

К ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В. И. Юрченко*

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 15 мая 1998 г.

Для сечения общего вида в предположении, что угловой размер области многократного рассеяния (диффузионной области) невелик, получено кинетическое уравнение для функции распределения по переменной $q = 2 \sin(\vartheta/2)$ и найдены границы его применимости. Ограничений на углы рассеяния не накладываемся. Уравнение имеет решение в виде интеграла. Показано, что решение применимо во всем диапазоне углов от нуля до 180° .

PACS: 34.80.Vm

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория Мольера¹⁾ многократного рассеяния [1, 2] является в настоящее время общепринятой и используется в моделировании и расчетах прохождения частиц через вещество (см., например, [3-6]). В теории используется приближение малых углов, делается замена

$$\sin \vartheta d\vartheta \rightarrow \vartheta d\vartheta,$$

и сечение имеет вид $\sigma(\delta) \propto 1/\delta^4$, δ — угол рассеяния. Найденная в [1,2] функция распределения в области малых углов близка к гауссовой, $f(\vartheta) \approx 2 \exp(-\vartheta^2/\lambda^2)/\lambda^2$, т.е. описывает диффузию частиц в угловом пространстве из-за многократных столкновений с рассеянием на малые углы. Соответствующая область углов в решении с характерным размером λ далее для краткости называется диффузионной. Кроме того, в решении можно выделить так называемую область кратного рассеяния, куда частица попадает, если среди многократной последовательности столкновений несколько из них произошло с рассеянием на большие углы, а также предельную область однократного рассеяния, когда имеется одно такое столкновение и функция распределения имеет вид $f(\vartheta) \propto 1/\vartheta^4$, т.е. следует за угловой зависимостью самого сечения.

В данной работе для сечения общего вида и без привлечения приближения малых углов рассмотрено кинетическое уравнение для функции распределения по переменной

$$q = 2 \sin(\vartheta/2). \tag{1}$$

* E-mail: yurchenko@vxinpz.inp.nsk.su

¹⁾ Краткое изложение этой теории приведено в разд. 3.

Переменная q определяет передачу импульса, сечение также может быть выражено через аналогичную переменную $\chi = 2 \sin(\delta/2)$, кроме того,

$$\sin \vartheta d\vartheta = q dq,$$

что позволяет обобщить результаты, полученные ранее в приближении малых углов. В рамках такого подхода получены решения кинетического уравнения для сечений Резерфорда и Мотта. Точность решений проконтролирована, в частности, методом Монте-Карло во всем диапазоне углов.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Обозначим через \mathbf{i} — вектор направления исходных частиц (рис. 1), $\sigma(\mathbf{nn}')d\Omega/2\pi$ — дифференциальное сечение рассеяния частиц с первоначальным направлением \mathbf{n}' в телесный угол $d\Omega$ по направлению \mathbf{n} , $f(\mathbf{ni}, t)d\Omega/2\pi$ — число частиц в телесном угле $d\Omega$ после прохождения пути t . Исходное кинетическое уравнение следующее:

$$\frac{\partial f(\mathbf{ni}, t)}{\partial t} = -N f(\mathbf{ni}, t) \int \sigma(\mathbf{nn}') \frac{d\Omega'}{2\pi} + N \int \sigma(\mathbf{nn}') f(\mathbf{n}'\mathbf{i}, t) \frac{d\Omega'}{2\pi}, \quad (2)$$

где N — число рассеивающих центров в см^3 , $d\Omega'$ соответствует направлению \mathbf{n}' . В уравнении все величины выражены через косинусы углов. Заметим для дальнейшего, что $d\Omega'$ — элемент поверхности единичной сферы, а интегралы в (2) можно считать интегралами по этой поверхности.

Введем в рассмотрение векторы

$$\chi = \mathbf{n} - \mathbf{n}', \quad \mathbf{q} = \mathbf{n} - \mathbf{i}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{n}' - \mathbf{i}$$

и в соответствии с (1) перейдем от переменных $\cos \delta$, $\cos \vartheta$, $\cos \vartheta'$ к переменным (рис. 1)

$$\chi = 2 \sin(\delta/2) = |\mathbf{n} - \mathbf{n}'|, \quad q = 2 \sin(\vartheta/2) = |\mathbf{n} - \mathbf{i}|, \quad q' = 2 \sin(\vartheta'/2) = |\mathbf{n}' - \mathbf{i}|. \quad (3)$$

При этом

$$f(\mathbf{ni}, t) \sin \vartheta d\vartheta = f(q, t) q dq,$$

в правой части уравнения будет интеграл от $\sigma(\chi)[f(q') - f(q)]$, величины χ , q , q' представляют собой стороны треугольника и $q' = |q - \chi|$. Для полярной оси z в направлении \mathbf{n} $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi$ и явная зависимость q' от q , χ , φ имеет вид

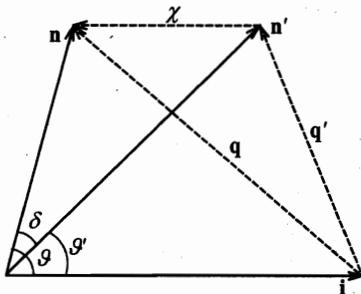


Рис. 1. Геометрическое представление переменных χ , q , q'

$$q'^2 = q^2 - 2(q_{\perp}\chi_{\perp} \cos \varphi + q_z\chi_z) + \chi^2,$$

$$\chi_{\perp}^2 = \chi^2(1 - \chi^2/4), \quad \chi_z = \chi^2/2, \quad q_{\perp}^2 = q^2(1 - q^2/4), \quad q_z = q^2/2.$$

Получим приближенное кинетическое уравнение, в котором интегрирование проводится по плоской области.

В интеграле $\int \sigma(\chi)f(q')\chi d\chi d\varphi$ существенны две области интегрирования: область малых значений χ и область малых q' , т. е. окрестности максимума сечения и максимума функции распределения. Расстояние между центрами этих областей — точками \mathbf{n} и \mathbf{i} — равно q (рис. 1). Первая область имеет размер $\sim (\chi^2)^{1/2}$,

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{\sigma_t} \int_0^2 \chi^2 \sigma(\chi) \chi d\chi$$

(σ_t — полное сечение), и описывает диффузию частиц возле направления \mathbf{n} . Вторая, диффузионная, область решения²⁾ размером

$$\lambda \ll 1, \tag{4}$$

в которой $f(q') \sim 1/\lambda^2 \gg 1$, — описывает рассеяние частиц, идущих под малыми углами в направлении \mathbf{n} , в частности, рассеяние на большие углы. Условие (4) будем считать выполненным. Рассмотрение конкретных примеров показывает, что в противном случае потери энергии частиц в веществе становятся велики и, следовательно, уравнение (2) оказывается не справедливым.

С учетом этого при $q \ll 1$ точки, представленные векторами \mathbf{i} , \mathbf{n} , \mathbf{n}' , ввиду малости χ , q , q' можно считать расположенными в плоскости касательной к сферической поверхности в точке \mathbf{n} . Введем на плоскости цилиндрическую систему координат с центром в точке \mathbf{n} . Элемент поверхности равен $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi = d\chi$ и

$$\frac{\partial f(q, t)}{\partial t} = N \int \sigma(\chi) [f(|\mathbf{q} - \chi|, t) - f(q, t)] \frac{d\chi}{2\pi}. \tag{5}$$

Это кинетическое уравнение, в котором аргументы определены в соответствии с (3), а вектор \mathbf{q} лежит в плоскости интегрирования, будем считать исходным. Рассматриваемое приближение заключается в переходе в уравнении (2) к плоской поверхности или, что то же, к $q'^2 = q^2 - 2q\chi \cos \varphi + \chi^2$. Приближение малых углов, состоящее в замене $\chi, q \rightarrow \delta, \vartheta$, не используется и, как показывает дальнейшее рассмотрение, оказывается излишним. Область определения $f(q)$ примем бесконечной, что возможно, так как при выполнении условия (4) при достаточно больших q будет $f(q) \ll 1$.

Интегрируя (5) по \mathbf{q} , получим условие нормировки, а умножая на q^2 и интегрируя по \mathbf{q} с заменой $q^2 d\mathbf{q} \rightarrow (q^2 + 2q'\chi + \chi^2)dq'$ в первом слагаемом справа, получим $\overline{q^2}$:

$$\int_0^{\infty} f(q)q dq = 1, \quad \overline{q^2} = \int_0^{\infty} f(q)q^3 dq = Nt\sigma_t\overline{\chi^2}.$$

²⁾ Здесь и далее заранее предполагается, что большая часть столкновений происходит с рассеянием на малые углы и это приводит к диффузионному размытию исходного пучка частиц в угловой области размером $\sim \lambda$. Отметим, что далее $\chi^2 \approx \delta^2$, $q^2 \approx \vartheta^2$.

Для уравнения (2) эти интегралы имеют вид (см. разд. 3)

$$\int_0^2 f(q)q dq = 1, \quad \bar{q}^2 = \int_0^2 f(q)q^3 dq = 2[1 - \exp(-Q_1)], \quad Q_1 = \frac{1}{2}Nt\sigma_t\bar{\chi}^2. \quad (6)$$

Пусть теперь существенные области интегрирования достаточно удалены друг от друга, $q > \lambda$, и возможность перехода к уравнению (5) не столь очевидна. Оценим ошибку правой части при переходе от (2) к (5). Считаем, что $f(q')$ достаточно плавно меняется в первой области, а $\sigma(\chi)$ — во второй. В первой области с точностью до χ^2

$$f(q') \approx f(q) + \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} + \frac{1}{2}\chi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}.$$

После интегрирования по $d\Omega' = \chi d\chi d\varphi$ получим вклад в правую часть (2):

$$\frac{1}{4}N\sigma_t\bar{\chi}^2(\hat{L} + \hat{l})f(q), \quad \hat{L} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{l} = -\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \frac{q^3}{4} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Отметим попутно, что получающееся в этом приближении (приближение Фоккера—Планка, см., например, [7]) диффузионное уравнение приводит к тем же интегралам (6), что и уравнение (2), но при этом теряется определяемый конкретной зависимостью $\sigma = \sigma(\chi)$ физический результат — области кратного и однократного рассеяния в решении.

Во второй области, делая точно так же разложение $\sigma(\chi) = \sigma(|q - q'|)$ с точностью до q'^2 и интегрируя по $d\Omega' = q'dq'd\varphi$, получим вклад

$$N\sigma(q) + \frac{1}{4}Nq^2(\hat{L} + \hat{l})\sigma(q).$$

В аналогичных приближениях для уравнения (5) отсутствуют слагаемые с \hat{l} , которые и дают искомую оценку. Это обосновывает возможность применения уравнения (5) во всей угловой области. Во-первых, при выполнении условия (4) частицы появляются в области $q \gg \lambda$ вследствие рассеяния на большие углы. В этой области влиянием диффузии (слагаемые с \hat{L}, \hat{l}) можно пренебречь и оба уравнения для числа частиц в интервале dq на пути t дают

$$f(q, t)q dq \approx Nt\sigma(q)q dq,$$

что соответствует вероятности однократного рассеяния. Во-вторых, с уменьшением q различие правых частей уменьшается (из-за множителя $q^2/4$ в операторе \hat{l} по сравнению с \hat{L}) и при $q \sim \lambda$ становится малым. Для $\sigma(q) \propto q^{-4}$, например,

$$\hat{l}\sigma(q) = -\frac{1}{8}q^2\hat{L}\sigma(q).$$

С учетом соотношений $f(q) \approx Nt\sigma(q)$, $\bar{q}^2 \approx Nt\sigma_t\bar{\chi}^2 = 2Q_1$ ошибка правой части (5) оценивается как $-NQ_1\hat{l}\sigma(q)$, что приводит к погрешности в решении

$$\delta f(q) \sim -N\hat{l}\sigma(q) \int_0^t Q_1 dt = -\frac{1}{4}\bar{q}^2 N\hat{l}\sigma(q).$$

Полагая $\bar{q}^2 \sim \lambda^2$, получим ($q > \lambda$)

$$\delta f(q) \sim \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \frac{q^3}{4} \frac{\partial}{\partial q} f(q).$$

В области, где $f(q)$ убывает быстрее $1/q^2$, величина δf положительна. В случае сечения Резерфорда $f(q) \propto q^{-4}$ и $\delta f/f \sim \lambda^2/2$. Верхняя граница значений λ определяется допустимой погрешностью. При $\xi = \delta f/f \sim \lambda^2/2 < 5\%$ получается $\lambda_{max} \sim 0.3$.

Для оценки δf при $q < \lambda$ воспользуемся условием нормировки:

$$\int_0^{q_0} f(q)q dq = 1 - \int_{q_0}^{\infty} f(q)q dq \sim 1, \quad \int_0^{q_0} \delta f(q)q dq = - \int_{q_0}^{\infty} \delta f(q)q dq \sim \frac{\lambda^2}{4} \left[\frac{q^3}{4} \frac{\partial f}{\partial q} \right]_{q \sim q_0}.$$

В последнем интеграле использована формула для δf , $q_0 \sim \lambda$ — значение q , при котором погрешность δf меняет знак. Считая при значении q меньше или порядка λ функцию распределения близкой к гауссовой, $f(q) \approx 2 \exp(-q^2/\lambda^2)/\lambda^2$, получим значение q , при котором $\delta f(q) = 0$, равным $q_0 = \sqrt{2}\lambda$. Отсюда следует качественная оценка для диффузионной области:

$$\frac{\int_0^{q_0} \delta f(q)q dq}{\int_0^{q_0} f(q)q dq} \sim \frac{\delta f}{f} \sim \frac{\lambda^2}{4} \left[\frac{q^3}{4} \frac{\partial f}{\partial q} \right]_{q \sim q_0} \sim -c \frac{\lambda^2}{2},$$

где $c = 2/e^2 \approx 0.3$ — числовой коэффициент.

В итоге приходим к заключению, что относительная погрешность $\xi(q)$ при $q > \lambda$ порядка $\lambda^2/2$ и слабо зависит от q , при $q \sim \lambda$ меняет знак, а при $q < \lambda$ порядка $-0.3\lambda^2/2$. По поводу границ применимости отметим еще, что для уравнения (2) $\bar{q}^2 \approx 2Q_1 - Q_1^2$, т. е. уравнение (5) дает завышенное значение \bar{q}^2 с относительной погрешностью $\sim \lambda^2/4$.

Таким образом, при вполне допустимых ограничениях уравнение справедливо для всех углов. С бесконечной областью определения его решение осуществляется методом Фурье—Бесселя [2]. При $f(q, 0) = \delta(1 - \cos \vartheta) = \delta(q)/q$:

$$f(q, t) = \int_0^{\infty} \eta d\eta J_0(\eta q) \exp[-Q(\eta)], \quad (7)$$

$$Q(\eta) = Nt \int_0^{\infty} \sigma(\chi) \chi d\chi [1 - J_0(\eta \chi)].$$

С условием (4) можно оставить, например, в сечении Резерфорда зависимость $\sigma(\chi) \propto 1/\chi^4$ при $\chi > 2$. Это уменьшает число частиц в диффузионной области из-за их рассеяния в область $\chi > 2$, что приводит к дополнительному уменьшению нормировочного интеграла

$$I_{norm} = \int_0^2 f(q)q dq,$$

равного единице при бесконечном верхнем пределе. Эти эффекты, однако, достаточно малы и могут быть учтены корректировкой числа частиц в диффузионной области.

Отметим в заключение, что приближение малых углов (формула Мольера) получается заменой в (7) χ, q на δ, ϑ . Общий характер сечения в этом случае утрачивается.

3. СЕЧЕНИЕ РЕЗЕРФОРДА

Для сечения Резерфорда

$$\sigma_R(\chi) = 2s^2 \kappa(\chi) / \chi^4,$$

где $s^2 = 4\pi e^4 z^2 Z(Z+1)/(pv)^2$, p — импульс, v — скорость рассеиваемой частицы с зарядом z , множитель $\kappa(\chi)$ учитывает атомный формфактор, обрезая сечение на малых углах, можно использовать теорию Мольера ввиду совпадения формулы для $\sigma_R(\chi)$ и решения (7) с их приближениями для малых углов. Ниже дано ее краткое изложение в интерпретации, соответствующей результатам разд. 2.

Исходными параметрами в этой теории являются угол обрезания χ_a и $\chi_c^2 = Nts^2$. Угол обрезания [8] определяется соотношением $\chi_a^2 = \chi_0^2(1.13 + 3.76(Zze^2/\hbar v)^2)$, где $\chi_0 = \hbar/pa = \hbar/(p \cdot 0.885a_0 Z^{-1/3})$, a — радиус атома Ферми, a_0 — радиус Бора. Величине χ_c^2 можно придать смысл вероятности рассеяния частицы на угол $\vartheta > 60^\circ$ ($q > 1$), так как для больших углов

$$\int_1^\infty f(q)q dq \approx Nt \int_1^\infty \sigma_R(q)q dq = \chi_c^2.$$

Детали зависимости $\sigma_R = \sigma_R(\chi)$ на малых углах не рассматриваются, обрезание сечения учитывается выражением [1, 2]

$$\int_0^k \kappa(\chi) \frac{d\chi}{\chi} = \ln \frac{k}{\chi_a} - \frac{1}{2},$$

и $\kappa(k) = 1$ при $k \gg \chi_a$. Такой подход возможен, если

$$\lambda \gg \chi_a. \quad (8)$$

Разбивая интеграл для Q на два,

$$\int_0^k \dots + \int_k^\infty \dots,$$

где $\chi_a \ll k \ll \delta q$, и считая интервал δq аргумента в решении малым, $\delta q \ll \lambda$, можно ограничиться в фурье-разложении значениями $\eta < 1/\delta q$, т. е. обрезать верхний предел в (7) величиной $1/\delta q \ll 1/\chi_a$. Тогда $k\eta \ll 1$, и, полагая в первом интеграле $1 - J_0(\eta\chi) \approx \eta^2 \chi^2/4$, во втором $\kappa(\chi) = 1$, получим приближение [2]

$$Q^R(\eta) = \frac{1}{4} \chi_c^2 \eta^2 \left[b - \ln \left(\frac{1}{4} \chi_c^2 \eta^2 \right) \right], \quad (9)$$

$$b = \ln \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}, \quad \ln \chi_a' = \ln \chi_a - \frac{1}{2} + C, \quad C = 0.577, \quad \chi_a'^2 = 1.167 \chi_a^2,$$

которое приводится к виду

$$Q^R(\eta) = \frac{u^2}{4} \left(1 - \frac{1}{B} \ln \frac{u^2}{4} \right), \quad u^2 = B \chi_c^2 \eta^2,$$

при $B - \ln B = b$.

Пренебрегая вторым слагаемым в скобках, получим гауссово распределение частиц в диффузионной области:

$$f(q, t) = 2 \exp(-q^2/\lambda^2)/\lambda^2$$

со среднеквадратичным значением

$$\lambda = \chi_c \sqrt{B}$$

величины q . Из соотношения $B = \ln(\lambda^2/\chi_a'^2)$, условия (8) и уравнения для B с необходимостью следует³⁾

$$B \gg 1, \quad \chi_a \ll \chi_c \ll \lambda \ll 1,$$

где цепочка неравенств дополнена условием (4). Так как $\sigma_t \approx s^2/\chi_a^2$, для среднего числа столкновений получается $Nt\sigma_t \approx \chi_c^2/\chi_a^2 \gg 1$.

Сделаем замечание относительно величины λ . Уравнение для B можно заменить уравнением $\lambda^2 = \chi_c^2 \ln(\lambda^2/\chi_a'^2)$ или (с разбиением интеграла, как при получении формулы (9))

$$\lambda^2 = Nt \int_0^{\alpha\lambda} \chi^2 \sigma_R(\chi) \chi d\chi, \quad \alpha = e^{1-C} = 1.53,$$

что отличается от формулы для $\overline{q^2}$ обрезанием сечения (верхнего предела в интеграле) при $\chi = \alpha\lambda$. Как видно, при увеличении пройденного частицей пути t и сопутствующем увеличении λ в диффузионный процесс вовлекаются столкновения со все большими углами, диапазон углов в сечении, вносящий вклад в диффузию, возрастает пропорционально λ . Это в некоторой степени поясняет смысл уравнения для B и показывает, что имеющиеся рекомендации по обрезанию верхнего предела величиной $\sim \hbar/pr_N$, определяемой ядерным формфактором [9] (r_N — радиус ядра), верны для $\overline{q^2}$, т. е. для оценок. Для размера диффузионной области предпочтительнее формулы Мольера, так как в практических случаях $\alpha\lambda \ll \hbar/pr_N$.

Представляя $\exp[-Q^R(\eta)]$ и решение (7) в виде ряда по степеням $1/B$, получаем [1, 2]

³⁾ При $B > 1$ значение B можно найти методом последовательных приближений: $B^{(n)} = b + \ln B^{(n-1)}$. Для $B^{(0)} = 1$, например, $B^{(3)} = b + \ln(b + \ln b) \approx b + (1 + 1/b) \ln b$. Возможное уточнение $\tilde{B} = b + 1/(2b^2) + (1 + 0.958/b) \ln b$ дает при $b > 2.6$ ($B > 4$) значение B с погрешностью $< 1.4 \cdot 10^{-2}\%$, а формула $B = b + \ln \tilde{B}$ — с погрешностью $< 2 \cdot 10^{-3}\%$.

$$f_R(q) \approx \frac{1}{\lambda^2} [2 \exp(-X^2) + B^{-1} f^{(1)}(X) + B^{-2} f^{(2)}(X) + \dots], \quad X = \frac{q}{\lambda}, \quad (10)$$

где

$$f^{(n)}(X) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty u du J_0(Xu) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left[\frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4}\right]^n$$

— универсальные (т.е. зависящие только от X) функции. Формулы и таблицы для обычно используемых в расчетах функций $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ приведены в [2]. При $q \gg \lambda$ слагаемое c

$$f^{(1)}(X) = 2 \exp(-Z)(Z-1) [\bar{\text{Ei}}(Z) - \ln Z] - 2[1 - 2 \exp(-Z)], \quad Z = X^2,$$

даст основной вклад, $f^{(1)}(X) \approx 2/X^4$, и

$$f_R(q) \approx 2\chi_c^2/q^4. \quad (11)$$

С учетом того, что

$$\int_0^\infty \xi d\xi f^{(n)}(\xi) = 0$$

при $n \geq 1$ [1], для нормировочного интеграла имеем

$$I_{norm} = 1 - \exp(-4/\lambda^2) - B^{-1} F^{(1)}(2/\lambda) - B^{-2} F^{(2)}(2/\lambda),$$

где

$$F^{(n)}(X) = \int_X^\infty \xi d\xi f^{(n)}(\xi)$$

и при $X \gg 1$

$$F^{(1)} \approx X^{-2}, \quad F^{(2)} \approx 2X^{-4} \ln X^2.$$

Отличие I_{norm} от единицы мало ($\sim \lambda^2/4B$) и может быть устранено поправочным множителем к диффузионной части решения.

Отметим, что формулы (9), (10) получены здесь только с учетом условия (8), условие (4) обеспечивает справедливость решения (7). При невыполнении (8) число столкновений становится небольшим, доля нерассеянных частиц в решении, равная $\exp(-Nt\sigma_t)$, — значительной, и понятия области многократного рассеяния и ее размера λ теряют смысл. Характерным малым размером становится величина $(\bar{\chi}^2)^{1/2}$. Решение (7) остается справедливым, так как в области малых углов ($q \ll 1$) переход к плоской области интегрирования всегда возможен, а при $q \gg (\bar{\chi}^2)^{1/2}$ уравнения (2), (5) дают близкие результаты.

Другой подход состоит в точном решении уравнения (2) в виде ряда

$$f(\cos \vartheta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) \exp[-Q_l(t)], \quad (12)$$

$$Q_l(t) = \int_0^\pi N t \sigma(\cos \delta) \sin \delta d\delta [1 - P_l(\cos \delta)],$$

где P_l — полиномы Лежандра, $f(\cos \vartheta, 0) = \delta(1 - \cos \vartheta)$. (Отсюда следуют приведенные выше формулы (6).) Для сечения Резерфорда [2, 10]

$$Q_l \approx \frac{1}{2} \chi_c^2 \eta_l^2 \left(\ln \frac{2}{\chi_a} + \frac{1}{2} - S_l \right), \quad S_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - P_l(x)}{1 - x} dx = \sum_{k=1}^l \frac{1}{k}, \quad (13)$$

$$\eta_l = \sqrt{l(l+1)}.$$

Приведем ряд (12) к интегральному виду. (В приближении малых углов вопрос рассматривался в [2].) Учитывая, что представление $P_l(\cos \vartheta)$ в виде гипергеометрической функции дает ряд по степеням q^2 , а для малых углов $P_l(\cos \vartheta) \approx 1 - \eta_l^2 q^2/4$, сделаем замену $P_l(\cos \vartheta) \rightarrow J_0(\eta_l q)$, с которой разложение $J_0(\eta_l q)$ для малых углов будет тем же. Для получающегося ряда возможно преобразование

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} g(\eta_l) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} (g(\eta_{l+1}) + g(\eta_l)) \Delta_l, \quad \Delta_l = x_{l+1} - x_l, \quad x_l = \eta_l^2.$$

Каждое слагаемое в сумме справа — аппроксимация интеграла от $g(x)$ на участке (x_l, x_{l+1}) формулой трапеций, т. е. ряд приводится к интегралу

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(x) dx = \int_0^{\infty} g(\eta) \eta d\eta.$$

Таким образом, с использованием замены

$$\cos \vartheta \rightarrow q, \quad \cos \delta \rightarrow \chi, \quad \sqrt{l(l+1)} \rightarrow \eta, \quad P_l(\cos \vartheta) \rightarrow J_0(\eta q)$$

получаем общее соответствие между рядом (12) и интегралом (7). Для сечения Резерфорда, поскольку $S_l \approx \ln \eta_l + C + \frac{1}{6} \eta_l^{-2} + \dots$, имеем

$$Q_l \approx \frac{1}{2} \chi_c^2 \eta_l^2 \left(\ln \frac{2}{\chi_a} + \frac{1}{2} - C - \ln \eta_l \right),$$

т. е. получаем формулу (9). Такой подход использован в следующем разделе в случае сечения Мотта (для частиц со спином 1/2).

4. СЕЧЕНИЕ МОТТА

Для сечения

$$\sigma_M(\chi) = \sigma_R(\chi) \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2 \chi^2 \right), \quad \beta = \frac{v}{c},$$

величину $Q(\eta)$ в (7) представим в виде $Q^M(\eta) = Q^R(\eta) + \delta Q(\eta)$, где

$$\delta Q(\eta) = Nt \int_0^{\infty} \delta\sigma(\chi)\chi d\chi [1 - J_0(\eta\chi)], \quad \delta\sigma(\chi) = -\frac{1}{2}s^2\beta^2\chi^{-2}.$$

Интеграл расходится, если не обрезать $\delta\sigma(\chi)$ при $\chi = 2$. Для решения в виде ряда такой проблемы не возникает, и вместо (13) имеем

$$Q_l \approx \frac{1}{2}\chi_c^2\eta^2 \left(\ln \frac{2}{\chi_a} + \frac{1}{2} - S_l \right) + \delta Q_l, \quad \delta Q_l = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2 S_l, \quad (14)$$

т. е. имеем ряд (12), (14) для сечения Мотта. Полагая $S_l \approx \ln \eta_l + C$, приведем его к интегральному виду (см. разд. 3). Отметим, что получающееся при этом значение

$$\delta Q(\eta) = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2(\ln \eta + C)$$

может быть найдено с помощью соотношения

$$\delta Q(\eta) = Nt \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\epsilon}^2 \delta\sigma(\chi)\chi d\chi - \int_{\epsilon}^{\infty} \delta\sigma(\chi)J_0(\eta\chi)\chi d\chi \right),$$

т. е. с обрезанием только первого интеграла. Такое приближение оказывается достаточным для рассматриваемого случая.

После замен $u = \lambda\eta$, $X = q/\lambda$, получим

$$f_M(q) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} u du J_0(Xu) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \exp\left(\frac{u^2}{4B} \ln \frac{u^2}{4} - \delta Q(u)\right),$$

$$\delta Q(u) = -\frac{1}{2}\chi_c^2\beta^2 \left(a + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}u^2 \right), \quad a = \ln \frac{2}{\lambda} + C.$$

При этом мы имеем ввиду, что в данном случае поправка к сечению Резерфорда много меньше последнего при $\chi \leq \lambda$ и сравнима с ним при $\chi \sim 1$, т. е. существенна в области больших углов. Поэтому достаточно найти лишь поправку к функции $f^{(1)}$ в (10), которая дает основной вклад на больших углах, а изменением величины λ и, следовательно, параметра B из-за изменения сечения можно пренебречь.

Оставим в разложении второй экспоненты под интегралом слагаемые до второго порядка по $1/B$ включительно. По $\delta Q(u)$ оставим слагаемое первого порядка, пренебрегая слагаемыми с произведениями $\delta Q(u)$ на степени $1/B$. Получим

$$f_M(q) = f_R(q) + \frac{1}{2B}\beta^2\psi(\lambda, X), \quad (15)$$

$$\psi(\lambda, X) = \exp(-X^2) [2a + \ln X^2 - \text{Ei}(X^2)]. \quad (16)$$

Формула (16) следует из того, что

$$\psi(\lambda, X) = \int_0^{\infty} u du J_0(Xu) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left(a + \frac{1}{2} \ln \frac{u^2}{4} \right).$$

Первое слагаемое в скобках дает $2a \exp(-X^2)$. Оставшийся интеграл $I(X)$ дифференцируем по X . Учитывая равенство

$$\frac{dJ_0(Xu)}{dX} = \frac{u}{X} \frac{dJ_0(Xu)}{du}$$

и интегрируя по частям, приходим к уравнению

$$\frac{d(X^2 I(X))}{d(X^2)} = \frac{f^{(1)}(X)}{2} - \exp(-X^2),$$

решая которое получим в итоге формулу (16).

Обращает на себя внимание тот факт, что в диффузионной области, как и ожидалось, вклад второго слагаемого в (15) $\sim B^{-1} \ln(1/\lambda)$ достаточно мал. Слагаемое с $f^{(1)}$, например, дает вклад $\sim B^{-1} \lambda^{-2}$. Основной вклад приходится на область однократного рассеяния. В этой области в первом порядке малости по χ_c^2 получаем

$$f_M(q) \approx 2\chi_c^2 \left(1 - \frac{1}{4}\beta^2 q^2\right) \frac{1}{q^4}. \quad (17)$$

5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Точность решений (10) и (15), (16) контролировалась с помощью суммирования соответствующих рядов (формулы (12), (13), (14)), а для сечения Резерфорда — также решением уравнения (2) методом Монте-Карло с сечением в виде [2, 8]

$$\sigma_R(\chi) = 2s^2 / (\chi^2 + \chi_a^2)^2.$$

Полное сечение равно $\sigma_t = (s/\chi_a)^2 / (1 + \chi_a^2/4)$.

В методе Монте-Карло для получения с нужной статистической точностью функции распределения $f(q)$ необходимо набрать достаточное число событий, в которых определяется случайный угол ϑ после прохождения частицей пути t . Прямой способ состоит в розыгрыше числа столкновений n на пути t по распределению Пуассона со средним

$$\bar{n} = Nt\sigma_t$$

и розыгрыше в каждом столкновении угла рассеяния δ с вычислением нового значения ϑ до тех пор, пока не будут исчерпаны все столкновения.

Для расчета δ генерируется случайное значение F интеграла от функции распределения величины $\chi = 2 \sin(\delta/2)$:

$$F(\chi) = 2\chi_a^2 \left(1 + \frac{\chi_a^2}{\chi_g^2}\right) \int_{\chi}^{\chi_g} \frac{\chi d\chi}{(\chi^2 + \chi_a^2)^2}, \quad \chi_g = 2, \quad 0 \leq F \leq 1, \quad (18)$$

после чего из равенства $F = F(\chi) = (1 - \chi^2/\chi_g^2)/(1 - \chi^2/\chi_a^2)$ имеем

$$\chi = 2 \sin \frac{\delta}{2} = \chi_a \sqrt{\frac{1 - F}{F + \chi_a^2/\chi_g^2}}.$$

Новое значение угла ϑ можно определить, например, из выражения

$$q = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \nu},$$

где ν — случайный азимутальный угол, величины r_1, r_2 определяются по значению угла ϑ до столкновения:

$$r_1 = 2 \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad r_2 = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Такой способ достаточно эффективен для определения $f(q)$ в диффузионной области. В однократной области, где вероятность обнаружения частицы мала, получение нужной точности затруднительно. Для определения $f(q)$ во всей области можно поступить следующим образом. Разобьем область χ на интервалы (χ_{i-1}, χ_i) , $i = 1, \dots, N$, $\chi_0 = 0$, $\chi_N = 2$, а события — на взаимоисключающие классы с условиями отбора: в i -м классе, во-первых, нет столкновений с $\chi > \chi_i$ и, во-вторых, имеется хотя бы одно столкновение со значением χ в i -м интервале. К 1-му классу отнесем события, для которых выполнено только первое условие. Функция распределения при этом есть

$$f(q) = \sum_{i=1}^N W_i f_i(q),$$

где $f_i(q)$ — функция распределения для класса с номером i , W_i — вероятность появления событий этого класса. Формулы для W_i и функций распределения по числу столкновений в классах приведены в Приложении. С разбиением на классы возможно получение гистограммы для $f(q)$ с близким к равномерному заполнением ее каналов по числу событий. При накоплении в каналах величин

$$h = \sum_{i=1}^N \frac{W_i m_i}{M_i}, \quad S^2 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{W_i}{M_i} \right)^2,$$

где M_i — число разыгранных событий i -го класса, m_i — число событий i -го класса, попавших в канал, S^2 — дисперсия h , попадание очередного события из класса i в канал приводит к добавлению к h величины W_i/M_i , а к S^2 — W_i^2/M_i^2 , т. е. достаточно копить две гистограммы. Величина m_i/M_i соответствует $f_i(q)$. Нормировка h и S на цену канала дает функцию $f(q)$ и ее статистическую ошибку.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Отметим, прежде всего, что формулы (11), (17) дают правильные вероятности редких столкновений: $f(q)q dq \approx N t \sigma(q) q dq$, т. е. полученные решения пригодны во всей области углов. На рис. 2 показано сравнение решения (10) с приближением малых углов для сечения Резерфорда. Различие становится заметным для больших углов, когда в соответствии с (11) отношения $f(\vartheta)/f(q) \approx (q/\vartheta)^4$, $\vartheta f(\vartheta)/q f(q) \approx (q/\vartheta)^3$ и достигают предельных значений $(2/\pi)^4$, $(2/\pi)^3$ соответственно при $\vartheta = 180^\circ$. Для сечения Мотта подобное сравнение не имеет смысла, так как в приближении малых углов сечение становится отрицательным при $\vartheta > 120^\circ/\beta^2$.

Сравнение полученных решений с более точными результатами представлено на рис. 3, 4 и в табл. 1, 2. На рис. 3а, б видно согласие решения (10) с полученным методом Монте-Карло решением во всем диапазоне углов, на рис. 3в — согласие решения (15), (16) с рядом (12), (14), а также отличие (15), (16) от решения (10) в области больших углов.

В табл. 1 приведены данные для рассеяния π -мезонов на золоте ($Z = 79$, $A = 196.97$, ρ — плотность), ξ_{max} , $\xi(0)$, $\xi(2)$ — максимальное и крайние значения относительного отклонения $\xi(q) = [f(q) - f_{GS}(q)]/f_{GS}(q)$ в интервале $0 \leq q \leq 2$. Здесь f — решение (10), f_{GS} — решение (12), (13) Гюудсмита и Сандерсона. Характер зависимости $\xi = \xi(q)$ при достаточно больших B (кривая 3 на рис. 4 при $q \sim \lambda$ меняет знак) и значение $\xi(2)$ согласуются с оценками разд. 2. Максимальное значение ξ_{max} приходится на кратную область $q/\lambda \sim 2$. Значения $\xi(0)$, ξ_{max} с уменьшением λ вначале убывают, затем начинают возрастать. Последнее, как и характер кривых 1, 2 на рис. 4, объясняется недостаточным числом членов разложения в (10) при небольших значениях B . В этом случае в области многократного рассеяния погрешность решения (10) оценивается как $\xi(0) \sim f^{(3)}(0)/2B^3$, т.е. имеет величину порядка первого отброшенного слагаемого, $f^{(3)}(0) = 5.94$. В кратной области ошибка больше и, поскольку здесь значение $f^{(0)}$ мало, а $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ одного порядка, $\xi_{max} \sim 1/B^2$. Полагая в однократной области $\xi \sim \lambda^2/2$, найдем, что $\xi(0) > \lambda^2/2$ при $\lambda^2 < 5.94/B^3$ или $\chi_c^2 < 5.94/B^4$, т.е. практически во всех встречающихся конкретных задачах решение в однократной области будет точнее.

Из таблицы видно, что примерное значение верхнего предельного размера диффузионной области составляет $\lambda_{max} \sim 0.3$. Отметим, что при $\lambda = 0.3$ нормировочный интеграл равен 0.998, а отклонение среднеквадратичного значения q в интервале $0 \leq q \leq 2$ от полученного по формуле (6) меньше 1%. С уменьшением λ точность этих величин возрастает.

Приближения (9), (13) имеют ограничения, так как получены при условии $\eta, l \ll 1/\chi_a$. Ряд (12) должен быть обрезан при $l < \eta_m \sim 1/\chi_a$, η_m — значение η , при котором величина $Q(\eta)$ принимает максимальное значение Q_m , иначе он расходится. С приближением (9) и бесконечным верхним пределом расходится и интеграл (7). Значение $\exp(-Q_m)$ должно быть малым. В диффузионной области, например, нужно, чтобы соответствующий η_m член разложения в (12) был мал по сравнению с

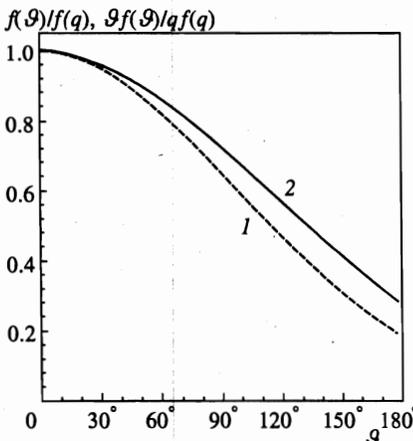


Рис. 2. Зависимости отношений $f(\vartheta)/f(q)$ (1) и $\vartheta f(\vartheta)/qf(q)$ (2) от угла ϑ для сечения Резерфорда. Кривые рассчитаны для вариантов 1–3 табл. 1 и для этих вариантов на рисунке неразличимы

Таблица 1

Сечение Резерфорда (π -мезоны). $E_{kin} = 50$ МэВ, $\chi_a = 2.77 \cdot 10^{-4}$

№	ρt , г/см ²	λ	B	\bar{n}	$\xi(0)$, %	ξ_{max} , %	$\xi(2)$, %
1	0.00375	$3.51 \cdot 10^{-3}$	4.93	32.7	-5.38	5.52	-
2	0.015	$8.14 \cdot 10^{-3}$	6.61	131	-1.63	2.68	0.01
3	0.060	$1.81 \cdot 10^{-2}$	8.21	523	-0.76	1.59	0.03
4	0.24	$3.96 \cdot 10^{-2}$	9.77	$2.09 \cdot 10^3$	-0.43	1.11	0.12
5	0.4	$5.26 \cdot 10^{-2}$	10.34	$3.49 \cdot 10^3$	-0.35	1.06	0.25
6	2	0.127	12.11	$1.74 \cdot 10^4$	-0.35	1.74	1.01
7	4	0.185	12.86	$3.49 \cdot 10^4$	-0.47	3.17	2.06
8	10	0.304	13.85	$8.71 \cdot 10^4$	-0.93	8.63	5.24
9	40	0.640	15.34	$3.49 \cdot 10^5$	-3.57	50.7	38.6

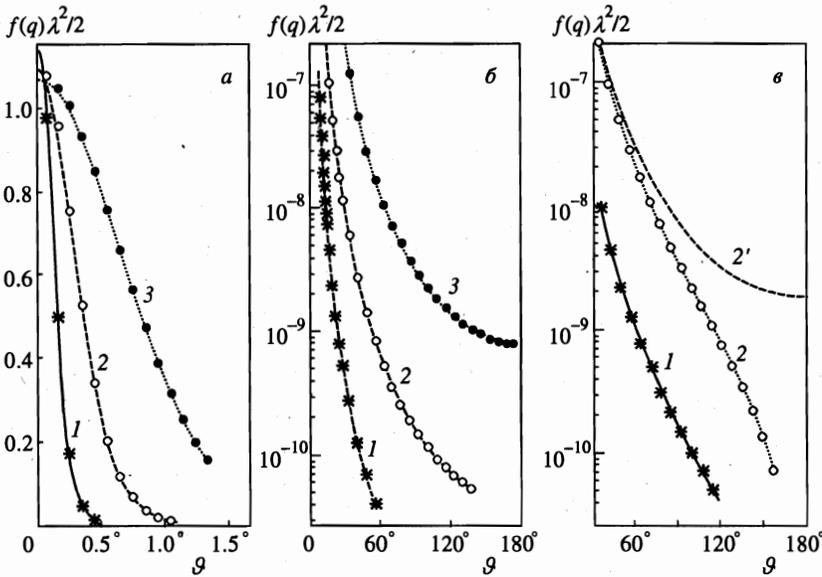


Рис. 3. Зависимости $f(q)\lambda^2/2$ от угла ϑ : а, б — расчеты $f(q)$ по формуле (10) для вариантов 1–3 табл. 1 (кривые 1–3) и методом Монте-Карло (точки); в — $f(q)$ по формулам (15), (16) для вариантов 1, 2 табл. 2 (кривые 1, 2) и ряд (12), (14) (точки); кривая 2' получена с $\psi(\lambda, X)=0$

$f(0) \approx 2/\lambda^2$. Для вариантов 1–3 табл. 1 $\lg[(2\eta_m + 1) \exp(-Q(\eta_m))/2f(0)]$ принимает значения -6.1, -19, -72 соответственно. При $q < 4\lambda$ согласие решения (12), (13) с расчетами методом Монте-Карло для варианта 1 еще удовлетворительное (рис. 4). Это приводит к ориентировочному нижнему пределу

$$\lambda_{min}/\chi_a \sim 10,$$

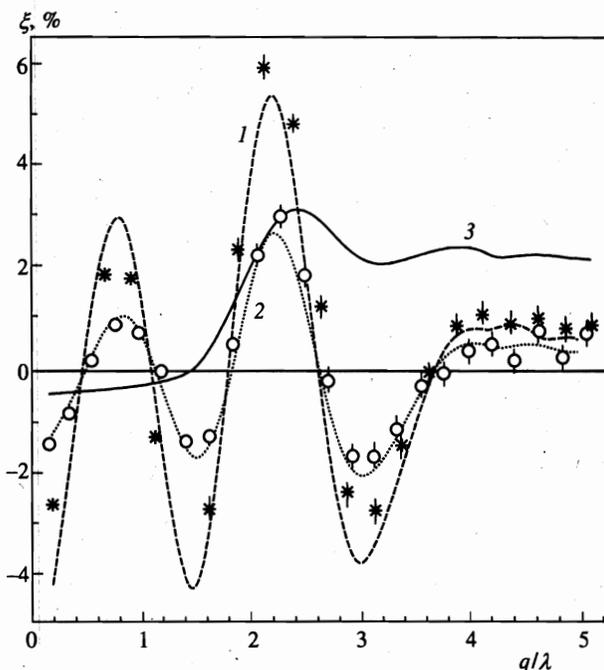


Рис. 4. Зависимости $\xi = \xi(q/\lambda)$: кривые 1, 2, 3 — относительное отклонение $f(q)$ по формуле (10) от ряда (12), (13) для вариантов 1, 2, 7 табл. 1, точки — отклонение от расчетов методом Монте-Карло для вариантов 1, 2

но ряд не обеспечивает достаточной точности в однократной области, где значение $f(q)$ мало (методом Монте-Карло для этого варианта получен верхний предел $\xi(2) < 1\%$).

Данные для рассеяния на алюминии с сечением Мотта представлены в табл. 2, где ξ — относительное отклонение (15), (16) от ряда (12), (14) в интервале $0 \leq q \leq 1$, и приводят к тем же результатам. (Сравнение при $q = 2$ здесь ввиду очень малого значения $f(2)$ и приближенного характера решений практически невозможно.)

Отметим еще, что в рассмотренных примерах при $\lambda \sim \lambda_{max}$ потери энергии частицами в веществе велики, т. е. при соответствующем ограничении пути частицы в веществе условие $\lambda < \lambda_{max}$ будет выполняться.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, что исходным для построения теории является положение о малости размера диффузионной области λ . Необходимости в приближении малых углов не возникает. Для практически интересных значений λ найденное в работе для сечения общего вида и без ограничения на углы рассеяния кинетическое уравнение применимо во всей области углов, причем результаты, полученные в приближении малых углов, обобщаются просто: заменой ϑ на $q = \sin(\vartheta/2)$.

В широкой области практических значений λ полученные решения в однократной области оказались существенно точнее, чем в кратной области и области многократного рассеяния, т. е. необходимо уточнение ряда (10) для этих областей. (Здесь мы

Таблица 2

Сечение Мотта (электроны). $E_{kin} = 15$ МэВ, $\chi_a = 6.89 \cdot 10^{-4}$

№	ρt , г/см ²	λ	B	\bar{n}	$\xi(0)$, %	ξ_{max} , %	$\xi(1)$, %
1	0.00375	$9.10 \cdot 10^{-3}$	5.01	34.8	-4.99	5.25	—
2	0.015	$2.10 \cdot 10^{-2}$	6.68	139	-1.57	2.61	0.06
3	0.030	$3.15 \cdot 10^{-2}$	7.49	278	-1.05	2.00	0.12
4	0.06	$4.68 \cdot 10^{-2}$	8.28	556	-0.75	1.61	0.23
5	0.12	$6.93 \cdot 10^{-2}$	9.06	$1.11 \cdot 10^3$	-0.58	1.43	0.44
6	0.24	0.102	9.84	$2.23 \cdot 10^3$	-0.50	1.51	0.90
7	0.4	0.135	10.41	$3.71 \cdot 10^3$	-0.49	1.86	1.57
8	1	0.224	11.42	$9.28 \cdot 10^3$	-0.66	4.04	4.04
9	2	0.328	12.17	$1.86 \cdot 10^4$	-1.07	8.66	8.66
10	4	0.477	12.93	$3.71 \cdot 10^4$	-1.99	16.8	16.8

не касаемся отдельного вопроса о точности величины χ_a , одинаково важного для всех рассмотренных решений. Отметим только, что в однократной области решение определяется в основном параметром χ_c^2 .)

Работа содержит общий результат — кинетическое уравнение, имеющее решение в виде интеграла, — обобщение результатов, полученных ранее в приближении малых углов (сечение Резерфорда), и новый результат: функцию распределения для частиц со спином 1/2 (сечение Мотта). Получена основа для учета ядерного формфактора и поглощения частиц в ядре. Результаты могут найти применение для учета многократного рассеяния при пошаговом проведении частиц через детектор (моделирование), когда траектория представляется в виде ломаной и на каждом малом перемещении учитываются все процессы взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим через P_i вероятность попадания величины χ в отдельном столкновении в интервал $(0, \chi_i)$, через $m_i, n_i, n - m_i - n_i$ — число столкновений в событии со значением χ в интервалах $(0, \chi_{i-1}), (\chi_{i-1}, \chi_i), (\chi_i, 2)$ соответственно при общем их числе n . Вероятность получить такое событие определяется полиномиальным распределением и равна

$$\frac{n!}{m_i!n_i!(n - m_i - n_i)!} P_{i-1}^{m_i} p_i^{n_i} (1 - P_i)^{n - m_i - n_i}, \quad p_i = P_i - P_{i-1}.$$

Вероятность получить событие i -го класса с числом столкновений n , n_i есть (полагая в этой формуле $n - m_i - n_i = 0$; исключаем случай $n_i = 0$ и учитываем, что значение n в событиях подчиняется распределению Пуассона со средним значением \bar{n})

$$\omega_i(n, n_i) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{n!}{(n - n_i)!n_i!} P_{i-1}^{n - n_i} (p_i^{n_i} - \delta_{0n_i}) \quad (i \neq 1),$$

δ_{0n_i} — символ Кронекера. Точно так же вероятность получить событие 1-го класса с числом столкновений n составляет

$$\omega_1(n) = e^{-\bar{n}} \frac{1}{n!} (\bar{n}P_1)^n.$$

Полная вероятность W_i найти событие в i -м классе получается суммированием этих формул по n, n_i . При суммировании по n_i выполним преобразование $P_{i-1}^{n-n_i} p_i^{n_i} = P_i^n a^{n-n_i} b_i^{n_i}$ (где $a + b = 1$) и, учитывая, что сумма вероятностей в биномиальном распределении равна единице, получим

$$\sum_{n_i} \omega_i(n, n_i) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} (P_i^n - P_{i-1}^n), \quad i \neq 1.$$

После суммирования по n , с учетом равенства единице суммы вероятностей в распределении Пуассона, получаем

$$W_1 = \exp[-\bar{n}(1 - P_1)], \quad W_i = \exp[-\bar{n}(1 - P_i)] - \exp[-\bar{n}(1 - P_{i-1})], \quad i \neq 1.$$

Поскольку $1 - P_i = F_i = F(\chi_i)$, $F(\chi_i)$ определено формулой (18) при $\chi_g = 2$, окончательно получим

$$W_1 = \exp(-\bar{n}F_1), \quad W_i = \exp(-\bar{n}F_i) - \exp(-\bar{n}F_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N.$$

Отметим, что $F_N = 0$, следовательно, $\sum W_i = 1$, т. е. разбиение на классы охватывает всю совокупность событий.

Число столкновений в событиях 1-го класса, как показывает формула для $\omega_1(n)$, нормированная на единицу (деленная на W_1), распределено по закону Пуассона со средним $\bar{n}(1 - F_1)$. В этом классе значения χ в столкновениях разыгрываются в интервале $(0, \chi_i)$ в соответствии с формулой (18), в которой $\chi_g = \chi_i$. Для остальных классов число столкновений в событии определим как $n = m_i + n_i$. Переходя в формуле для $\omega_i(n, n_i)$ к переменным m_i, n_i , получим, что вероятность появления в i -ом классе значений m_i, n_i пропорциональна произведению двух множителей:

$$\sim \frac{a^{m_i}}{m_i!} \left(\frac{b^{n_i}}{n_i!} - \delta_{0n_i} \right) \sim e^{-a} \frac{a^{m_i}}{m_i!} \left(e^{-b} \frac{b^{n_i}}{n_i!} - e^{-b} \delta_{0n_i} \right), \quad a = \bar{n}P_{i-1}, \quad b = \bar{n}p_i.$$

Таким образом, m_i подчиняется распределению Пуассона со средним $\bar{n}(1 - F_{i-1})$, а n_i — распределению Пуассона со средним $\bar{n}(F_{i-1} - F_i)$ за исключением случая $n_i = 0$. После розыгрыша m_i, n_i разыгрываются n столкновений, среди которых случайно и равномерно разыгрываются n_i столкновений со значением χ в интервале (χ_{i-1}, χ) . В остальных m_i столкновениях значения χ разыгрываются в интервале $(0, \chi_{i-1})$.

Литература

1. G. Moliere, Z. Naturforsch. **3a**, 78 (1948).
2. H. A. Bethe, Phys. Rev. **89**, 256 (1953).
3. А. Д. Букин, В. Н. Иванченко, М. Ю. Лельчук и др., Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-33, Новосибирск (1984).
4. А. Д. Букин, Н. А. Грозина, М. С. Дубровин и др., Препринт ИЯФ СО АН СССР 94-20, Новосибирск (1994).
5. R. Brun, F. Bruyant, M. Maire et al., GEANT3, CERN preprint DD/EE/84-1, Geneve (1987).
6. Н. Ф. Шульга, С. П. Фомин, ЖЭТФ **113**, 58 (1998).
7. В. Г. Левич, Ю. А. Вдовин, В. А. Мямлин, *Курс теоретической физики*, т. II, Наука, Москва (1971).
8. G. Moliere, Z. Naturforsch. **2a**, 133 (1947).
9. Б. Росси, К. Грейзен, *Взаимодействие космических лучей с веществом*, Изд-во иностр. лит., Москва (1948). В. Rossi and K. Greisen, Rev. Mod. Phys. **13**, 240 (1941).
10. S. A. Goudsmit and J. L. Saunderson, Phys. Rev. **57**, 24 (1940); **58**, 36 (1940).