аналогично неравенству (27) имеем

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1/(\beta+1/\gamma)} \quad (\text{П.9})$$

Переписывая (П.9) с использованием средней плотности тока, с помощью (52) получим

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll \left(\frac{\sigma_1^\beta}{\sigma_2^{1/\gamma}} \right)^{1/(\beta+1/\gamma)} \quad (\text{П.10})$$

Условия, которые накладываются на (52) в области размазки требованием малости локальных полей и токов по сравнению с критическими (аналогичные (П.3)–(П.8)), в выражении через средние поля и токи совпадают с (П.9) и (П.10).

Литература

1. *Proc. of the Fourth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media* (Physica A **241**, 1 (1997)).
2. D. J. Bergman and D. Stroud, Sol. St. Phys. **46**, 147 (1992).
3. А. А. Снарский, С. И. Буда, Электричество вып. 2, 67 (1998); ЖТФ **68**, 5 (1998).
4. S. W. Kenkel and J. P. Straley, Phys. Rev. Lett. **49**, 767 (1982); J. P. Straley and S. W. Kenkel, Phys. Rev. B **29**, 6299 (1984).
5. R. Blumenfeld and A. Aharony, J. Phys. A **18**, L443 (1985).
6. Y. Meir, B. Blumenfeld, A. Aharony, and A. B. Harris, Phys. Rev. B **34**, 3424 (1986).
7. D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis (1992).
8. А. А. Снарский, ЖЭТФ **91**, 1405 (1986).
9. А. А. Snarskii, A. E. Morozovsky, A. Kolek, and A. Kusy, Phys. Rev. E **53**, 5596 (1996).
10. A. E. Morozovsky and A. A. Snarskii, Int. J. Elec. **73**, 925 (1992).
11. T. Ohtsuki and T. Keyes, J. Phys. A **17**, L559 (1984).
12. A. Coniglio and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **52**, 1068 (1984).
13. D. C. Wright, D. J. Bergman, and Y. Kantor, Phys. Rev. B **33**, 396 (1986).
14. Hon-Chor Lee, Wing-Hon Siu, and K. W. Yu, Phys. Rev. B **52**, 4217 (1995).
15. P. M. Hui, P. Cheung, and Y. R. Kwong, Physica A **241**, 301 (1997).
16. P. M. Hui, Y. F. Woo, and W. M. V. Wan, J. Phys.: Condens. Matter **7**, L593 (1995).
17. Tat-Sang Choy and K. W. Yu, Phys. Rev. B **52**, 3341 (1995).
18. Hon-Chor Lee, Kin-Pong Yuen, and K. W. Yu, Phys. Rev. B **51**, 9317 (1995).
19. Hon-Chor Lee, K. W. Yu, and G. Q. Gu, J. Phys.: Condens. Matter **7**, 8785 (1995).
20. R. Blumenfeld, Y. Meir, A. B. Harris, and A. Aharony, J. Phys. A **19**, L791 (1986).
21. Y. Meir, R. Blumenfeld, A. B. Harris, and A. Aharony, Phys. Rev. B **36**, 3950 (1987).
22. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, ЖЭТФ **95**, 1844 (1989).
23. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, Письма в ЖЭТФ **52**, 871 (1990).
24. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, ЖЭТФ **102**, 683 (1992).
25. А. Е. Morozovsky and A. A. Snarskii, Int. J. Electr. **78**, 135 (1995).
26. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. B **76**, 475 (1976).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Ч. 1*, Наука, Москва (1976).
28. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
29. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, Письма в ЖЭТФ **64**, 495 (1996).
30. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, ЖЭТФ **112**, 643 (1997).
31. Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Е. С. Филиппов, *Теория нелинейных электрических цепей*, Энергоатомиздат, Ленинград (1980), с. 177.