ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 2(8), стр. 563–585

ДВИЖЕНИЕ МАГНИТНЫХ ЛИНИЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

*В. П. Рубан**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 апреля 1999 г.

Получено калибровочно-свободное описание магнитогидродинамических течений идеальной несжимаемой жидкости, учитывающее вмороженность магнитного поля и наличие перекрестных инвариантов, в выражение для которых входит завихренность. Данное описание является обобщением известного в обычной гидродинамике канонического формализма для динамики вмороженных вихревых линий. Магнитная гидродинамика рассмотрена как длинноволновый предел двухжидкостной модели плазмы, в которой существование двух вмороженных полей — роторов обобщенных импульсов электронной и ионной жидкостей — следует из симметрии каждой компоненты по отношению к переобозначению лагранжевых маркеров. Перекрестные инварианты в магнитной гидродинамике являются пределами специальных комбинаций топологических инвариантов двухжидкостной модели. В работе сформулирован вариационный принцип для динамики вмороженных магнитных линий, а также найдены функционалы Казимира неканонических скобок Пуассона.

PACS: 47.32.-y, 52.30.-q

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что из уравнения Эйлера для идеальной жидкости (при условии изэнтропичности течения) следует закон вмороженности вихревых линий. Следствием этого закона является теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости вдоль произвольного жидкого контура [1]. С точки зрения лагранжева формализма сохранение указанных величин связано с особой симметрией уравнений идеальной гидродинамики [2–6]. При лагранжевом описании каждая жидкая частица маркируется трехмерным вектором $\mathbf{a}$. Динамика жидкости определяется указанием положения $\mathbf{x}(\mathbf{a},t)$ каждой жидкой частицы в произвольный момент времени t. Уравнения движения для отображения $\mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{a},t)$ следуют из вариационного принципа

$$\delta \int \mathscr{L}\{\mathbf{x}(\mathbf{a},t), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a},t)\} dt = 0.$$

Лагранжиан жидкости $\mathscr{L}$ допускает бесконечнопараметрическую группу симметрий — он принимает одно и то же значение на всех отображениях $\mathbf{x}(\mathbf{a},t)$, для которых совпадают эйлеровы характеристики течения — плотность $\rho(\mathbf{r},t)$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Такие отображения отличаются одно от другого только некоторой перестановкой лагранжевых маркеров $\mathbf{a}$, с чем и связано английское название группы симметрий — relabeling

*E-mail: ruban@itp.ac.ru

group. Все законы сохранения завихренности являются следствием данной симметрии лагранжиана по отношению к переобозначению маркеров (по теореме Нётер). Наиболее общая формулировка этих законов постулирует наличие локального векторного лагранжева инварианта — инварианта Коши [7].

Аналогичная ситуация имеет место в идеальной магнитной гидродинамике (МГД). В отличие от обычной гидродинамики, в МГД вмороженными являются линии магнитного поля $\mathbf{B}$ [8], но не линии поля завихренности $\mathbf{\Omega}$. Тем не менее завихренность не может в процессе движения достигать произвольных состояний, поскольку кроме топологических инвариантов самого магнитного поля сохраняются еще так называемые «перекрестные» инварианты, содержащие завихренность. Топологическими инвариантами $\mathcal{T}\{\mathbf{S}\}$ некоторого соленоидального поля $\mathbf{S}$ мы называем такие функционалы, вариация которых равна нулю, если вариация самого поля имеет «вмороженный» вид

$$\delta\mathbf{S} = \mathrm{rot}\,[\delta\mathbf{x}\times\mathbf{S}].$$

Такая вариация смещает силовые линии поля $\mathbf{S}$ на малую величину $\delta\mathbf{x}(\mathbf{r})$, не изменяя его топологических характеристик. Отсюда следует критерий того, что данный функционал является топологическим:

$$\left[\mathrm{rot}\,\left(\delta\mathcal{T}/\delta\mathbf{S}\right)\times\mathbf{S}\right] = 0.$$

В частности, интеграл магнитной спиральности

$$I_h\{\mathbf{B}\} = \int(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}^{-1}\mathbf{B})d\mathbf{r}$$

является одним из топологических инвариантов магнитного поля. С геометрической точки зрения I_h представляет собой меру взаимной зацепленности магнитных линий [9] и для гладких отображений с точностью до постоянного множителя совпадает с инвариантом Хопфа.

Самым известным из перекрестных инвариантов МГД является, пожалуй, интеграл перекрестной спиральности

$$I_c = \int(\mathbf{\Omega}\,\mathrm{rot}^{-1}\mathbf{B})d\mathbf{r} = \int(\mathbf{v}\mathbf{B})d\mathbf{r},$$

характеризующий число зацеплений между вихревыми и магнитными линиями [9]. С точки зрения маркировочной симметрии вморожненность магнитных линий и наличие перекрестных инвариантов объясняется просто. Дело в том, что обычная МГД может быть рассмотрена как длинноволновый (или низкочастотный) предел двухжидкостной модели плазмы, в которой ионная и электронная жидкости взаимодействуют между собой через самосогласованное электромагнитное поле (см., например, [10] и недавнюю работу [6]). Как известно [11], для каждой компоненты имеет место закон вмороженности ротора обобщенного импульса в свою субстанцию. Поэтому до проведения предельного перехода к МГД в двухжидкостной системе в явном виде присутствуют два вмороженных поля:

$$\mathbf{\Omega}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_i + \frac{e}{m_i c}\mathbf{B}$$

и

$$\mathbf{\Omega}_2 = \frac{m_e}{m_i}\operatorname{rot}\mathbf{v}_e - \frac{e}{m_i c}\mathbf{B},$$

каждое со своим набором топологических инвариантов. В интересующем нас пределе размерный параметр $\alpha = m_i c/e$ мал по сравнению с отношением характерных значений $|\mathbf{B}|/|\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2|$. Формально предельный переход к МГД означает, что необходимо устремить параметр α к нулю, сохраняя порядок величин $\mathbf{B} \approx -(m_i c/e)\mathbf{\Omega}_2$ и $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2 \approx \operatorname{rot}\mathbf{v}_i$. Знаки приближенного равенства связаны с пренебрежением электронной инерцией и предположением, что скорости ионов $\mathbf{v}_i$ и электронов $\mathbf{v}_e$ в главном порядке совпадают. Два поля $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$ вырождаются при этом в одно, причем его линии совпадают с линиями магнитного поля. Чтобы не потерять при переходе $\alpha \to 0$ половину топологических интегралов движения, следует для каждого топологического инварианта магнитного поля $\mathscr{T}\{\mathbf{B}\}$ рассмотреть предел

$$\mathscr{C}_{\mathscr{T}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathscr{T}\{\mathbf{B}+\alpha\mathbf{\Omega}\} - \mathscr{T}\{\mathbf{B}\}}{\alpha} = \int \left(\frac{\delta\mathscr{T}}{\delta\mathbf{B}}\mathbf{\Omega}\right) d\mathbf{r},$$

который является интегралом движения идеальной МГД. Совокупность всех $\mathscr{C}_{\mathscr{T}}$ и есть множество перекрестных инвариантов. В частности, интеграл перекрестной спиральности I_c получается по данной формуле из интеграла магнитной спиральности I_h.

Данная работа посвящена изучению движения вмороженных полей в идеальной МГД. В ней выводится такое описание течений, которое фиксирует все маркировочные интегралы движения. Аналогичное представление в обычной гидродинамике — преобразование Вебера [7] — известно давно, его частным случаем является параметризация течения переменными Клебша. Одним из основных результатов работы является обобщение представления Вебера на случай идеальной МГД. Это новое представление содержит целое векторное поле — лагранжев инвариант. В случае обычной гидродинамики этот инвариант обеспечивает сохранение инварианта Коши и, как следствие, всех законов сохранения для завихренности [5]. В МГД данное векторное поле обеспечивает сохранение перекрестных инвариантов. В отличие от гидродинамики, оно не выражается явно через наблюдаемые поля. Показано, что аналог представления Вебера для МГД может быть получен путем предельного перехода $\alpha \to 0$ из пары обычных представлений Вебера, которые параметризуют обобщенные импульсы в двухжидкостной модели. При таком переходе выясняется смысл всех величин, входящих в результат. Этот же ответ получается прямым интегрированием уравнений МГД в лагранжевом описании.

Другой результат работы состоит в том, что найденная параметризация помогает сформулировать вариационный принцип для динамики магнитных линий в несжимаемой МГД. Основой используемого подхода служит интегральное представление вмороженных соленоидальных полей, которое фиксирует все их топологические свойства. В качестве новых динамических объектов выступают магнитные линии. Каждая линия нумеруется своей лагранжевой меткой и допускает калибровочную свободу в своей параметризации. Такое описание является промежуточным между лагранжевым и эйлеровым описаниями [12–14]. Полученные калибровочно-инвариантные уравнения движения для формы линий определяют только поперечную динамику, от которой зависят наблюдаемые величины. При этом условие сохранения объема каждой магнитной трубки не налагается в виде связи, а является интегралом движения, следующим по теореме Нётер из симметрии нового лагранжиана по отношению к переобозначению маркеров магнитных линий. Данная формулировка идеальной несжимаемой МГД аналогична представлению несжимаемых течений в обычной гидродинамике посредством вмороженных вихревых линий [13, 15]. Новое представление несжимаемых МГД-течений наиболее адекватно описывает поля со сложной топологией, а также локализованные структуры типа магнитных нитей.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 даны необходимые сведения о каноническом формализме для гидродинамических систем общего вида и получено представление Вебера для обобщенных импульсов. В разд. 2 рассматривается модель, промежуточная между двухжидкостной моделью плазмы и магнитной гидродинамикой — так называемая холловская МГД или МГД с дисперсией [16]. В разд. 3 из этой модели предельным переходом получается представление Вебера для обычной МГД. В разд. 4 вводится калибровочно-свободное описание магнитного и вихревого полей в несжимаемых МГД-системах, выписываются уравнения движения и формулируется вариационный принцип для динамики новых объектов. Там же обсуждается вопрос о функционалах Казимира неканонических скобок Пуассона [17]. В разд. 5 на примере двумерной МГД продемонстрирован способ выбора калибровки, приводящий к канонически-сопряженным динамическим величинам в новом описании.

2. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЖИДКОСТИ

Для простоты сначала обратимся к одножидкостным системам, а затем сделаем очевидные обобщения на многокомпонентные модели. Нас будет интересовать механическое движение жидкости как сплошной среды, и потому мы рассмотрим лагранжевы системы, для которых элементами конфигурационного пространства являются отображения $\mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ трехмерного $\mathbf{a}$-пространства маркеров «жидких частиц» в физическое $\mathbf{r}$-пространство. Описание движения посредством указания зависимости отображения $\mathbf{x}$ от времени $\mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ принято называть лагранжевым описанием. Данное отображение определяет собой поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, причем всегда можно выбрать маркировку таким образом, чтобы плотность выражалась через якобиан отображения

$$J_{\mathbf{x}} = \det||\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{a}||$$

без дополнительного множителя, зависящего от $\mathbf{a}$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \left.\frac{1}{\det||\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{a}||}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{r},t)}, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t)|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{r},t)}. \tag{1}$$

Зависимости всех физических величин (ρ, $\mathbf{v}$), а также внешних по отношению к среде полей f от координат $\mathbf{r}$ и времени t осуществляют эйлерово описание течения.

Среди всевозможных лагранжианов $\mathscr{L}\{\mathbf{x}(\mathbf{a}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}), f(\mathbf{r}), f_t(\mathbf{r})\}$ выделим обладающие симметрией по отношению к переобозначению маркеров $\mathbf{a}$ (relabeling group). Это означает, что указанные функционалы полностью определяются эйлеровыми характеристиками течения: плотностью, скоростью, а также внешними полями. Варьирование внешних полей, необходимое для составления их уравнений движения, проводится непосредственно в эйлеровом представлении. Поэтому вначале рассмотрим лагранжианы вида $\mathscr{L} = \mathscr{L}\{\rho, \mathbf{v}\}$. Указанной симметрией обладают лагранжианы многих физически значимых систем. В этом случае можно записать замкнутую систему уравнений в эйлеровом представлении для величин $\mathbf{v}, \rho$. Уравнение для плотности получается из кинематической связи между вариацией плотности и малым смещением $\delta\mathbf{x}(\mathbf{a})$ (аргумент t для краткости опускаем):

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = -\nabla(\rho(\mathbf{r})\delta\mathbf{x}(\mathbf{a}(\mathbf{r}))). \tag{2}$$

Эта связь следует из (1) и дает уравнение непрерывности

$$\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{3}$$

Чтобы записать в эйлеровом представлении динамическое уравнение Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})}\right|_{\mathbf{x}(\mathbf{a})}\right) = \left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{x}(\mathbf{a})}\right|_{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})}, \tag{4}$$

нужно использовать формулу

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \delta\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}(\mathbf{r})) - (\delta\mathbf{x}(\mathbf{a}(\mathbf{r}))\nabla)\mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

следующую из определения (1), совместно с (2) для подстановки в равенство вариаций

$$\int\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\mathbf{x}}}\delta\dot{\mathbf{x}} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}\right)d\mathbf{a} = \int\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}}\delta\mathbf{v} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\rho}\delta\rho\right)d\mathbf{r}.$$

После простого интегрирования по частям приходим к формулам

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}\{\rho,\mathbf{v}\}}{\delta\mathbf{x}(\mathbf{a})}\right|_{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})} = \left.\left(\nabla\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v_m}\right)\nabla v_m\right)\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{x}(\mathbf{a},t)}, \tag{5}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{a},t) \equiv \left.\frac{\delta\mathcal{L}\{\rho,\mathbf{v}\}}{\delta\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})}\right|_{\mathbf{x}(\mathbf{a})} = \left.\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}}\right)\right)\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{x}(\mathbf{a},t)}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{p}(\mathbf{a},t)$ — обобщенный импульс, который в общем случае не совпадает со скоростью. Данное обстоятельство весьма существенно для многих моделей.

Уравнение движения (4) выглядит теперь следующим образом (обобщенное уравнение Эйлера):

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}}\right) = \nabla\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v_m}\right)\nabla v_m. \tag{7}$$

Уравнения (3) и (7) полностью определяют движение.

В качестве примера рассмотрим релятивистски инвариантное выражение для действия баротропной жидкости (в безразмерных переменных):

$$\mathcal{S}_r = \int\mathcal{L}_r dt = -\int dt\int d\mathbf{r}\;\; \varepsilon\left(\rho\sqrt{1-\mathbf{v}^2}\right), \tag{8}$$

где ρ — плотность числа сохраняющихся частиц в лабораторной системе отсчета, $\rho\sqrt{1-\mathbf{v}^2} = \tilde{\rho}$ — плотность в локально сопутствующей системе отсчета, $\varepsilon(\tilde{\rho})$ — релятивистская плотность внутренней энергии жидкости с учетом энергии покоя. Можно без труда убедиться, что обобщение уравнения Эйлера в известном учебнике Ландау и Лифшица (см. [1], формула 134.10) на случай релятивистских изэнтропических течений совпадает с уравнением (7), если подставить туда данный лагранжиан и принять во внимание, что релятивистская энтальпия выражается по формуле $w = \partial\varepsilon/\partial\tilde{\rho}$:

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\left(\frac{\mathbf{v}w(\tilde{\rho})}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right) = -\nabla w(\tilde{\rho})\sqrt{1-\mathbf{v}^2}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что уравнение непрерывности следует писать именно для ρ, а не для $\tilde{\rho}$. В данном случае оно может быть представлено в форме

$$\partial_t\left(\frac{\tilde{\rho}(w)}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right) + \nabla\left(\frac{\tilde{\rho}(w)\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right) = 0, \tag{10}$$

которая позволяет в качестве динамических величин рассматривать пару $(w, \mathbf{v})$. Обобщенный импульс $\mathbf{p}$ определяется формулой

$$\mathbf{p} = w\left(\rho\sqrt{1-\mathbf{v}^2}\right)\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}. \tag{11}$$

Мы видим, что в релятивистской гидродинамике обобщенный импульс неуниверсальным образом зависит от скорости. Для каждого уравнения состояния связь между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ своя, причем она содержит в себе плотность ρ. В нерелятивистском пределе $v \ll 1$, $\rho \ll 1$, $\tilde{\rho} \approx \rho$, $w(\tilde{\rho}) \approx 1 + w_{nr}(\rho)$ мы, как и положено, имеем уравнения обычной гидродинамики, в которых $w_{nr}(\rho)$ — нерелятивистская энтальпия.

Далее перейдем по стандартным правилам от лагранжева формализма к гамильтонову. Для этого вместо обобщенной скорости $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ будем использовать другую переменную — обобщенный импульс $\mathbf{p} = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{\mathbf{x}}$. В эйлеровом представлении он выражается по формуле (6). Определим функционал Гамильтона согласно равенству

$$\mathcal{H} = \int(\mathbf{p}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}))d\mathbf{a} - \mathcal{L} = \int\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)d\mathbf{r} - \mathcal{L}. \tag{12}$$

Скорость $\mathbf{v}$ при этом должна быть выражена через $\mathbf{p}$ с помощью (6). Нетрудно проверить, что по известному гамильтониану она определяется формулой

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{p}}\right)\Big|_{\rho}. \tag{13}$$

При этом имеет место следующее соотношение между производными:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\rho}\Big|_{\mathbf{v},\sigma} = \frac{\mathbf{p}}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{p}}\right)\Big|_{\rho} - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho}\Big|_{\mathbf{p}}. \tag{14}$$

В переменных $\{\rho, \mathbf{p}\}$ динамическая система, соответствующая некоторому гамильтониану $\mathcal{H}\{\rho, \mathbf{p}\}$, принимает вид

$$\rho_t + \nabla\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{p}}\right) = 0, \tag{15}$$

$$\mathbf{p}_t = \left[\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\mathbf{p}}\right) \times \frac{\operatorname{rot}\mathbf{p}}{\rho}\right] - \nabla\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\rho}\right), \tag{16}$$

в чем можно убедиться с помощью формул (5), (6), (13), (14). Вычисляя теперь производную по времени от некоторого функционала $F\{\rho, \mathbf{p}\}$, получим выражение вида $\dot{F} = \{F, \mathscr{H}\}$, где в правой части стоит билинейная антисимметричная форма, определенная для любых двух функционалов $F\{\rho, \mathbf{p}\}$ и $G\{\rho, \mathbf{p}\}$:

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{p}}{\rho}\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{p}} \times \frac{\delta G}{\delta\mathbf{p}}\right]\right) d\mathbf{r} + \int \left(\frac{\delta G}{\delta\rho}\nabla\left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{p}}\right) - \frac{\delta F}{\delta\rho}\nabla\left(\frac{\delta G}{\delta\mathbf{p}}\right)\right) d\mathbf{r}. \tag{17}$$

Можно проверить, что эта формула определяет гидродинамическую скобку Пуассона [17]. Помимо указанного свойства антисимметрии форма удовлетворяет также тождеству Якоби

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0.$$

Рассмотрим теперь другой пример — нерелятивистскую баротропную жидкость в заданном внешнем потенциальном поле. Ее лагранжиан имеет вид

$$\mathscr{L}_{nr} = \int \left(\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \varepsilon(\rho) - \rho\phi(\mathbf{r})\right) d\mathbf{r},$$

где $\varepsilon(\rho)$ — обычная нерелятивистская внутренняя энергия, $\phi(\mathbf{r})$ — потенциал внешней силы, например, гравитационной. Обобщенный импульс в данном случае совпадает со скоростью: $\mathbf{p} = \mathbf{v}$, а гамильтониан представляет собой сумму кинетической, внутренней и потенциальной энергий:

$$\mathscr{H}_{nr} = \int \left(\rho\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \rho\phi(\mathbf{r})\right) d\mathbf{r}.$$

Уравнения движения, полученные по формулам (15), (16), имеют хорошо известный вид

$$\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad \mathbf{v}_t = [\mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{v}] - \nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w(\rho) + \phi(\mathbf{r})\right).$$

Как было отмечено, системы гидродинамического типа обладают бесконечным числом интегралов движения. Чтобы продемонстрировать этот факт, рассмотрим производную по времени от величины $u_\mu(\mathbf{a}, t) = p_k(\partial x_k/\partial a_\mu)$. Пользуясь уравнением Эйлера—Лагранжа и формулами (5), (6), получим

$$\dot{u}_\mu = \dot{p}_k\frac{\partial x_k}{\partial a_\mu} + p_k\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_\mu} =$$
$$= \frac{\partial x_k}{\partial a_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\rho}\right) - p_m\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right) + p_k\frac{\partial v_k}{\partial a_\mu} = \frac{\partial}{\partial a_\mu}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\rho}\right).$$

Проинтегрировав по времени это соотношение, придем к так называемому представлению Вебера [7]:

$$p_k(\mathbf{a}, t)\frac{\partial x_k(\mathbf{a}, t)}{\partial a_\mu} = u_{0\mu}(\mathbf{a}) + \frac{\partial\varphi(\mathbf{a}, t)}{\partial a_\mu}, \tag{18}$$

причем скалярный потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}(\mathbf{a},t) = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\rho} = \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho}\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\mathbf{p}}\right) - \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\rho}\right).$$

Из формулы (18) следует сохранение «поперечной» компоненты поля $\mathbf{u}(\mathbf{a},t)$, что равносильно утверждению

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial p_k(\mathbf{a},t)}{\partial a_\beta}\frac{\partial x_k(\mathbf{a},t)}{\partial a_\gamma} = (\mathrm{rot}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}_0(\mathbf{a}))_\alpha = \Omega_{0\alpha}(\mathbf{a}). \tag{19}$$

Равенство (19) есть в точности формулировка законов сохранения, поскольку правая его часть не зависит от времени. В таком виде интегралы движения выражены через локальные характеристики течения и представляют собой не что иное как инвариант Коши [7]. Другая (причем равносильная) формулировка связана с выбором произвольного соленоидального поля $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ и рассмотрением интеграла

$$I_{\mathbf{g}} = \int p_k(\mathbf{a},t)\frac{\partial x_k(\mathbf{a},t)}{\partial a_\mu}g_\mu(\mathbf{a})d\mathbf{a}. \tag{20}$$

Подставляя сюда представление Вебера (18) и интегрируя член с φ по частям, приходим к выводу, что $I_{\mathbf{g}} = \mathrm{const}$.

Выбор поля $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ в специальном виде, когда оно сосредоточено на некотором замкнутом контуре, дает теорему Кельвина о сохранении циркуляции

$$\Gamma = \oint \mathbf{p}d\mathbf{r}$$

вдоль жидкого контура [1]. Отметим, что к интегралам движения (20) можно прийти также путем непосредственного применения теоремы Нётер. В самом деле, рассмотрим однопараметрическую группу преобразований лагранжевых маркеров $\mathbf{a}_{\mathbf{g}}^\tau(\mathbf{a})$, задаваемую соленоидальным векторным полем $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ (соленоидальность следует из условия неизменности плотности). Возьмем произвольное отображение $\mathbf{x}(\mathbf{a},t)$. Независимо от значения группового параметра τ все отображения $\mathbf{x}_{\mathbf{g}}^\tau(\mathbf{a},t) = \mathbf{x}(\mathbf{a}_{\mathbf{g}}^\tau(\mathbf{a}),t)$ описывают одно и то же течение $\{\rho(\mathbf{r},t),\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\}$. Поэтому лагранжиан принимает на таких отображениях одно значение. Теорема Нётер гласит, что в таком случае имеется закон сохранения [18]

$$\int \mathbf{p}\left(\frac{\delta\mathbf{x}_{\mathbf{g}}^\tau}{\delta\tau}\right)\bigg|_{\tau=0} d\mathbf{a} = \mathrm{const}.$$

Воспользовавшись при малых τ формулами

$$\mathbf{a}_{\mathbf{g}}^\tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \tau\mathbf{g}(\mathbf{a}) + O(\tau^2),$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{g}}^\tau(\mathbf{a},t) = \mathbf{x}(\,\mathbf{a} + \tau\mathbf{g}(\mathbf{a}) + O(\tau^2),\ t) = \ \mathbf{x}(\mathbf{a},t) + \tau(\mathbf{g}(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\mathbf{a},t) + O(\tau^2),$$

немедленно приходим к выражению (20) для $I_{\mathbf{g}}$.

Формула (19) может быть переписана в следующем виде, определяющем связь между завихренностью течения $\Omega(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\ \mathbf{p}(\mathbf{r},t)$ и инвариантом Коши:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t) = \left.\frac{(\Omega_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\mathbf{a},t)}{\det(\partial\mathbf{x}(\mathbf{a},t)/\partial\mathbf{a})}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{r},t)} = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}(\mathbf{a},t))(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{x}(\mathbf{a},t)d\mathbf{a}. \qquad (21)$$

Формула (21) показывает, что линии начального соленоидального поля Ω_0 деформируются отображением $\mathbf{x}(\mathbf{a},t)$, сохраняя при этом все свои топологические свойства. В частности, остается неизменной степень взаимного зацепления вихревых линий, определяемая интегралом спиральности $\int(\mathbf{p\Omega})d\mathbf{r}$ [9]. Легко заметить, что данный закон сохранения относится к семейству (20) и соответствует выбору $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$.

Все проведенные выше вычисления допускают очевидное обобщение на N-жидкостную гидродинамику. В многокомпонентных гидродинамических моделях, когда состояние системы описывается несколькими полями $\rho_j, \mathbf{v}_j$, имеет место вмороженность ротора каждого из обобщенных импульсов в собственную субстанцию с маркером $\mathbf{a}_j$. Представления Вебера в количестве N формул параметризуют каждый из обобщенных импульсов. Заметим также, что в некоторых моделях вместо плотностей ρ_j удобнее пользоваться величинами, которые им пропорциональны, например, концентрациями частиц определенного сорта n_j. Такова ситуация в рассматриваемой далее двухжидкостной модели плазмы.

3. ВМОРОЖЕННЫЕ ПОЛЯ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Хорошо известно, что в идеальной МГД магнитное поле вморожено в жидкость. С этим фактом связаны законы сохранения топологических инвариантов магнитного поля, таких, например, как мера зацепленности магнитных линий [19, 11, 20]. Кроме этих интегралов движения, существуют еще так называемые «перекрестные» топологические инварианты, в выражение для которых входит ротор скорости. Чтобы понять их происхождение, напомним, что МГД-уравнения могут быть получены в низкочастотном (или длинноволновом) пределе из двухжидкостной модели плазмы, когда электроны и ионы рассматриваются как две отдельные жидкости. Каждая компонента допускает маркировочную симметрию, следовательно, в системе имеются два независимых вмороженных поля [21], т. е. две серии топологических интегралов движения. Как будет показано ниже, длинноволновый, или низкочастотный, предел означает пренебрежение электронной инерцией. Перекрестные интегралы МГД в этом случае соответствуют пределам особых комбинаций инвариантов двухжидкостной модели.

Рассмотрим двухжидкостную модель плазмы, в которой состояние системы описывается следующими полями: n_1, n_2 — концентрации ионов и электронов, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости ионной и электронной жидкостей, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал электромагнитного поля. Скалярный потенциал положим равным нулю, фиксируя тем самым калибровку. Пренебрежем массой электронов по сравнению с массой ионов m. Предположим, что проводимость среды бесконечна, т. е. одна жидкость может без трения протекать сквозь другую. Скорости будем полагать нерелятивистскими, а электрическое поле много меньше магнитного. В соответствии с этим действие жидкости и поля записывается в виде

$$\mathscr{S}_{2f} = \int \left(mn_1\frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{e}{c}(n_1\mathbf{v}_1 - n_2\mathbf{v}_2)\mathbf{A} - \frac{1}{8\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2 - \varepsilon(n_1, n_2)\right) d\mathbf{r}dt, \qquad (22)$$

где $\varepsilon(n_1, n_2)$ — внутренняя энергия жидкостей. Варьирование действия по схеме (7) приводит к следующим уравнениям:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \frac{4\pi e}{c}(n_1\mathbf{v}_1 - n_2\mathbf{v}_2), \tag{23}$$

$$(\partial_t + \mathbf{v}_1\nabla)m\mathbf{v}_1 = \frac{e}{c}\left(-\mathbf{A}_t + [\mathbf{v}_1 \times \mathrm{rot}\ \mathbf{A}]\right) - \nabla\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_1}, \tag{24}$$

$$0 = -\frac{e}{c}\left(-\mathbf{A}_t + [\mathbf{v}_2 \times \mathrm{rot}\ \mathbf{A}]\right) - \nabla\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_2}. \tag{25}$$

К ним нужно добавить два уравнения непрерывности:

$$n_{1,t} + \nabla(n_1\mathbf{v}_1) = 0, \qquad n_{2,t} + \nabla(n_2\mathbf{v}_2) = 0. \tag{26}$$

Если теперь учесть, что по определению

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B},$$

а также, что при выбранной калибровке

$$-\frac{1}{c}\mathbf{A}_t = \mathbf{E},$$

то легко узнать в (23) уравнение для квазистационарного магнитного поля [8], в (24) — уравнение движения для ионов, а из (25) получается уравнение вмороженности магнитного поля в электронную компоненту:

$$\mathbf{B}_t = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}].$$

Применение операции div к (23) дает с учетом уравнений непрерывности соотношение

$$n_{1,t} - n_{2,t} = 0.$$

Интегрирование по времени позволяет получить отсюда условие электронейтральности

$$n_1 = n_2 = n.$$

Отметим, что другой выбор произвольной функции интегрирования ($n_1 - n_2 = C(\mathbf{r})$) физически неоправдан, поскольку он привел бы к несамосогласованности рассматриваемой модели, в которой с самого начала предполагается квазинейтральность. После исключения n_2 и $\mathbf{v}_2$ из написанных уравнений и замены $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ мы имеем следующую систему (МГД с дисперсией [16], или холловская МГД [6]):

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)m\mathbf{v} = -\nabla w(n) + \frac{1}{4\pi n}[\mathrm{rot}\ \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \qquad w(n) = \frac{\partial}{\partial n}\varepsilon(n,n),$$

$$n_t + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \qquad \mathbf{B}_t = \mathrm{rot}\,\left[\left(\mathbf{v} - \frac{c}{4\pi e n}\mathrm{rot}\ \mathbf{B}\right) \times \mathbf{B}\right]. \tag{27}$$

Заметим, что обычная магнитная гидродинамика получается из данных уравнений в пределе больших концентраций и малых градиентов (МГД-предел), когда в последнем уравнении можно пренебречь членом $(c/4\pi e n)\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ по сравнению с $\mathbf{v}$. В то же время потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$ должен быть большим по сравнению с характерными значениям $(mc/e)\mathbf{v}$, чтобы магнитный и инерционный члены в уравнении Эйлера были по крайней мере одного порядка. Из этих требований следует необходимое условие применимости идеальной МГД:

$$nL^2 \gg mc^2/e^2,$$

где L — пространственный масштаб.

Примечателен факт, что если не пренебрегать указанным членом, скрывая тем самым симметрию исходной системы, то мы имеем два различных вмороженных поля:

$$\mathbf{\Omega}_2 = -\frac{e}{mc}\mathbf{B},$$

вмороженное в электронную компоненту, а также поле

$$\mathbf{\Omega}_1 = \operatorname{rot}\left(\mathbf{v} + \frac{e}{mc}\mathbf{A}\right) = \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_2,$$

вмороженное в ионную компоненту. Следовательно, имеются две серии топологических инвариантов $\mathscr{T}\{\mathbf{\Omega}_1\}$ и $\mathscr{T}\{\mathbf{\Omega}_2\}$. Топологическими инвариантами соленоидального поля мы называем всевозможные количественные характеристики, которые остаются неизменными под воздействием таких его вариаций, которые сводятся к непрерывной деформации силовых линий поля. Таким образом, в данной работе вмороженное соленоидальное поле мыслится как непрерывная совокупность линий, которые нигде не начинаются и не заканчиваются, не рождаются и не исчезают со временем, не пересекают друг друга в процессе движения.

В МГД-пределе сумма вмороженных полей (т. е. поле $\mathbf{\Omega}$) «бесконечно» мала по сравнению с каждым из них, так что соответствующие инварианты $\mathscr{T}\{\mathbf{B} + (mc/e)\mathbf{\Omega}\}$ и $\mathscr{T}\{\mathbf{B}\}$ оказываются почти равными. Чтобы не потерять в этом случае половину инвариантов, следует для каждого $\mathscr{T}\{\mathbf{B}\}$ рассмотреть предел

$$\mathscr{C}_{\mathscr{T}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathscr{T}\{\mathbf{B} + \alpha\mathbf{\Omega}\} - \mathscr{T}\{\mathbf{B}\}}{\alpha} = \int \left(\frac{\delta\mathscr{T}}{\delta\mathbf{B}}\mathbf{\Omega}\right) d\mathbf{r}, \tag{28}$$

который является интегралом движения идеальной МГД. Совокупность всех $\mathscr{C}_{\mathscr{T}}$ заменяет собой вторую серию топологических инвариантов системы (22) в МГД-пределе. Таким образом, каждому топологическому интегралу обычной МГД, в котором фигурирует только магнитное поле, соответствует «перекрестный» инвариант (28). Так, например, из интеграла магнитной спиральности

$$I_h\{\mathbf{B}\} = \int (\mathbf{AB})d\mathbf{r}$$

получается интеграл перекрестной спиральности

$$I_c = \int (\mathbf{A\Omega})d\mathbf{r},$$

который характеризует число зацеплений вихревых и магнитных линий.

В соответствии с изложенным выше формализмом перейдем к гамильтонову описанию системы (22). Обобщенные импульсы определяются в данном случае формулами

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1 + \frac{e}{c}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{p}_2 = -\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{29}$$

Гамильтониан имеет следующий вид:

$$\mathscr{H}_{2f} = \int \left(\frac{n_1(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}{2m} + \frac{c^2}{8\pi e^2}(\mathrm{rot}\ \mathbf{p}_2)^2 + \varepsilon(n_1, n_2) \right) d\mathbf{r}. \tag{30}$$

Для общности рассмотрим все двухжидкостные гамильтонианы специального вида $\mathscr{H}\{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, -\alpha\ \mathrm{rot}\ \mathbf{p}_2, n_1, n_2\}$, где α — параметр. Введем обозначения

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{B} = -\alpha\ \mathrm{rot}\ \mathbf{p}_2.$$

Все такие системы имеют интеграл движения

$$n_1 - n_2 = C(\mathbf{r}).$$

Нас интересует случай $n_1 = n_2 = n$, для которого уравнения движения переписываются следующим образом:

$$\mathbf{p}_t = \left[\left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{p}} \right) \times \frac{\mathrm{rot}\ \mathbf{p}}{n} \right] - \nabla \left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta n} \right) + \left[\mathrm{rot} \left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{B}} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{n} \right], \tag{31}$$

$$\mathbf{B}_t = \mathrm{rot} \left[\left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{p}} - \alpha\ \mathrm{rot} \left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{B}} \right) \right) \times \frac{\mathbf{B}}{n} \right], \tag{32}$$

$$n_t + \nabla \left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{p}} \right) = 0. \tag{33}$$

Скобка Пуассона для таких систем, как легко проверить, имеет вид

$$\begin{aligned} \{F, G\} = &\int \left(\frac{\mathbf{B}}{n} \left(\left[\mathrm{rot} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{p}} \right] - \left[\mathrm{rot}\ \frac{\delta G}{\delta \mathbf{B}} \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{p}} \right] \right) \right) d\mathbf{r} + \\ &+ \int \left(\frac{\mathrm{rot}\ \mathbf{p}}{n} \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{p}} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{p}} \right] \right) d\mathbf{r} - \alpha \int \left(\frac{\mathbf{B}}{n} \left[\mathrm{rot}\ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} \times \mathrm{rot}\ \frac{\delta G}{\delta \mathbf{B}} \right] \right) d\mathbf{r} + \\ &+ \int \left(\frac{\delta G}{\delta n} \nabla \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{p}} \right) - \frac{\delta F}{\delta n} \nabla \left(\frac{\delta G}{\delta \mathbf{p}} \right) \right) d\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{34}$$

Если устремить α к нулю, то данная скобка перейдет в скобку Пуассона обычной МГД [17]. Такой предел соответствует бесконечному увеличению абсолютных значений каждого из обобщенных импульсов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ при условии конечности их суммы.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕБЕРА ДЛЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Посмотрим теперь, во что трансформируется представление Вебера для ионной жидкости при предельном переходе $\alpha \to 0$, в результате которого скорости течения электронной и ионной жидкостей совпадают. Пока α конечно, мы имеем два различных, хотя и мало отличающихся друг от друга отображения $\mathbf{x}_1(\mathbf{a})$ и $\mathbf{x}_2(\mathbf{c})$, где $\mathbf{a}$ — маркер ионной жидкости, $\mathbf{c}$ — маркер электронной жидкости. Запишем соответствующие представления Вебера для каждого из обобщенных импульсов:

$$\mathbf{p}_1 = \nabla a_\mu u^{(1)}_{0\mu}(\mathbf{a}) + \nabla\varphi^{(1)}, \qquad \mathbf{p}_2 = \nabla c_\mu u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{c}) + \nabla\varphi^{(2)}. \tag{35}$$

При этом зависимости полей $u^{(1)}_{0\mu}(\mathbf{a})$ и $u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{c})$ таковы, что если их привести к одному аргументу, то их сумма окажется конечной, но малой в сравнении с каждым из слагаемых:

$$u^{(1)}_{0\mu}(\mathbf{a}) + u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{a}) = u_{0\mu}(\mathbf{a}).$$

Поскольку $\mathbf{x}_1(\mathbf{a})$ и $\mathbf{x}_2(\mathbf{c})$ почти совпадают, мы вправе утверждать, что в следующем выражении (где аргумент t для простоты не пишем)

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \mathbf{d}(\mathbf{a}(\mathbf{r}))$$

величина $\mathbf{d}(\mathbf{a}(\mathbf{r}))$ мала по сравнению с остальными членами и имеет малость порядка α. А так как концентрация ионов равна концентрации электронов, то имеется дополнительное условие

$$\det||\partial\mathbf{a}/\partial\mathbf{r}|| = \det||\partial\mathbf{c}/\partial\mathbf{r}||,$$

из которого для малых $\mathbf{d}$ следует равенство $(\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{d}) = 0$. Возьмем теперь сумму двух выражений из (35) и учтем в ней только члены, которые не малы при малом α:

$$\mathbf{p} = \nabla a_\mu u_{0\mu}(\mathbf{a}) + \nabla c_\mu u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{c}) - \nabla a_\mu u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{a}) + \nabla\tilde{\varphi} \approx$$
$$\approx \nabla a_\mu u_{0\mu}(\mathbf{a}) + \nabla d_\mu u^{(2)}_{0\mu}(\mathbf{a}) + \nabla a_\mu d_\lambda u^{(2)}_{0\mu,\lambda}(\mathbf{a}) + \nabla\tilde{\varphi}.$$

После этого уже не будем делать различия между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$. Вводя обозначения

$$\varphi = d_\mu u^{(2)}_{0\mu} + \tilde{\varphi}, \quad d_\lambda/\alpha = -\epsilon_{\lambda\alpha\beta}S_{\beta,\alpha}(\mathbf{a},t)$$

для соленоидального поля $\mathbf{d}(\mathbf{a},t)/\alpha$, с учетом равенства

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) = -\alpha\ \mathrm{rot}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}^{(2)}_0(\mathbf{a})$$

перепишем это соотношение в виде

$$p_k\frac{\partial x_k}{\partial a_\mu} = u_{0\mu}(\mathbf{a}) + \varphi_{,\mu}(\mathbf{a},t) + B_{0\lambda}(\mathbf{a})(S_{\lambda,\mu}(\mathbf{a},t) - S_{\mu,\lambda}(\mathbf{a},t)). \tag{36}$$

Данная формула являет собой обобщение представления Вебера в одножидкостной гидродинамике на случай, когда в системе имеется вмороженное магнитное поле [14]. Покажем, что она может быть получена также непосредственно путем частичного интегрирования уравнений МГД, записанных в лагранжевом представлении. Лагранжиан МГД имеет вид

$$\mathscr{L}_* = \int\left(\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \rho\tilde{\varepsilon}(\rho) - \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right)d\mathbf{r}.$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}(\rho)$ — удельная внутренняя энергия. Давление выражается через нее по формуле

$$p(\rho) = \rho^2(\partial\tilde{\varepsilon}/\partial\rho),$$

а энтальпия — по формуле

$$w(\rho) = \partial(\tilde{\varepsilon}\rho)/\partial\rho.$$

Первый член равен кинетической энергии, второй — внутренней энергии, а последний представляет собой магнитную энергию. В терминах отображения $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ лагранжиан $\mathscr{L}_*$ записывается следующим образом [22]:

$$\mathscr{L}_* = \int \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} d\mathbf{a} - \int \tilde{\varepsilon}(J_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{a}))d\mathbf{a} - \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{x}}{J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})}\right)^2 J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})d\mathbf{a}. \tag{37}$$

Здесь для представления вмороженного магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ через лагранжевы величины использована формула, аналогичная (21). Обобщенное уравнение Эйлера для одножидкостных моделей с вмороженным магнитным полем может быть получено аналогично (7) и имеет вид

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\mathbf{v}}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\left[\mathbf{B}\times \mathrm{rot}\,\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\mathbf{B}}\right] + \nabla\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta v_m}\right)\nabla v_m\right), \tag{38}$$

что в данном случае дает

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w(\rho) + \frac{1}{4\pi\rho}[\mathrm{rot}\ \mathbf{B}\times\mathbf{B}]. \tag{39}$$

Рассматривая производную по времени от величин $p_k(\partial x_k/\partial a_\mu)$, можно без особого труда прийти к представлению (36), причем уравнения движения для фигурирующих там величин φ и $\mathbf{S}$ гласят:

$$\dot{\varphi}(\mathbf{a}, t) = \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho}\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\mathbf{p}}\right) - \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\rho}\right)\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{x}(\mathbf{a},t)}, \tag{40}$$

$$\dot{S}_\mu(\mathbf{a}, t) = -\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial a_\mu}\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\mathbf{B}}\right)\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{x}(\mathbf{a},t)}. \tag{41}$$

При этом подразумевается, что в данные уравнения подставлено соответствующее представление для вмороженного магнитного поля (типа формулы (21)), а также представление (36) для поля импульса. Вместе с уравнением для $\mathbf{x}(\mathbf{a})$

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\mathbf{p}}\right)\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{x}(\mathbf{a},t)} \tag{42}$$

(40) и (41) образуют замкнутую систему, которая соответствует фиксированной топологии течения, определяемой полями $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{u}_0$. Здесь гамильтониан $\mathscr{H}\{\rho, \mathbf{p}, \mathbf{B}\}$, записанный в эйлеровом представлении, получается из лагранжиана $\mathscr{L}\{\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}\}$ по обычной формуле (12), однако зависит не только от импульса и плотности, но также и от магнитного поля. Так, гамильтониан МГД имеет вид

$$\mathscr{H}_* = \int \left(\rho\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \rho\tilde{\varepsilon}(\rho) + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right)d\mathbf{r},$$

и уравнения движения (42), (41), (40) выглядят следующим образом:

$$\dot{x}_k(\mathbf{a}) = p_k = \frac{\partial a_\mu}{\partial x_k}\left(u_{0\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_\mu} + B_{0\alpha}\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial a_\mu} - \frac{\partial S_\mu}{\partial a_\alpha}\right)\right), \tag{43}$$

$$-\dot{S}_\alpha(\mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial x_k(\mathbf{a})}{\partial a_\alpha}\frac{\partial x_k(\mathbf{a})}{\partial a_\mu}\frac{B_{0\mu}(\mathbf{a})}{J_\mathbf{x}(\mathbf{a})}, \tag{44}$$

$$\dot{\varphi}(\mathbf{a}) - \frac{p_k(\mathbf{a})p_k(\mathbf{a})}{2} + w(J_\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{a})) = 0. \tag{45}$$

Если определить закон преобразования компонент вектора $\mathbf{S}$ при переходе к эйлерову представлению в виде

$$S_k(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_\mu}{\partial x_k}S_\mu(\mathbf{a}),$$

то из (43) легко получить следующую параметризацию поля скорости в МГД:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = u_{0\mu}(\mathbf{a})\nabla a_\mu + \nabla\varphi(\mathbf{r}) + \frac{[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \operatorname{rot}\mathbf{S}(\mathbf{r})]}{\rho(\mathbf{r})}.$$

Наличие члена с $\mathbf{u}_0(\mathbf{a})$ обеспечивает нетривиальные значения перекрестных топологических инвариантов. В частном случае $\mathbf{u}_0 = 0$ данная формула совпадает с результатом работы [23], где рассматривался вопрос о введении канонических переменных в МГД и было показано, что (при $\mathbf{u}_0 = 0$) поля $(\mathbf{B}, \mathbf{S})$ и (ρ, φ) образуют канонически-сопряженные пары.

5. СИСТЕМЫ МГД-ТИПА В НЕСЖИМАЕМОМ ПРЕДЕЛЕ

Перейдем к несжимаемой МГД-жидкости. Сначала для простоты рассмотрим случай конечного α, когда имеются два различных соленоидальных поля $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$, каждое из которых вморожено в свою субстанцию. Вся динамика при этом происходит в классе изозавихренных полей [24], а из изозавихренности следует топологическая эквивалентность [19], которая выражается формулами, аналогичными (21)

$$\mathbf{\Omega}_1(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1(\mathbf{a}, t))(\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}_1(\mathbf{a}, t)d\mathbf{a}, \tag{46}$$

$$\mathbf{\Omega}_2(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2(\mathbf{c}, t))(\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})\nabla_\mathbf{c})\mathbf{R}_2(\mathbf{c}, t)d\mathbf{c}. \tag{47}$$

Здесь отображения $\mathbf{R}_1(\mathbf{a}, t)$ и $\mathbf{R}_2(\mathbf{c}, t)$, в отличие от $\mathbf{x}_1(\mathbf{a}, t)$ и $\mathbf{x}_2(\mathbf{c}, t)$, не несут в себе никакой информации о плотности. В частности, соответствующие якобианы $J_1 = \det\|\partial\mathbf{R}_1/\partial\mathbf{a}\|$ и $J_2 = \det\|\partial\mathbf{R}_2/\partial\mathbf{c}\|$ не обязаны равняться единице [12]. Таким образом, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ не являются теперь маркерами жидких частиц, а представляют собой более формальные величины. Вся информация о топологических свойствах содержится в неизменных во времени соленоидальных полях $\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})$ и $\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})$. Данное представление полей $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$ обладает калибровочной свободой, поскольку одно и то же поле можно параметризовать различными отображениями $\mathbf{R}$. Действительно, можно перейти к таким координатам $\nu_1(\mathbf{a}), \nu_2(\mathbf{a}), \xi(\mathbf{a})$ в формуле (46), что она перепишется в следующем виде:

$$\mathbf{\Omega}_1(\mathbf{r},t) = \int_{\mathcal{N}_1} d^2\nu \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1(\nu,\xi,t)) \frac{\partial \mathbf{R}_1(\nu,\xi,t)}{\partial \xi} d\xi \tag{48}$$

и аналогично для $\mathbf{\Omega}_2$. Здесь $\nu \in \mathcal{N}_1$ — маркер вихревой линии, лежащий в фиксированном двумерном многообразии $\mathcal{N}_1$, ξ — параметр вдоль линии. Локально такая форма записи справедлива для произвольного вмороженного соленоидального поля, глобально — только при условии замкнутости силовых линий. Калибровочная свобода связана как с возможностью выбора параметра вдоль линий, так и с тождественностью самих вихревых линий, которая позволяет переобозначение маркеров ν. Калибровочные преобразования первого вида существуют при любой топологии поля, преобразования же второго вида — только при наличии у $\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})$ глобально определенных вихревых поверхностей.

Вариационные производные по новым переменным определяются формулами

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{R}_1} = \left[(\mathbf{\Omega}_1^0 \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{R}_1 \times \mathrm{rot}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{\Omega}_1(\mathbf{R}_1)} \right) \right], \tag{49}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{R}_2} = \left[(\mathbf{\Omega}_2^0 \nabla_{\mathbf{c}}) \mathbf{R}_2 \times \mathrm{rot}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{\Omega}_2(\mathbf{R}_2)} \right) \right]. \tag{50}$$

Характерным свойством новых вариационных производных является их поперечность по отношению к направлению соответствующих вихревых линий. Как нетрудно понять, только поперечные смещения $\delta\mathbf{R}_1$ и $\delta\mathbf{R}_2$ вызывают изменения полей и, соответственно, варьируют гамильтониан.

Уравнения движения для полей $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$, являющихся роторами обобщенных импульсов, следуют из неканонической скобки Пуассона

$$\{F,G\} = \int \left(\mathbf{\Omega}_1 \left[\mathrm{rot}\,\frac{\delta F}{\delta \mathbf{\Omega}_1} \times \mathrm{rot}\,\frac{\delta G}{\delta \mathbf{\Omega}_1} \right] + \mathbf{\Omega}_2 \left[\mathrm{rot}\,\frac{\delta F}{\delta \mathbf{\Omega}_2} \times \mathrm{rot}\,\frac{\delta G}{\delta \mathbf{\Omega}_2} \right] \right) d\mathbf{r}. \tag{51}$$

Эти уравнения гласят

$$\mathbf{\Omega}_{1,t} = \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{\Omega}_1\right], \qquad \mathbf{\Omega}_{2,t} = \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{\Omega}_2\right]. \tag{52}$$

Подстановка сюда представления (46),(47) после ряда промежуточных выкладок (аналогично тому, как это сделано в работе [12]) позволяет с учетом формул (49),(50) записать уравнения движения для $\mathbf{R}_1(\mathbf{a},t)$ и $\mathbf{R}_2(\mathbf{c},t)$ в следующем виде:

$$[(\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_{1,t}] = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}_1, \qquad [(\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})\nabla_{\mathbf{c}})\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_{2,t}] = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}_2. \tag{53}$$

Этими уравнениями определяются только поперечные скорости движения. Скорости движения вдоль вихревых линий могут быть выбраны произвольно, что не влияет на динамику полей и связано с продольной калибровочной свободой. Данные уравнения следуют из вариационного принципа с лагранжианом

$$L = (1/3) \int d\mathbf{a}([\mathbf{R}_{1,t} \times \mathbf{R}_1] \cdot (\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}_1) +$$
$$+ (1/3) \int d\mathbf{c}([\mathbf{R}_{2,t} \times \mathbf{R}_2](\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})\nabla_{\mathbf{c}})\mathbf{R}_2) - \mathcal{H}\{\mathbf{\Omega}_1\{\mathbf{R}_1\}, \mathbf{\Omega}_2\{\mathbf{R}_2\}\}. \tag{54}$$

Подчеркнем, что при составлении уравнений движения путем варьирования выражения (54) допустимы произвольные вариации $\delta\mathbf{R}_1$ и $\delta\mathbf{R}_2$, в том числе такие, которые не сохраняют полные объемы, заключенные внутри каких-либо вихревых поверхностей. Нетрудно проверить, что законы сохранения всех подобных величин, которые должны иметь место благодаря несжимаемости обеих жидкостей, в действительности являются интегралами движения системы (53) и следуют по теореме Нётер из симметрии лагранжиана по отношению к переобозначению маркеров вихревых линий. Таким образом, при $\alpha \neq 0$ ситуация полностью аналогична той, что имеет место в обычной одножидкостной гидродинамике при описании несжимаемых течений посредством вмороженных вихревых линий [12, 15]. Вся разница состоит в наличии двух вмороженных полей вместо одного. Выпишем здесь конкретный двухжидкостный гамильтониан, который при подстановке в (54) в пределе $\alpha \to 0$ соответствует обычной несжимаемой МГД:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^{\alpha}_{MHD} = {} & \frac{\alpha^2}{8\pi}\int \frac{((\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})\nabla_{\mathbf{c}})\mathbf{R}_2(\mathbf{c}))^2}{\det\|\partial\mathbf{R}_2/\partial\mathbf{c}\|}d\mathbf{c} + \\
& + \frac{1}{8\pi}\iint \frac{((\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c}_1)\nabla_1)\mathbf{R}_2(\mathbf{c}_1)\cdot(\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c}_2)\nabla_2)\mathbf{R}_2(\mathbf{c}_2))}{|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}_1)-\mathbf{R}_2(\mathbf{c}_2)|}d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 + \\
& + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{((\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}_1(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c})\nabla_{\mathbf{c}})\mathbf{R}_2(\mathbf{c}))}{|\mathbf{R}_1(\mathbf{a})-\mathbf{R}_2(\mathbf{c})|}d\mathbf{a}d\mathbf{c} + \\
& + \frac{1}{8\pi}\iint \frac{((\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a}_1)\nabla_1)\mathbf{R}_1(\mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{\Omega}_1^0(\mathbf{a}_2)\nabla_2)\mathbf{R}_1(\mathbf{a}_2))}{|\mathbf{R}_1(\mathbf{a}_1)-\mathbf{R}_1(\mathbf{a}_2)|}d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Первый член в этом выражении есть магнитная энергия

$$
\mathscr{M} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}^2 d\mathbf{r},
$$

а последние три слагаемых представляют собой кинетическую энергию несжимаемой жидкости

$$
\mathscr{K} = -\frac{1}{2}\int \mathbf{\Omega}\Delta^{-1}\mathbf{\Omega}d\mathbf{r}.
$$

Если $\mathbf{\Omega}_2^0(\mathbf{c}) = 0$, то мы имеем здесь гамильтониан обычной гидродинамики.

Предельный переход $\alpha \to 0$ в представлении полей, в уравнениях движения и в лагранжиане можно провести аналогично тому, как была получена формула (36). В результате придем к следующей параметризации полей $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2$ и $\mathbf{B}$:

$$
\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t) = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(\mathbf{a},t))((\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a}) + \mathrm{rot}_{\mathbf{a}}[\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\times\mathbf{U}(\mathbf{a},t)])\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a},t)d\mathbf{a}, \tag{56}
$$

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(\mathbf{a},t))(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a},t)d\mathbf{a}. \tag{57}
$$

Здесь поле $\mathbf{U}(\mathbf{a},t)$ не обязано быть соленоидальным по отмеченной выше причине произвольности якобианов отображений $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, фигурирующих в (46), (47). Связь вариационной производной $\delta\mathscr{H}/\delta\mathbf{U}$ со старыми вариационными производными по $\mathbf{\Omega}$ и по $\mathbf{B}$ дается формулой

$$-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta U_\mu} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial a_\mu}\left[(\mathbf{B}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times \mathrm{rot}_\mathbf{r}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{\Omega}(\mathbf{R})}\right]. \tag{58}$$

Аналогичная формула для $\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}$ гласит

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{R}} = \left[(\mathbf{B}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times \mathrm{rot}_\mathbf{r}\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{B}(\mathbf{R})}\right)\right] + \\ + \left[((\mathbf{\Omega}_0 + \mathrm{rot}_\mathbf{a}[\mathbf{B}_0\times\mathbf{U}])\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times \mathrm{rot}_\mathbf{r}\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{\Omega}(\mathbf{R})}\right)\right]. \tag{59}$$

Скобка Пуассона для несжимаемых МГД-систем может быть получена из (51) заменой $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega} + \alpha^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{\Omega}_2 = -\alpha^{-1}\mathbf{B}$ и взятием предела $\alpha\to 0$. Она имеет вид [17]

$$\{F,G\} = \int\left(\mathbf{\Omega}\cdot\left[\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{\Omega}}\times\mathrm{rot}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{\Omega}}\right]\right)d\mathbf{r} + \\ + \int\left(\mathbf{B}\cdot\left(\left[\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{B}}\times\mathrm{rot}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{\Omega}}\right] - \left[\mathrm{rot}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{B}}\times\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{\Omega}}\right]\right)\right)d\mathbf{r}. \tag{60}$$

Подстановка соотношений (56), (57) в уравнения движения для $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega})\times\mathbf{\Omega}\right] + \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{B})\times\mathbf{B}\right], \tag{61}$$

$$\mathbf{B}_t = \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega})\times\mathbf{B}\right], \tag{62}$$

которые следуют из (60), с учетом (58),(59) дает уравнения движения для $\mathbf{U}$ и $\mathbf{R}$

$$[(\mathbf{B}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times\mathbf{R}_t](\partial\mathbf{R}/\partial a_\lambda) = -\delta\mathcal{H}/\delta U_\lambda, \tag{63}$$

$$[((\mathbf{\Omega}_0 + \mathrm{rot}_\mathbf{a}[\mathbf{B}_0\times\mathbf{U}])\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times\mathbf{R}_t] - [(\mathbf{B}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times(\mathbf{U}_t\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}] = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}. \tag{64}$$

Предельный лагранжиан, как легко проверить, выглядит следующим образом:

$$L = \int d\mathbf{a}([(\mathbf{B}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}\times(\mathbf{U}\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}]\cdot\mathbf{R}_t) + \\ + (1/3)\int d\mathbf{a}([\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}]\cdot(\mathbf{\Omega}_0\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}) - \mathcal{H}\{\mathbf{\Omega}\{\mathbf{R},\mathbf{U}\},\mathbf{B}\{\mathbf{R}\}\}, \tag{65}$$

причем гамильтониан несжимаемой МГД $\mathcal{H}_{MHD}$ дается выражением

$$\mathcal{H}_{MHD} = \frac{1}{8\pi}\int\frac{((\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}(\mathbf{a}))^2}{\det\|\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{a}\|}d\mathbf{a} + \\ + \frac{1}{8\pi}\int\!\!\int\frac{((\mathbf{\Omega}(\mathbf{a}_1)\nabla_1)\mathbf{R}(\mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{\Omega}(\mathbf{a}_2)\nabla_2)\mathbf{R}(\mathbf{a}_2))}{|\mathbf{R}(\mathbf{a}_1)-\mathbf{R}(\mathbf{a}_2)|}d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2, \tag{66}$$

где для краткости введено обозначение

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{a}) = \mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a}) + \mathrm{rot}_\mathbf{a}[\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\times\mathbf{U}(\mathbf{a},t)].$$

Таким образом, мы имеем вариационный принцип для гамильтоновской динамики МГД-типа двух соленоидальных векторных полей, топологические свойства которых фиксированы посредством $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$. Подчеркнем разницу между системой уравнений (40), (41), (42), которая может описывать несжимаемую жидкость лишь как предельный и «неудобный» с технической точки зрения случай, и уравнениями (63), (64), при выводе которых несжимаемость предполагалась с самого начала и активно использовалась, в результате чего все динамические величины в них свободны от связей. Результатом решения системы (40), (41), (42) является действительное движение $\mathbf{x}(\mathbf{a},t)$ жидких частиц с сохранением объемов, тогда как в результате решения системы (63),(64) можно определить поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ и $\Omega(\mathbf{r},t)$ по формулам (57) и (56), и даже движение вмороженных магнитных линий, но не настоящее распределение частиц вдоль этих линий. Другими словами, лагранжиан (65) позволяет получить больше информации о течении, чем дает эйлерово представление, но меньше, чем полное лагранжево описание.

Заметим, что полученные уравнения движения имеют калибровочно-инвариантный вид, причем их разрешение относительно временных производных возможно лишь благодаря калибровочной инвариантности гамильтониана. Две произвольные функции, возникающие при этом, можно выбирать из соображений удобства. Например, задавая форму магнитных линий в различных координатных системах, можно параметризовать их одной из трех координат, а компоненту вектора $\mathbf{U}$ вдоль $\mathbf{B}_0$ положить равной нулю.

Обсудим теперь вопрос о функционалах Казимира скобки Пуассона (60). Эта скобка является пределом $\alpha \to 0$ двухжидкостной скобки (51), в которой $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega} + \alpha^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{\Omega}_2 = = -\alpha^{-1}\mathbf{B}$. По определению, функционалы Казимира $C\{\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{\Omega}_2\}$ скобки (51) удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\delta C/\delta\mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{\Omega}_1] = 0, \qquad \mathrm{rot}[\mathrm{rot}(\delta C/\delta\mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{\Omega}_2] = 0. \tag{67}$$

Геометрический смысл условий (67) заключается в том, что функционалы Казимира C являются константами на множестве изозавихренных полей:

$$\delta C = 0, \quad \text{если} \quad \delta\mathbf{\Omega}_1 = \mathrm{rot}[\delta\mathbf{x}_1 \times \mathbf{\Omega}_1], \quad \delta\mathbf{\Omega}_2 = \mathrm{rot}[\delta\mathbf{x}_2 \times \mathbf{\Omega}_2],$$

причем малые смещения $\delta\mathbf{x}_1$ и $\delta\mathbf{x}_2$ сохраняют объемы:

$$(\nabla\delta\mathbf{x}_1) = 0, \qquad (\nabla\delta\mathbf{x}_2) = 0.$$

Из равенств (67) следует, что

$$[\mathrm{rot}(\delta C/\delta\mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{\Omega}_1] = \nabla\Psi_C^{(1)}, \qquad [\mathrm{rot}(\delta C/\delta\mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{\Omega}_2] = \nabla\Psi_C^{(2)},$$

где $\Psi_C^{(1)}$, $\Psi_C^{(2)}$ — некоторые скалярные функции, причем их множества уровня являются вихревыми поверхностями, как явствует из данных формул. Имеет смысл особо выделить такие функционалы Казимира C^t, для которых $\Psi_{C^t}^{(1)} \equiv 0$, $\Psi_{C^t}^{(2)} \equiv 0$. Такие функционалы остаются неизменными и в том случае, когда смещения $\delta\mathbf{x}_1$ и $\delta\mathbf{x}_2$ не сохраняют объемы. Естественно поэтому отождествить C^t с топологическими инвариантами полей $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$. Параметризация (46), (47) фиксирует именно C^t, поскольку якобианы отображений $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ не обязаны равняться единице. Остальные функционалы Казимира скобки (51), которые связаны с сохранением объемов вихревых трубок, являются интегралами движения динамической системы (53). Таким образом, маркировочная симметрия жидкостей при переходе к описанию течений посредством $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, вообще говоря, исчерпывается не полностью — в лагранжиане (54) остается симметрия по отношению к переобозначению маркеров вихревых линий. Тем не менее следует учитывать, что наличие у полей $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$ глобально определенных вихревых поверхностей и тем более замкнутость вихревых линий есть некая дополнительная симметрия. Поля с такими свойствами являются нетипичными. Поэтому течения общего вида, в которых вихревые линии запутаны сложным образом, описываются вполне адекватно уже формулами (46), (47) и вряд ли требуют какого-либо иного представления.

В пределе $\alpha \to 0$ мы имеем параметризацию (56), (57), фиксирующую все топологические функционалы Казимира C^t, которые в данном случае вырождаются в топологические инварианты магнитного поля и перекрестные инварианты. Те и другие удовлетворяют условиям

$$[\mathrm{rot}(\delta C^t/\delta\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega}] + [\mathrm{rot}(\delta C^t/\delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = 0,$$

$$[\mathrm{rot}(\delta C^t/\delta\mathbf{B}) \times \mathbf{\Omega}] = 0.$$

Остальные же функционалы Казимира скобки (60), например, объемы магнитных трубок при наличии глобальных магнитных поверхностей, являются динамическими законами сохранения системы (63), (64).

В заключение этого раздела укажем, что скобка Пуассона (60) может быть непосредственно пересчитана к новым переменным с помощью формул (58) и (59). После введения обозначений

$$\mathbf{h} = (\mathbf{B}_0\nabla_a)\mathbf{R}, \quad \mathbf{w} = ((\mathbf{\Omega}_0 + \mathrm{rot}_{\mathbf{a}}[\mathbf{B}_0 \times \mathbf{U}])\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}, \quad \frac{\delta^* F}{\delta\mathbf{U}} = \frac{\delta F}{\delta U_\mu}\frac{\partial a_\mu}{\partial\mathbf{R}}$$

она записывается в следующем виде:

$$\{F,G\} = \int\left(\mathbf{h}\cdot\left[\frac{\delta^* G}{\delta\mathbf{U}} \times \frac{\delta^* F}{\delta\mathbf{U}}\right]\right)\frac{(\mathbf{hw})}{|\mathbf{h}|^4}d\mathbf{a} -$$
$$-\int\left(\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|^2}\cdot\left(\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{R}} \times \frac{\delta^* G}{\delta\mathbf{U}}\right] - \left[\frac{\delta G}{\delta\mathbf{R}} \times \frac{\delta^* F}{\delta\mathbf{U}}\right]\right)\right)d\mathbf{a}. \tag{68}$$

Важно, что при вычислении использована калибровочная инвариантность функционалов, благодаря которой имеют место тождества

$$\left(\mathbf{h}\frac{\delta^* F}{\delta\mathbf{U}}\right) = 0, \qquad \left(\mathbf{w}\frac{\delta^* F}{\delta\mathbf{U}}\right) - \left(\mathbf{h}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{R}}\right) = 0.$$

Отметим, что при непосредственном пересчете скобки к новым переменным не потребовались вариационные производные по $\mathbf{\Omega}_0$ и $\mathbf{B}_0$. Этот факт подтверждает, что данные поля несут в себе информацию о функционалах Казимира.

6. ДВУМЕРНАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

В двумерной несжимаемой МГД формализму магнитных линий можно придать более простой вид. Магнитное поле на плоскости задается одной скалярной функцией

$A(x, y, t)$ (z-компонентой векторного потенциала), линии уровня которой совпадают с магнитными линиями и переносятся течением. Плоскость (a_1, a_2) разбивается на области, разделенные сепаратриссами — теми линиями уровня функции $A(a_1, a_2)$, которые проходят через ее седловые точки. В каждой такой области можно ввести криволинейные координаты (ξ, A), причем координата ξ параметризует магнитные линии и допускает калибровочную свободу в своем определении. Вихревое поле $\mathbf{\Omega}$ и вектор $\mathbf{U}$ также имеют единственную отличную от нуля z-компоненту. Параметризация полей для двумерных течений переписывается в виде

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\xi, A, t))(\Omega_0(\xi, A) - U_{,\xi}) d\xi dA, \tag{69}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\xi, A, t))\mathbf{R}_{,\xi} d\xi dA, \tag{70}$$

где $\mathbf{R} = (x, y)$. Уравнения движения для U и $\mathbf{R}$ при этом гласят

$$x_{,\xi} y_t - x_t y_{,\xi} = -\delta\mathscr{H}/\delta U, \tag{71}$$

$$(\Omega_0(\xi, A) - U_{,\xi})y_t + U_t y_{,\xi} = -\delta\mathscr{H}/\delta x, \tag{72}$$

$$(\Omega_0(\xi, A) - U_{,\xi})x_t + U_t x_{,\xi} = \delta\mathscr{H}/\delta y. \tag{73}$$

Удобно ввести новую динамическую переменную $\Phi(\xi, A, t)$, определенную с точностью до произвольной аддитивной функции $f(A)$ согласно равенству

$$\Phi_{,\xi} = \Omega_0(\xi, A) - U_{,\xi}. \tag{74}$$

Вообще говоря, Φ является неоднозначной функцией. Ее изменение при обходе вдоль замкнутой магнитной линии определяется интегралом

$$\Delta(A) = \oint \Omega_0(\xi, A) d\xi.$$

Это изменение зависит от маркера линии A, но не зависит от времени и является поэтому топологическим интегралом движения. Сохраняющиеся величины $\Delta(A)$, как нетрудно понять, тесно связаны с перекрестными инвариантами — функционалами Казимира скобки Пуассона (60), которые в двумерном случае могут быть записаны в виде

$$\mathscr{C}_F = \int \Omega F(A) dx dy.$$

Легко видеть, что лагранжиан для динамической системы (71)–(73) можно записать в форме

$$\mathscr{L}_{MHD2D} = \int (x_{,\xi} y_t - x_t y_{,\xi})\Phi d\xi dA - \mathscr{H}\{x, y, \Phi\}. \tag{75}$$

Мы видим здесь, что кинетическая часть лагранжиана двумерной МГД (для отдельной магнитной линии) точно такая же, как для динамики свободной поверхности идеальной жидкости в двумерных потенциальных течениях [25]. Сохранение площадей, ограниченных каждой магнитной линией, следует из симметрии гамильтониана по отношению к группе преобразований

$$\Phi(\xi, A) \to \Phi(\xi, A) + \tau f(A).$$

Локально в качестве параметра ξ можно взять одну из декартовых координат. Допустим, что форма магнитных линий задается функцией $y(x, A, t)$. В таком случае переменные y и Φ являются канонически-сопряженными величинами, которые подчиняются уравнениям движения

$$y_t = \delta\mathscr{H}/\delta\Phi, \qquad \Phi_t = -\delta\mathscr{H}/\delta y.$$

В качестве простейшего примера выпишем гамильтониан для нелинейных альфвеновских волн на фоне однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0 = (1, 0)$:

$$\mathscr{H}_{A2D} = \frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{1+y_{,x}^2}{y_{,A}}\right)dxdA - \\ -\frac{1}{8\pi}\iint \Phi_{,x_1}(x_1, A_1)\Phi_{,x_2}(x_2, A_2)\ln\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)dx_1dA_1dx_2dA_2. \qquad (76)$$

Состоянию покоя с полем $(1, 0)$ соответствует решение $\Phi = 0, y = A$. Квадратичная по малым возмущениям $\Phi(x, A, t)$ и $\eta(x, A, t) = y(x, A, t) - A$ часть данного гамильтониана имеет вид

$$\mathscr{H}_{A2D}^{(2)} = \int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left(\frac{k_1^2}{k_1^2+k_2^2}\frac{|\Phi_\mathbf{k}|^2}{2} + \frac{k_1^2+k_2^2}{8\pi}|\eta_\mathbf{k}|^2\right), \qquad (77)$$

из которого следует известный закон дисперсии для альфвеновских волн малой амплитуды $\omega^2(\mathbf{k}) = k_1^2/4\pi$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. Основные результаты данной работы содержатся, во-первых, в формуле (36), которая представляет собой обобщение представления Вебера на случай, когда имеется магнитное поле, вмороженное в жидкость; во-вторых, в формулах (56), (57), (63)–(66), которые дают описание несжимаемых МГД-течений с фиксированной топологией и устанавливают вариационный принцип для динамики новых объектов — $\mathbf{U}$ и $\mathbf{R}$. В работе также показано, что описание несжимаемых течений посредством вмороженных вихревых полей возможно при любом числе N компонент в N-жидкостных гидродинамических моделях (поскольку формулы (46), (47), (53) и (54) допускают очевидное обобщение).

Автор благодарен Е. А. Кузнецову за внимание к работе и полезные советы. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00093), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96093), а также гранта Landau Scholarship.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).

2. R. Salmon, Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **88**, 127 (1982).
3. R. Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225 (1988).
4. Н. Пэдхай, Ф. Дж. Моррисон, Физика плазмы **22**, 960 (1996).
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
6. В. И. Ильгисонис, В. П. Лахин, Физика плазмы **2**, 64 (1999).
7. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва (1947).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
9. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
10. K. Elsässer, Phys. Plasmas **1**, 3161 (1994).
11. В. В. Яньков, ЖЭТФ **107**, 414 (1995).
12. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
13. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, ЖЭТФ **115**, 894 (1999).
14. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, in *MHD waves and turbulence, Lecture Notes in Physics*, ed. by T. Passot and P.-L. Sulem, Springer-Verlag (1999).
15. V. Berdichevsky, Phys. Rev. E **57**, 2885 (1998).
16. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
17. P. J. Morrison and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980).
18. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
19. М. И. Монастырский, П. В. Сасоров, ЖЭТФ **93**, 1210 (1987).
20. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **83**, 215 (1982).
21. Б. Н. Кувшинов, Физика плазмы **22**, 971 (1996).
22. В. И. Ильгисонис, В. П. Пастухов, Физика плазмы, **22**, 228 (1996).
23. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ДАН СССР **194**, 1288 (1970).
24. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1974).
25. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).