РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА | *ТОМ 116, ВЫПУСК 2(8)*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД | *АВГУСТ, 1999*
МОСКВА | «НАУКА»

ДИНАМИКА ОБРАЗОВАНИЯ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ

*А. А. Шацкий**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия

А. Ю. Андреев

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 ноября 1998 г.

Исследовано радиальное движение вещества в центрально-симметричном гравитационном поле в сопутствующей системе отсчета для реалистичного уравнения состояния вещества. Исследована динамика образования горизонта событий.

PACS: 04.20.-q; 04.40.-b; 04.70.-s

Проблема образования горизонта событий черных дыр уже давно привлекает к себе большое внимание физиков. На эту тему написано огромное количество работ (см., например, [1–4]), но тем не менее при рассмотрении этой проблемы в рамках общей теории относительности (ОТО) больше вопросов, чем известных решений.

Одним из главных вопросов этой проблемы по-прежнему остается вопрос об обратном влиянии акрецирующего вещества на черную дыру. До сих пор в основном рассматривалось движение пробных частиц в поле черной дыры, а они, как известно, не оказывают обратного влияния, которое может оказаться огромным при достижении падающей частицей скорости света в момент прохождения ею горизонта событий.

*E-mail: aas@srdlan.npi.msu.su

1. В этой работе мы рассмотрим частный, но физически реальный случай сферически-симметричной акреции на центральное тело без учета вращения. Приняты следующие обозначения: скорость света c и гравитационная постоянная G положены равными единице. Гравитационным радиусом для данной массы M в этих единицах назовем радиус $r_g = 2M$, т. е. радиус горизонта событий в вакууме для этой массы, сосредоточенной в центре.

Построим вероятную модель эволюции системы. Предположим, что наша система представляет собой остывающую массивную звезду радиусом R_0 и гравитационным радиусом $R_{G_0} = 2M(R_0)$, причем $R_{G_0} < R_0$. Вещество этого тела в начальный момент покоится («пыль» с уравнением состояния $P = \alpha\varepsilon$, где P — давление в веществе, ε — плотность энергии, α — константа). В следующий момент вещество начинает свободно[1)] падать. Если допустить, что в начальный момент гравитационные поля не слишком велики, а плотность пыли[2)] достаточно мала, то для ее удержания в начальный момент потребуется поле сил с конечной энергией. После выключения этого поля оно выйдет за пределы системы и перестанет с ней взаимодействовать за время порядка размера системы, т. е. за время много меньшее того, за которое пыль успеет частично осыпаться и гравитационные поля сильно вырасти. Таким образом, данная модель физически непротиворечива.

Что же произойдет с системой дальше? Пыль начнет падать к центру тела, увеличивая свою среднюю плотность и гравитационный радиус $r_g(r)$ для массы $M(r)$ под некоторым радиусом r. Если бы мы пренебрегли обратным влиянием давления двигающегося вещества на динамику системы и на ее гравитационное поле, то при неизбежном падении всего вещества и выполнении в одной из точек r системы неравенства

$$r_g(r) = 2M(r) \geq r, \tag{1}$$

в этой точке, согласно решению Шварцшильда для гравитационного поля в пустоте, образовался бы горизонт событий, т. е. скорость падающего вещества относительно поверхностей $r = \text{const}$ достигла бы скорости света (см. далее). Реально ли это на самом деле? Достижение веществом скорости света вызывает изменение знака интервала и поэтому является инвариантным событием, не зависящим от выбора системы отсчета.

Попытка решить эту задачу в системе отсчета, покоящейся на бесконечности, сразу же приводит к противоречию. Дело в том, что изучить аналитически точную, нестационарную модель из-за ее сложности в принципе не удается. Если же сделать упрощение и предположить квазистационарность системы в некоторый момент времени в пределах от одного радиуса до некоторого, заведомо большего его радиуса, но все еще гораздо меньшего размеров системы, то можно, по крайней мере, сделать утверждение о наличии особенностей (нулей и полюсов) у компонент $g_{tt}(r)$ и $g_{rr}(r)$ метрики в этой системе отсчета[3)]. При выборе параметров системы такими, чтобы существовала область про-

---

1) На вещество действуют только силы гравитации и силы взаимодействия между пылинками — давление.

2) В данном случае слово «пыль» вовсе не означает отсутствия взаимодействия между пылинками, исключая случай $\alpha = 0$.

3) В системе отсчета, неподвижной на бесконечности, при наличии горизонта, как и у метрики Шварцшильда, при приближении к поверхности этого горизонта обязательно должны возникать особенности у компонент метрики.

странства, где неравенство (1) должно было бы заведомо выполняться, выясняется, что метрика не имеет особенностей независимо от выполнения неравенства (1).

Это можно показать, предполагая, что если особенность возникнет в некоторой точке r_0, то вблизи нее компонента метрики представима в виде

$$g_{ii}(r) \approx \mathrm{const}(r - r_0)^{y_i},$$

где y_i — некоторое число. При подстановке такой метрики в уравнения выясняется, что они не имеют решения ни при каких значениях $y_i \neq 0$.

Казалось бы, это говорит об уничтожении особенностей, а значит, и горизонта быстро двигающейся материей (правая часть уравнений Эйнштейна, равная нулю в вакууме, становится сингулярной при наличии ультрарелятивистского падающего вещества, когда радиальная компонента трехскорости стремится к единице, а радиальная и временная компоненты четырехскорости стремятся к бесконечности, это и является причиной устранения особенностей метрики).

Но в действительности все дело в неприменимости квазистационарного приближения в случае сильных гравитационных полей. Причина неприменимости заключается в том, что время на протяжении системы течет сильно неравномерно из-за неравномерности компоненты $g_{tt}(r)$ метрики. Это приводит к тому, что картина, кажущаяся стационарной вдали от центра, становится сильно нестационарной для наблюдателя, приблизившегося к центру симметрии системы.

Тем не менее это не снимает поставленного вопроса — возникнут ли горизонт и черная дыра в реальном нестационарном случае?

2. Найти ответ на поставленный вопрос возможно при выборе сопутствующей системы отсчета. В этой системе задача была решена в [1, §103] в частном случае $\alpha = 0$ (см. далее). Вещество в выбранной системе отсчета покоится, и о его движении можно судить лишь по изменению «окружных» или фотометрических расстояний r, которые связаны с центром системы и определяются как длины окружностей вокруг центра: $2\pi r$. При таком определении радиуса r метрику удобно представить в виде

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2}$$

Здесь R — координата пылинки в сопутствующей системе отсчета или ее индекс, e^{ν}, e^{λ}, r являются при этом функциями R и времени t. Следует отметить, что при нулевом давлении, т. е. когда $\alpha = 0$, имеем $\nu = 0$, т. е. система отсчета является одновременно и синхронной.

Для решения поставленной задачи выпишем уравнения Эйнштейна в сопутствующей системе отсчета:

$$r'^2 e^{-\lambda}(1 + r\nu'/r') - e^{-\nu}(2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - r\dot{r}\dot{\nu}) = 1 + 8\pi\alpha r^2\varepsilon, \tag{3а}$$

$$2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\dot{\mu} = 0, \tag{3б}$$

$$\left(\lambda + 2\mu + \frac{2}{1+\alpha}\ln\varepsilon\right)^{\cdot} = 0, \tag{3в}$$

$$\left(\nu + \frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln\varepsilon\right)' = 0. \tag{3г}$$

Здесь $\mu = 2\ln r$, штрих означает дифференцирование по R, а точка — по t. Уравнения (3) были получены в [1] (уравнения (2), (5), (6) задачи 5 к §100).

Из (3г) следует, что

$$\nu = -\frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln\varepsilon + f^*(t),$$

при этом переобозначением времени t в элементе интервала (2) функцию $f^*(t)$ можно положить равной $[2\alpha/(1+\alpha)]\ln\varepsilon_*$, где ε_* — константа с размерностью плотности энергии, выражающая масштаб измерения ε. Тогда

$$\nu = -\frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}. \tag{4}$$

Далее присвоим индексы R пылинкам таким образом, что $r = R$ в начальный момент. При таких начальных условиях функции $r'(R,t)$ соответствует величина $(n_0/n)^{1/3}$, где $n(R,t)$ — концентрация частиц пыли, n_0 — ее значение в начальный момент.

Выясним теперь условия, которые должны быть наложены на начальное распределение пыли. Самое главное из них заключается в том, что внутри вещества в начальный момент не должно выполняться неравенство (1). Это означает, что в начальный момент во всем пространстве горизонт отсутствует. Это накладывает верхний предел на начальную плотность пыли и на начальные размеры системы. А именно, если положить начальное распределение плотности пыли равным $\varepsilon_0(R)$, то максимальный радиус тела R_{max}, согласно (1), однозначно определится выражением

$$R_{max} = 2\int\limits_0^{R_{max}} 4\pi\varepsilon_0(R)R^2dR. \tag{5}$$

Тогда из (3в) и (4) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha(\lambda + 2\mu) - \nu\right] = 0$$

или

$$\nu = \alpha[\lambda + 2\mu + f^\#(R)], \tag{6}$$

где $f^\#(R)$ — произвольная функция, зависящая от начальных условий.

3. Найдем теперь начальные значения для всех переменных в нашей задаче. Для r и ε эти значения уже были нами заданы. Из (4) следует, что

$$\nu_0 = -\frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_*}. \tag{7}$$

Для нахождения начального значения λ воспользуемся тем фактом, что для $\alpha = 0$ задача была уже решена, и поэтому можно воспользоваться известным выражением для $\lambda_0|_{\alpha=0}$ из [1, § 103.6]:

$$\lambda_0(R) = -\ln\left[1 - S(R)\right], \tag{8}$$

где для $\alpha = 0$

$$S(R) = 2M(R)/R, \tag{9}$$

$M(R)$ — масса под радиусом R в начальный момент.

Для произвольного α выражение для $S(R)$ такое же. Это можно получить из уравнения (4) к задаче 5, §100 в [1], где найдены уравнения Эйнштейна в сопутствующей системе отсчета в веществе для центрально-симметричной системы. Выпишем это уравнение:

$$-e^{-\lambda}\left[\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right] + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2e^\nu}\left[\dot\lambda\dot\mu + (\dot\mu)^2/2\right] = 8\pi\varepsilon. \qquad (10)$$

Выражая μ через r ($\mu = \ln r^2$) и приводя подобные слагаемые, мы можем преобразовать это выражение к виду

$$8\pi r'\varepsilon r^2 = -[r(r'^2e^{-\lambda} - 1)]' + \frac{r'}{e^\nu}\left[\dot\lambda r\dot r + (\dot r)^2\right]. \qquad (11)$$

Учитывая выражение (8), а также то, что согласно выражению (100.23) из [1] имеет место равенство

$$2M(r) = \int_0^r 8\pi\varepsilon(\tilde r, t)\tilde r^2 d\tilde r|_{t=\mathrm{const}},$$

для начального момента времени, когда $\dot r = 0$ и $r' = 1$, получим для $S(R)$ выражение (9), предварительно проинтегрировав (11) по R от 0 до R.

Подставляя выражение (8) в (6) и учитывая (7), найдем, что

$$f^{\#}(R) = -\frac{2}{1+\alpha}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_*} + \ln[1 - S(R)] - \ln R^4. \qquad (12)$$

4. Теперь, подставив выражение (6) в (3б) и поделив все на $\dot\mu\mu'$, получим уравнение

$$\frac{1}{\dot r}(2\ln\mu' + \mu - \lambda)^{\cdot} = \frac{\nu'}{r'} = \alpha\frac{[\lambda + 2\mu + f^{\#}(R)]'}{r'}. \qquad (13)$$

Учитывая, что $e^{-\nu}(2r\ddot r + \dot r^2 - r\dot r\dot\nu) = (e^{-\nu}r\dot r^2)^{\cdot}/\dot r$, и обозначая

$$U(R,t) = (\dot r)^2, \qquad Q(R,t) = r'^2e^{-\lambda}, \qquad (14)$$

мы видим, что уравнение (3а) можно записать как уравнение для U:

$$\frac{\dot U}{\dot r} + aU = \sigma, \qquad (15)$$

где

$$a(R,t) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r\dot\nu}{\dot r}\right), \quad \sigma(R,t) = \frac{1}{r}\left[Q\left(1 + \frac{r\nu'}{r'}\right) - 1 - 8\pi\alpha r^2\varepsilon\right]e^\nu.$$

Это уравнение имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$U(R,t) = \frac{1}{\gamma^*(R,t)}\int_0^t \gamma^*(R,\tilde t)\sigma(R,\tilde t)\dot{\tilde r}d\tilde t, \qquad \gamma^*(R,t) = \exp\left[\int_0^t a(R,\tilde t)\dot{\tilde r}d\tilde t\right]. \qquad (16)$$

Найдя U, выражение для квадрата скорости вещества относительно поверхностей $r = \text{const}$ можно получить из вида метрики (2) (см. Приложение 1):

$$V^2(R,t) = Ue^{-\nu}e^{\lambda}/r'^2. \tag{17}$$

Выражение для γ^* может быть легко найдено:

$$\gamma^*(R,t) = C(R)re^{-\nu},$$

где множитель $C(R)$ для $\gamma^*(R,t)$, не зависящий от t, можно вынести за знак интеграла в выражении (16) и сократить, поэтому его можно положить равным единице. Тогда

$$\gamma^*\sigma = r'^2e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r\nu'}{r'}\right) - 1 - 8\pi\alpha r^2\varepsilon.$$

Или, учитывая то, что выражение (13) можно теперь переписать как

$$\frac{(2\ln\mu' + \mu - \lambda)^{\cdot}}{\dot r} = \frac{(\ln Q)^{\cdot}}{\dot r} = \frac{\nu'}{r'}, \tag{18}$$

получим

$$\gamma^*\sigma = \frac{(r(Q-1))^{\cdot}}{\dot r} - 8\pi\alpha r^2\varepsilon. \tag{19}$$

Тогда (16) перепишется в виде

$$U = \frac{e^{\nu}}{r}\left[r(Q-1) - R(Q_0 - 1) + 2\alpha m(R,t)\right], \tag{20}$$

где обозначено:

$$m(R,t) = \int\limits_t^0 4\pi\tilde\varepsilon\tilde r^2\dot{\tilde r}\,d\tilde t = \int\limits_r^R 4\pi\tilde\varepsilon\tilde r^2\,d\tilde r|_{R=\text{const}}. \tag{21}$$

5. Для случая $\alpha = 0$, учитывая (6), (9), (18) и (20), можем без труда получить аналитически точное выражение для U и V:

$$U_{\alpha=0} = S(R)\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{2M(R)}{r} - S(R). \tag{22}$$

Подставив это выражение в (17), получим для скорости

$$V^2_{\alpha=0} = \frac{2M(R)/r - S(R)}{1 - S(R)}. \tag{23}$$

Отсюда $V_{\alpha=0} = 1$, когда $r = r_g = 2M(R)$, что совпадает с результатами §100 в [1], где для этого случая задача была уже решена.

6. И наконец, рассмотрим вопрос о местоположении горизонта[4)] при наличии ненулевого давления. Для этого подставим в формулу (17) выражения (20) и (8) для $e^{-\lambda_0}$. В итоге после несложных преобразований получим

[4)] Здесь идет речь о так называемом горизонте видимости (apparent horizon), или, как еще его называют, ловушечной поверхности, определение которой дано в работах [5, 6]. Что же касается горизонта событий (event horizon), то после падения всего вещества, как это будет видно далее, он совпадает с горизонтом видимости (подробнее об этом см. Приложение 1).

$$r = \frac{2M(R) + 2\alpha m(R,t)}{1 - Q(1 - V^2)}. \tag{24}$$

Как будет доказано в Приложении 1, горизонт появляется в той точке и в тот момент, когда скорость падающего вещества относительно поверхностей $r = \text{const}$ достигает единицы, т. е. там, где $V = 1$. При этом скорость света относительно падающего вещества в этом месте тоже, как всегда, равна единице.

Отсюда радиус горизонта r_{hor}, согласно (24) и (9), определяется формулой

$$r_{hor} = 2M(R) + 2\alpha m(R, t_{hor}). \tag{25}$$

Таким образом, горизонт смещается в большую сторону по сравнению с его значением в вакууме $r_{0_{hor}} = 2M(R)$ на величину $2\alpha m(R, t_{hor})$. При этом величина $m(R,t)$ имеет смысл массы, которая накопилась бы, если бы мы состыковывали друг с другом слои пыли с начальным радиусом R и толщиной $d\tilde{r}(\tilde{t})$ вплоть до радиуса $r(R,t)$ в момент пролета этого слоя $d\tilde{r}$ через точку состыковки.

7. По поводу возможных значений α отметим, что значение $\alpha = 0$ соответствует пылевидной материи без взаимодействия между пылинками, при этом результаты получаются такими же (см. (23)), как для пробных частиц в центральном поле массы M (см. [1, § 101]). Но, конечно же, такое уравнение состояния вещества вблизи горизонта не может соответствовать действительности. Разумно полагать, что вблизи горизонта действует ультрарелятивистское уравнение состояния вещества, при котором $\alpha = 1/3$. Поэтому, видимо, именно при таком α и нужно искать местоположение горизонта.

8. Казалось бы, что под воздействием градиента давления при $\alpha \neq 0$ падающее вещество должно замедляться, и поэтому горизонт должен образоваться позднее, т. е. сместиться в сторону меньших r, но, как мы только что показали, он смещается в сторону бо́льших r на величину $2\alpha m(R, t_{hor})$. В чем же причина этого противоречия? Из начальных уравнений (3) видно, что причину следует искать в уравнении (3а). Для этого рассмотрим уравнения (3а) и (4) в начальный момент для случая $\alpha \ll 1$. В этот момент $\dot{r} = 0$, $r' = 1$, поэтому запишем

$$[1 - S(R)]\left(1 - 2\alpha r\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) - 2r\ddot{r}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right)^{2\alpha} \approx 1 + 8\pi\alpha r^2\varepsilon.$$

Так как

$$(\varepsilon/\varepsilon_*)^{2\alpha} \approx 1 + 2\alpha\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \quad S(R) = \frac{2M(R)}{R}, \quad r = R,$$

то, проведя несложные преобразования, в линейном по α приближении получим

$$\ddot{r} = -\frac{GM(R)}{r^2}\left[1 - 2\alpha\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right] - \frac{\nabla P}{\rho}\left[1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right] - 4\pi\alpha G r\rho, \tag{26}$$

где $\rho(R,r) = \varepsilon(R,r)/c^2$ — плотность вещества. Здесь для наглядности мы используем обычную (гауссову) систему единиц с $G \neq 1$ и $c \neq 1$. Из (26) видно, что первый член отвечает обычной ньютоновской силе тяготения, второй — силе взаимодействия между частицами — градиенту давления (именно эта сила на первом этапе является причиной замедления скорости падения вещества). Остальные члены не входят в уравнения движения в ньютоновском приближении (поправками в квадратных скобках при этом тоже пренебрегают), но, как мы уже видели, последний член при высоких энергиях начинает доминировать по сравнению со вторым членом, поэтому и возникает эффект смещения горизонта в большую сторону. Таким образом, противоречие снимается. Физически это соответствует «тяготению давления» в ОТО, которое при больших энергиях превосходит градиентные члены.

9. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, благодаря «тяготению давления», обнаружен эффект смещения горизонта в большую сторону по сравнению с его шварцшильдовским значением. Подчеркнем, что этот эффект чисто динамический и в статическом случае (когда все вещество упало) отсутствует.

Во-вторых, согласно результатам Приложения 2, эволюция всей системы при постоянном α полностью определяется профилем распределения плотности энергии в начальный момент, т. е., например, нормированным распределением плотности вещества и значением параметра S в произвольной точке этого распределения.

Если же необходимо описать эволюцию только одного сферического слоя вещества с индексом R, то она полностью определяется тремя безразмерными параметрами в начальный момент на этом слое и в этом смысле не зависит от начального распределения вещества системы под и над этим слоем. Но это вовсе не означает независимости сферических слоев в общем случае, так как именно эти три параметра, как будет видно из Приложения 2, и отвечают за взаимодействие слоев. Вследствие этого интегрирование системы приводит к целому семейству самоподобных решений.

В-третьих, согласно Приложению 2, при определенном выборе начальных параметров появляется локальный экстремум у кривой $V(R)|_{t=\text{const}}$, что приводит при $V = 1$ к образованию второй ловушечной поверхности (apparent horizon) в системе (аналог второго горизонта в решениях Рейснера—Нордстрема и Керра—Ньюмана для электрически заряженной, вращающейся, статической черной дыры; интерпретацию этих решений см., например, в [5, 6]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

До сих пор, говоря о горизонте, мы подразумевали ловушечную поверхность, или горизонт видимости (apparent horizon), как его называют в литературе.

Поясним более подробно на примере, в чем отличие горизонта событий (event horizon) от горизонта видимости. Допустим, у нас уже есть стационарная черная дыра массы M, тогда на радиусе $r = 2M$ существует горизонт видимости. Теперь предположим, что в нашу черную дыру падает еще кусок вещества с массой δM. После его падения радиус горизонта видимости увеличится до $2(M + \delta M)$. Таким образом, если какой-либо наблюдатель до падения куска находился между этими радиусами, то он был вне черной дыры, но уже после падения куска он оказался внутри ее. Понятие горизонта событий является глобальным понятием и определяется всей эволюцией черной дыры или, другими словами, всей массой, которая когда-либо упадет в нее.

При этом для существования черной дыры достаточно уже существования горизонта видимости, который определяет черную дыру локально. При этом, как следует из наших рассуждений, в сферически-симметричном случае эти два горизонта в конце концов совпадают, образуя статическую черную дыру, описываемую решением Шварцшильда. Поэтому далее, говоря о горизонте, мы подразумеваем горизонт видимости.

Докажем, что горизонт в системе со сферической симметрией образуется в момент достижения падающей частицей с ненулевой массой покоя скорости света относительно

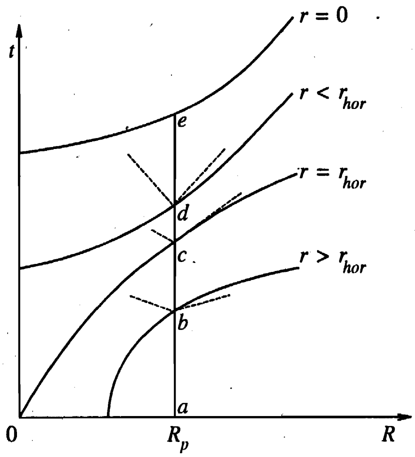

Рис. 1

поверхностей $r = \text{const}$ в той же самой точке. Для этого запишем закон движения для этой частицы в виде

$$r(R,t) = R - \int_0^t \sqrt{U(R,\tilde{t})}d\tilde{t}. \tag{27}$$

Предположим теперь, что мы с большого радиуса $r_\infty(t)$, находясь на пылинке с индексом R_∞, следим за пылинкой с индексом R_p, которая посылает нам луч света, пролетая через радиусы $r_p(R_p,t)$. Критерием того, что пылинка еще не достигла горизонта, является то обстоятельство, что мы все еще видим свет от нее, т. е. свет, распространяясь, еще пересекает радиусы $r > r_p$. Следовательно, критерием достижения пылинкой горизонта является событие, при котором свет, распространяясь от R_p, уже не может пересекать радиусы $r > r_p$. Выразим этот критерий математически.

На рис. 1 прямой вертикальной линией *abcde* обозначена мировая линия пылинки R_p в координатах R и t сопутствующей системы отсчета от момента покоя (a) до центра системы (e) с $r = 0$. При этом кривые сплошные линии, проходящие через точки e, d, c и b обозначают соответственно линии постоянных значений $r(R,t)$ при $r = 0$, $r < r_{hor}$, $r = r_{hor}$ и $r > r_{hor}$. Штриховыми линиями, выходящими из этих точек обозначены конусы, внутри которых может распространяться свет, излученный пылинкой R_p (вне этих конусов свет распространяться не может). Поэтому, согласно указанному выше критерию, горизонт образуется в той точке, где конус касается линии $r = \text{const}$, на рисунке эта линия обозначена как $r = r_{hor}$, она проходит через точку c. Для наглядности на рис. 1 показано, что в точке b световой конус пересекает линии с $r > r_p$, следовательно, в этой точке еще нет горизонта. На этом рисунке также показано, что в точке d световой конус целиком расположен над кривой $r = \text{const}$, проходящей через точку d, следовательно, этот световой конус пересекает только линии с $r < r_p$, поэтому точка d находится уже под горизонтом.

Рассмотрим выражение (27) на одной из кривых $r = \text{const}$ и возьмем на этой кривой его полный дифференциал:

$$0 = dR - \sqrt{U}dt - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{U'(R,\tilde{t})}{\sqrt{U(R,\tilde{t})}}dRd\tilde{t},$$

или

$$\sqrt{U}\frac{dt}{dR}\bigg|_{r=\mathrm{const}} = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{U'(R,\tilde{t})}{\sqrt{U(R,\tilde{t})}}d\tilde{t}. \tag{28}$$

Далее, дифференцируя (27) по R, получаем выражение для r':

$$r' = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{U'}{\sqrt{U}}\,d\tilde{t},$$

с учетом чего из (28) находим

$$\frac{dt}{dR}\bigg|_{r=\mathrm{const}} = \frac{r'}{\sqrt{U}}. \tag{29}$$

Таким образом, мы выразили тангенс угла наклона кривой $r = \mathrm{const}$ к оси R.

Для нахождения тангенса угла наклона светового конуса, по определению, для света имеем $ds^2 = 0$, отсюда из (2) следует

$$\frac{dt}{dR}\bigg|_{light} = \sqrt{e^{\lambda-\nu}}. \tag{30}$$

Согласно сказанному выше, критерием отсутствия горизонта будет условие

$$\frac{dt}{dR}\bigg|_{light} < \frac{dt}{dR}\bigg|_{r=\mathrm{const}}. \tag{31}$$

Подставляя сюда выражения (29) и (30) и учитывая выражение (17), получим этот критерий в виде

$$|V| = \frac{\sqrt{Ue^{\lambda-\nu}}}{r'} < 1. \tag{32}$$

Здесь скорость движения вещества относительно линий $r = \mathrm{const}$ согласно (29) имеет вид

$$|V| = \frac{dl}{d\tau}\bigg|_{r=\mathrm{const}} = \sqrt{e^{\lambda-\nu}}\frac{dR}{dt}\bigg|_{r=\mathrm{const}}.$$

Таким образом, утверждение, что горизонт образуется в момент достижения веществом скорости $V = 1$ относительно поверхностей $r = \mathrm{const}$ доказано. При этом поверхность горизонта разделяет области, в которых r является пространственно-подобной и времениподобной.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для решения уравнений, описывающих коллапс, сначала приведем их к безразмерному виду. Для этого удобно ввести следующие обозначения:

$$x = r/R, \quad \gamma = \frac{\rho_0(R)}{\langle\rho\rangle} = \frac{8\pi\varepsilon_0(R)R^2}{3S(R)}.$$

В этом Приложении мы найдем области допустимых значений параметров γ и S, исследуем характер коллапса при этих параметрах и численно получим решения для функции V^2. Прежде всего нам понадобится знать зависимость $r'(x)$. Дифференцируя выражение (27), получим[5)]

$$r'(x) = 1 + \frac{1}{2}R\int_1^x [\ln U(R,\tilde{x})]'d\tilde{x}. \qquad (33)$$

К сожалению, аналитически точное выражение для r' удается найти только в случае $\alpha = 0$, и только при этом значении α можно точно судить о характере коллапса. Но основные черты этого характера, как будет видно дальше, остаются теми же и в случае $\alpha \neq 0$. Поэтому сначала исследуем случай $\alpha = 0$.

Итак, найдем $r'(R,x)$. Согласно выражению (22) для U, получим

$$\ln[U(R,x)] = \ln[S(R)] + \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Обозначая $y = r' - x$ и учитывая, что $x' = y/R$, имеем

$$(\ln U)' = \frac{S'}{S} - \frac{y}{Rx(1-x)}.$$

Подстановка этого выражения в (33) дает

$$y(x) + x - 1 = \frac{1}{2}\int_1^x \left[\frac{RS'}{S} - \frac{y(\tilde{x})}{\tilde{x}(1-\tilde{x})}\right] d\tilde{x}. \qquad (34)$$

Дифференцируя (34) по x, получаем

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} + a^*(x)y(x) = \sigma^*(R), \qquad (35)$$

где обозначено

$$a^*(x) = \frac{1}{2x(1-x)}, \quad \sigma^*(R) = \frac{RS'}{2S} - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\gamma.$$

Как видно, уравнение (35) совпадает по виду с уравнением (15), а начальные условия, $y|_{t=0} = 0$, такие же, поэтому метод его решения аналогичный. Решение имеет вид

[5)] Здесь и далее $d\tilde{x} = (\dot{r}dt/R)|_{R=\mathrm{const}}$, $\partial/\partial x = (R/\dot{r})(\partial/\partial t)|_{R=\mathrm{const}}$.

$$y(x) = r' - x = \sigma^* \left[\sqrt{\frac{1-x}{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - (1-x) \right]. \tag{36}$$

Найдем область значений r'. Во-первых, условие сжатия вещества имеет вид $r' \le 1$. Во-вторых, условие непересечения[6)] слоев пыли с разными R имеет вид $r' > 0$. Итак,

$$0 < r' \le 1. \tag{37}$$

Допустим, что кривая $V^2(R)$ при $t = t_m = \text{const}$ имеет локальный экстремум, и предположим (для определенности), что это максимум. Тогда горизонт зародится именно в точке локального максимума — точке $R = R_{extr}$. Найдем теперь условие для точки максимума. Во-первых, в этой точке должно быть $V^2(R_{extr}, x) = V^2_{extr}$. Во-вторых, поскольку это первая точка, в которой скорость вещества достигает значения V_{extr}, а скорость коллапса увеличивается со временем, в окрестности этой точки должно быть $V^2 < V^2_{extr}$, или

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V^2(R, t_m)}{\partial R} > 0, \quad R < R_{extr}, \\ &\frac{\partial V^2(R, t_m)}{\partial R} < 0, \quad R > R_{extr}. \end{aligned} \tag{38}$$

Если же окажется, что выражение (38) выполняется с противоположными знаками неравенства, то это будет означать, что на кривой $V^2(R)$ в точке R_{extr} в момент достижения в ней скорости V_{extr} имеется локальный минимум, т. е. в этой точке вещество достигнет скорости V_{extr} в последнюю очередь.

Условие экстремума запишется в виде

$$\frac{\partial V^2(R, x)}{\partial R} = 0,$$

где, согласно выражению (23),

$$V^2(R, x)|_{\alpha=0} = \frac{1 - 1/x}{1 - 1/S(R)}.$$

Дифференцируя это выражение по R, получаем

$$\left.\frac{\partial V^2}{\partial R}\right|_{t=t_m} = \frac{S/R}{1-S} \left[-y + \frac{1-3\gamma}{1-S} \right], \tag{39}$$

где учтено, что $x' = y/R$, $S'/S = (3\gamma - 1)/R$. Тогда с учетом того, что $0 < x \le 1$, $0 < \gamma \le 1$, $-1 < y \le 0$ и $0 < S < 1$, условия (38) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &-y > \frac{3\gamma - 1}{1 - S}, \quad R < R_{extr}, \\ &-y < \frac{3\gamma - 1}{1 - S}, \quad R > R_{extr}. \end{aligned} \tag{40}$$

---

6) Мы рассматриваем именно такой случай, поскольку пересечение слоев означало бы появление бесконечной плотности еще на радиусе $r \neq 0$, что запрещено принципом космической цензуры, см., например, [6].

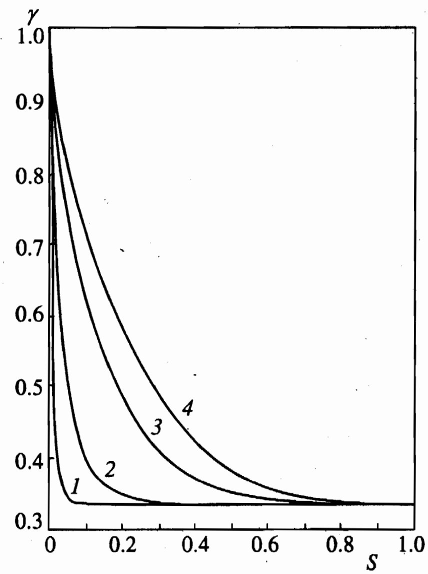

Рис. 2. Зависимости $\gamma(S)$ для существования экстремума скорости при $t = \mathrm{const}$, $\alpha = 0$ и $V_{extr} = 0.1$ (кривая *1*); 0.3 (*2*); 0.7 (*3*); 1.0 (*4*)

Если ввести обозначение $z = \sqrt{(1-x)/x}$ и учесть, что, согласно формуле (23), $z = V\sqrt{1/S - 1}$, то из (40) получим

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}(1-\gamma)\left[z\,\mathrm{arctg}(z) - \frac{z^2}{1+z^2}\right] - \frac{3\gamma-1}{1-S} > 0, \quad R < R_{extr}, \\ &\frac{3}{2}(1-\gamma)\left[z\,\mathrm{arctg}(z) - \frac{z^2}{1+z^2}\right] - \frac{3\gamma-1}{1-S} < 0, \quad R > R_{extr}, \end{aligned} \tag{41}$$

или для точки экстремума можно записать

$$(1-\gamma)\left[z\,\mathrm{arctg}(z) - \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2}{1-S}\right] - \frac{4/3}{1-S} = 0.$$

По этой формуле можно построить кривую раздела $\gamma(S, V_{extr})$ положительных и отрицательных значений производной $(V^2)'$ и определить характер экстремума. Эти кривые для разных значений V_{extr} показаны на рис. 2. Выше и правее них находятся области $V' > 0$, а ниже и левее — области $V' < 0$.

Из рис. 2 видно, что могут существовать (при определенном выборе профиля распределения вещества в начальный момент и параметра S в некоторой точке R_*) два значения R, при которых в некоторый момент времени скорость $V = 1$, и, следовательно, возможность появления второго горизонта в системе.

Появление второго горизонта в физике черных дыр не является новостью (см., например, решение Рейснера—Нордстрема или Керра—Ньюмана в [7]).

Результаты, полученные в этом Приложении, относятся к случаю отсутствия давления, хотя экспериментальный интерес представляет случай $\alpha = 1/3$. Поэтому мы с помощью формул (4), (6), (8), (9), (12), (17), (18), (20), (33) ввели новые безразмерные переменные ($\hat{\nu} = \nu - \nu_0$, $\hat{\lambda} = \lambda - \lambda_0$, $\hat{U} = Ue^{-\nu_0}$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0$) и уравнения для них. При этом начальные условия для них принимают вид

$$\hat{\nu}_0 = \hat{\lambda}_0 = \hat{U}_0 = 0, \quad r'_0 = \hat{\varepsilon}_0 = 1.$$

Обозначая новые координаты как $x = r/R$, $\xi = R/R_*$, $R_* = \text{const}$ и вводя следующие параметры[7]:

$$h = \xi \partial_\xi \nu_0, \quad h_{cr} = S\frac{1 + 3\alpha\gamma}{1 - S}, \quad \eta = h/h_{cr},$$

получаем уравнения для новых переменных в виде

$$\begin{aligned}
&e^{\hat{\nu}/\alpha} = x^4 e^{\hat{\lambda}},\\
&\hat{\varepsilon} = (e^{-\hat{\nu}/\alpha})^{(1+\alpha)/2},\\
&\ln(r'^2 e^{-\hat{\lambda}}) = \int\limits_1^x \left[\xi\frac{\partial_\xi \hat{\nu}}{r'} + \frac{h}{r'}\right] d\tilde{x},\\
&\hat{U} = e^{\hat{\nu}}\left[r'^2 e^{-\hat{\lambda}}(1 - S) - 1 + \frac{S}{x} - \alpha\frac{3\gamma S}{x}\int\limits_1^x \hat{\varepsilon}\tilde{x}^2 d\tilde{x}\right],\\
&r' = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_1^x \xi\partial_\xi(\ln \hat{U})d\tilde{x} - \frac{h}{2}(1 - x).
\end{aligned} \tag{42}$$

Скорость в новых переменных

$$V^2 = \frac{\hat{U}e^{\hat{\lambda}-\hat{\nu}}}{(r')^2(1 - S)}.$$

Отсюда $x_{hor} = S + 2\alpha\tilde{m}$, где

$$\tilde{m} = \frac{m}{R} = \varepsilon_0 R^2 \int\limits_x^1 4\pi\hat{\varepsilon}\tilde{x}^2 d\tilde{x}, \quad \varepsilon_0 R^2 = \frac{3\gamma S}{8\pi}. \tag{43}$$

Отметим, что эту формулу и формулу (36) можно использовать для нахождения поправки δr_{hor} в (25) к смещению горизонта в линейном по α приближении, поскольку, согласно выражению (103.11) из [1] для $\alpha = 0$, имеем

$$8\pi\varepsilon r^2 = \frac{2M'}{r'} = \frac{8\pi\varepsilon_0 R^2}{r'},$$

или

$$\hat{\varepsilon}x^2 = 1/r'.$$

Это выражение можно подставить в (43) и получить квадратурное выражение для искомой поправки.

---

[7] Смысл параметра h_{cr} состоит в том, что, согласно (3а), $\ddot{r} = 0$, когда $h = h_{cr}$ в начальный момент, т. е. система находится в неустойчивом равновесии; здесь и далее $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$.

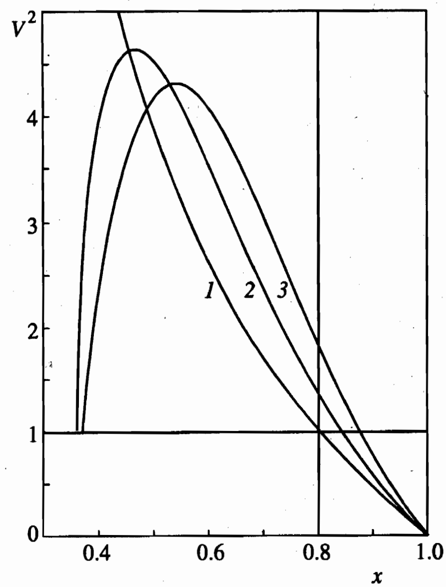

Рис. 3

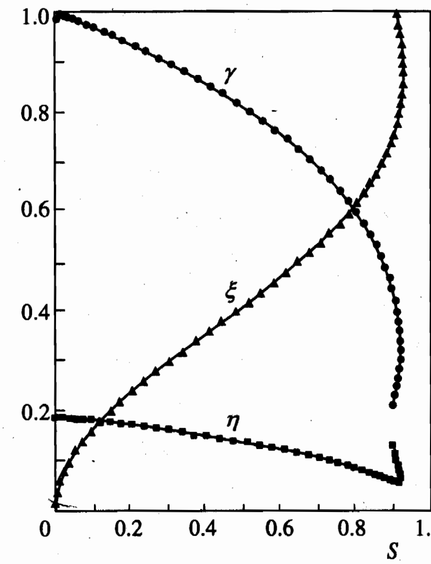

Рис. 4

Рис. 3. Зависимости $V^2(x)$ при начальных условиях $S = 0.8$, $\gamma = 0.6$, $\eta = 0.1$ и $\alpha = 0$ (кривая *1*); 0.15 (*2*); 0.33 (*3*). Вертикальная прямая соответствует местоположению горизонта видимости при $\alpha = 0$

Рис. 4. Зависимости параметров $\gamma(S)$, $\eta(S)$ и $\xi(S)$ при $\varepsilon(\xi)/\varepsilon(0) = \exp(-3\xi^2)$

Кроме того, мы численно, по разностной схеме, проинтегрировали уравнения для случая $\alpha \neq 0$, и результаты для разных значений α представлены на рис. 3. Как это и должно быть, согласно выражению (25), кривые для $V^2(x)$ смещаются вверх и вправо при увеличении от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1/3$.

Численные расчеты подтверждают то, что аналитические результаты этого Приложения остаются справедливыми и при реальном уравнении состояния вещества: $P = \alpha\varepsilon$. На рис. 4 построены зависимости параметров $\gamma(S)$, $\xi(S)$ и $\eta(S)$ для частного случая распределения плотности по Гауссу: $\varepsilon_0(\xi)/\varepsilon_0(0) = \exp(-3\xi^2)$. Сопоставляя этот рисунок с рис. 2, можно видеть, что кривая $\gamma(S)$ на рис. 4 пересекает кривые $\gamma(S)$ на рис. 2 сверху вниз примерно в точке $S \approx 0.92$, если идти от $\xi = 0$ до $\xi = 1$. Как видно на рис. 4, точке $S \approx 0.92$ соответствуют точки $\xi \approx 0.85$ и $\eta \approx 0.1$, поэтому, так как выше и правее кривых на рис. 2 находится область $V' > 0$, а ниже и левее — область $V' < 0$, точка $\xi \approx 0.85$ должна являться точкой локального максимума кривой $V(\xi)$ при постоянном t.

Этот аналитический результат подтверждается численным расчетом кривых $V(\xi)|_{t=\mathrm{const}}$, результаты которого и предсказанные максимумы показаны на рис. 5.

В заключение этого Приложения скажем несколько слов по поводу начальных характеристик и распределения вещества.

При приведении уравнений модели к безразмерному виду оказывается, что решение

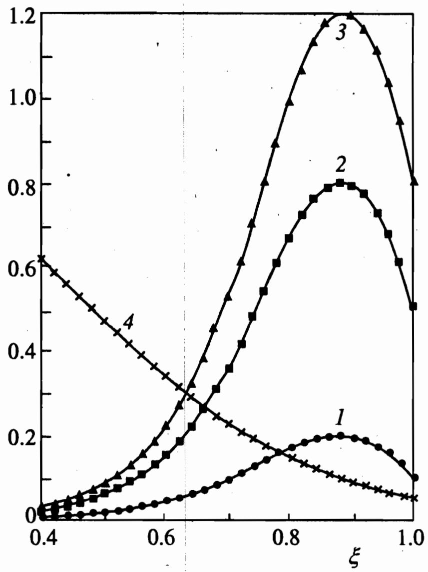

Рис. 5. Зависимости $V^2(\xi)$ при t = const и различных начальных значениях скорости V^2 (кривые *1–3*), а также зависимость $\varepsilon(\xi)/\varepsilon(0) = \exp(-3\xi^2)$ — кривая *4*

для сферического слоя вещества с индексом R полностью определяется тремя безразмерными параметрами в начальный момент на этом слое: $0 < S < 1$, $0 < \gamma < 1$ и $0 < \eta < 1$. Это соответствует заданию начальных условий для гравитационного потенциала и двух параметров, определяющих распределения вещества и градиента давления вблизи рассматриваемой точки. Таким образом, при интегрировании мы находим сразу целое семейство самоподобных решений[8)], характеризуемых только этими тремя параметрами, в которых и заключается зависимость от других слоев вещества под и над рассматриваемым радиусом R.

Авторы выражают благодарность Н. С. Кардашеву, В. Л. Гинзбургу, Б. В. Комбергу, В. Н. Лукашу, Ю. М. Бруку, всем участникам семинаров Отделения теоретической физики и Астрокосмического центра ФИАН за плодотворное обсуждение работы и высказанные важные замечания.

С глубокой признательностью обращаются авторы к памяти Д. А. Киржница, в обсуждении с которым были сформулированы идея и начальные подходы данной работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-15-96616).

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
2. М. А. Подурец, ДАН СССР **154**, 300 (1964).
3. M. W. Choptuik, Phys. Rev. D **44**, 3124 (1991); E-prints archive gr-qc/9607034.
4. P. S. Wesson, J. Math. Phys. **19**, 2283 (1978).
5. Р. Пенроуз, *Структура пространства-времени*, Бибфизмат, Могилев (1972).
6. И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, Москва (1986).
7. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, Москва (1977).

[8)] См., например, по этому вопросу работу [3].