ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 1(7), стр. 35–46 ©1999

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В ВАКУУМЕ

*В. А. Миронов**

Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 23 ноября 1998 г.

Проведено аналитическое исследование особенностей эволюции пространственно ограниченных импульсов, длительностью в несколько периодов колебаний волнового поля. Проанализировано уравнение, описывающее однонаправленное (безотражательное) распространение видеоимпульсов в вакууме. Методом моментов определено изменение длительности, эффективной ширины волнового поля и других характерных усредненных параметров импульса на трассе распространения. Найден широкий класс автомодельных решений, описывающих фокусировку видеоимпульсов. В результате непосредственного интегрирования исходного уравнения показано формирование вблизи переднего фронта импульса подковообразного предвестника.

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенности распространения электромагнитного излучения с шириной спектра порядка несущей частоты стимулируют активный интерес к перспективам использования таких импульсов. Преимущества широкополосного сигнала хорошо известны в радиолокации и радиосвязи [1, 2]. Зондирование исследуемых объектов видеоимпульсами позволяет получить значительно больший объем информации, чем при работе с радиоимпульсами [1–3]. В отличие от квазимонохроматического излучения, в случае импульсов, содержащих несколько периодов колебаний поля, оказывается возможным формирование волновых структур, для которых эффекты дифракционного расплывания заметно ослаблены [4–8]. Они получили название «электромагнитных снарядов» [5]. Успехи оптоэлектроники в генерации СВЧ-излучения с шириной спектра порядка нескольких терагерц нашли практическое применение в томографии [3]. Обсуждаются возможности использования таких электромагнитных импульсов для ускорения заряженных частиц [9].

Целью настоящей работы является дальнейшее исследование особенностей пространственно-временной эволюции видеоимпульсов в вакууме, для которых традиционное приближение медленно меняющихся амплитуд оказывается недостаточным. В отличие от работ [5–8] здесь рассмотрение проведено в приближении, соответствующем френелевской дифракции волнового поля, что позволяет более детально описать его эволюцию. Сначала сформулированы уравнения и получены некоторые необходимые в дальнейшем интегральные соотношения. В разд. 3 использован метод моментов для анализа эффективных параметров импульса. В последних двух разделах рассмотрены

*E-mail: mironov@appl.sci-nnov.ru

точные решения исходного уравнения. Сначала представлены решения автомодельного типа, которые описывают поперечную фокусировку импульсного излучения. Затем проанализировано решение, полученное непосредственным интегрированием исходного уравнения в случае аксиально-симметричного распределения волнового поля.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим распространение в вакууме электромагнитного поля вдоль оси z. Волновое уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \Delta_\perp\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{где} \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Будем искать решение уравнения в виде $\psi = \psi(z, \tau = ct - z, \mathbf{r}_1)$. Полагая, что форма импульса медленно меняется на трассе распространения, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial\tau} = \frac{1}{2}\Delta_\perp\psi. \tag{2}$$

При получении этого уравнения сделано обычное в процессе укорочения уравнения (1) предположение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t} \gg \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Оно соответствует учету «френелевской» дифракции электромагнитного сгустка по поперечной координате. Потому естественно, что в случае квазимонохроматического импульса $\psi = \psi_k\exp(ik\tau)$ из (2) получается хорошо известное параболическое уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды волнового поля $\psi_k(\tau, z, \mathbf{r}_\perp)$.

Уравнение (2) по виду совпадает с уравнением, полученным при преобразовании Бриттенхема ($\tau = ct - z$, $\eta = ct + z$, $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_\perp$) [7, 11]. Отличие заключается в том, что (2) является приближенным уравнением. Преимущества его состоят в том, что (2) представляет собой эволюционное уравнение первого порядка и динамика поля определяется заданием начального распределения на характеристике $z = 0$. Оно сравнительно легко обобщается при учете нелинейности и дисперсии среды. Так, например, линейная часть уравнений Хохлова—Заболотской [12] и Кадомцева—Петвиашвили [13] имеет вид (2).

Используя лагранжиан уравнения (2) с плотностью

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{1}{4}(\nabla_\perp\psi)^2, \tag{3}$$

с помощью обычной вариационной процедуры [14] можно найти следующие интегралы, сохраняющиеся в процессе эволюции системы:

$$I = \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\,d\mathbf{r}_\perp, \tag{4}$$

$$\mathbf{P} = \int\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\nabla_\perp\psi d\tau\,d\mathbf{r}_\perp, \tag{5}$$

$$H = \int(\nabla_\perp\psi)^2 d\tau\,d\mathbf{r}_\perp. \tag{6}$$

Существование этих соотношений связано с трансляционной симметрией уравнения (2). В случае квазимонохроматического импульса они переходят в хорошо известные для параболического уравнения интегральные соотношения (энергии, импульса, гамильтониана), проинтегрированные по τ.

Интегрируя (3) по τ, получим уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{2}\Delta_\perp q, \quad q = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \psi(t', \mathbf{r}_\perp, z)dt', \tag{7}$$

из которого можно найти ряд полезных в дальнейшем соотношений. Умножая (7) на 2ψ, приходим к еще одному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi^2 = \operatorname{div}\psi\nabla_\perp q - \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{(\nabla_\perp q)^2}{2}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что сохранение величины [4]

$$\int \psi^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau = I_2 \tag{9}$$

в случае локализованного распределения волнового поля возможно при условии [4]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(z, \mathbf{r}_\perp, \tau)d\tau = 0. \tag{10}$$

Таким образом, площадь под кривой для поля импульса (10) в каждой точке пространства равна нулю. Иными словами, это означает, что нулевая гармоника во временном спектре импульса отсутствует при любом $\mathbf{r}_\perp$ и z. Действительно, скорость распространения статического поля равна нулю и, следовательно, оно остается вблизи источника излучения.

В случае резкого переднего фронта импульса (например, при $\tau = 0$) из (7) при условии (10) видно, что распределение поля на переднем фронте

$$\psi(z, \mathbf{r}_\perp, \tau = 0) = \psi_0(\mathbf{r}_\perp)$$

не меняется на трассе распространения импульса [4].

Следует отметить, что в результате приведенного исследования мы получили два сохраняющихся интегральных соотношения (4) и (9), которые в случае квазимонохроматического импульса сводятся к одному интегралу, соответствующему закону сохранения числа квантов в параболическом уравнении. Такое вырождение связано с тем, что в приближении медленно меняющихся амплитуд отсутствует предвестник. Наличие двух интегралов отражает более реальную ситуацию.

3. УСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Применение метода моментов, как и в случае параболического уравнения [15], позволяет найти ряд соотношений, описывающих динамику волнового поля. Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 = \mathrm{div}_\perp\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\nabla_\perp\psi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(\nabla_\perp\psi)^2. \quad (11)$$

Оно получается умножением (2) на $\partial\psi/\partial\tau$ и последующим преобразованием правой части соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\Delta_\perp\psi = \mathrm{div}_\perp\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\nabla_\perp\psi\right) - \nabla_\perp\psi\frac{\partial}{\partial\tau}(\nabla_\perp\psi).$$

Интегрируя (11) по $d\tau d\mathbf{r}$, нетрудно найти соотношение (4).

Рассмотрим сначала моменты первого порядка

$$\int \tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 d\mathbf{r}\,d\tau = \langle\tau\rangle, \quad \int \mathbf{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 d\mathbf{r}\,d\tau = \langle\mathbf{r}\rangle,$$

которые описывают движение центра масс волнового поля $\partial\psi/\partial\tau$. С помощью уравнения (11) и интегралов (5), (6) для этих моментов легко получить

$$\frac{\partial\langle\tau\rangle}{\partial z} = \frac{H}{2} = \mathrm{const}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial\langle\mathbf{r}\rangle}{\partial z} = -\mathbf{P} = \mathrm{const}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что центр масс движется по прямой, определяемой начальными условиями (например, при $z = 0$). Для аксиально-симметричного волнового поля ($\mathbf{P} = 0$) скорость движения центра масс по оси z меньше скорости света. Таким образом, дифракция волнового поля ($\nabla_\perp\psi \neq 0$) приводит к эффективному замедлению скорости распространения электромагнитного сгустка.

Моменты второго порядка

$$\int \tau^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 d\mathbf{r}\,d\tau = \langle\tau^2\rangle, \quad \int r_\perp^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 d\mathbf{r}\,d\tau = \langle r_\perp^2\rangle$$

характеризуют эффективные (продольные и поперечные) размеры волнового поля. Их эволюция описывается уравнением второго порядка. Для нахождения этого уравнения необходимо знание не только интегральных соотношений (4) и (5), но и зависимости скорости изменения соответствующих интегральных выражений от $(\partial\psi/\partial\tau)\nabla_\perp\psi$, $(\nabla_\perp\psi)^2$.

Рассмотрим сначала уравнение для длительности импульса $\langle\tau^2\rangle$. Умножая (11) на τ^2 и интегрируя по $d\tau\,d\mathbf{r}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle\tau^2\rangle = \int \tau\left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right) d\tau\,d\mathbf{r}_\perp. \quad (14)$$

Уравнение для скорости изменения $(\psi_x^2+\psi_y^2)$ нетрудно найти из (7). Умножая последнее уравнение на τ и интегрируя, после обычных преобразований находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\int \tau(\psi_x^2 + \psi_y^2)d\tau\,d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{2}\int(\Delta_\perp q)^2 d\tau\,d\mathbf{r}_\perp, \quad (15)$$

где q определяется выражением (7). Таким образом, длительность импульса возрастает по закону

$$\frac{d^2}{dz^2}\langle(\tau - \langle\tau\rangle)^2\rangle = \frac{1}{2}\int(\Delta_\perp q)^2 d\tau\, d\mathbf{r}_\perp > 0. \qquad (14')$$

Более определенную информацию можно получить для изменения поперечных размеров волнового поля. Так, из (11) находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\int x^2\psi_x^2 d\tau\, d\mathbf{r}_\perp = -2\int x\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)d\tau\, d\mathbf{r}_\perp. \qquad (16)$$

Уравнение для изменения компоненты плотности импульса $(\partial\psi/\partial\tau)\nabla\psi$ нетрудно найти из (2) и (7). Умножая полученное уравнение на x и проводя соответствующие преобразования, приходим к довольно простому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int x\psi_\tau\psi_x d\tau\, d\mathbf{r}_\perp = -\frac{H}{2}. \qquad (17)$$

Аналогичные преобразования можно провести и для скорости изменения $\langle y^2\rangle$. В результате получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int r_\perp^2\psi_\tau^2 d\tau\, d\mathbf{r}_\perp = 2H. \qquad (18)$$

Таким образом, как и в случае параболического уравнения [11, 15], эффективный поперечный размер аксиально-симметричного волнового поля увеличивается по закону

$$\langle r_\perp^2\rangle = \langle r_0^2\rangle + Hz^2, \qquad (19)$$

где $\langle r_0^2\rangle$ — характерный размер при $z = 0$.

Сравнивая (12) и (19), можно установить соотношение

$$\langle r_\perp^2\rangle - 2z\langle\tau\rangle = \langle r_0^2\rangle, \qquad (20)$$

которое связывает эффективные масштабы $\langle r_\perp^2\rangle$ и $\langle\tau\rangle$. Его можно интерпретировать следующим образом. Волновой фронт исходного уравнения (1) имеет вид сферы:

$$r^2 + z^2 - c^2t^2 = \text{const}. \qquad (21)$$

В используемых нами в дальнейшем переменных r, z, $\tau = ct - z$ (21) записывается следующим образом:

$$r^2 - 2\tau z + \tau^2 = \text{const}. \qquad (22)$$

В рассматриваемом приближении, описываемом уравнением (2), слагаемым τ^2 в (22) можно пренебречь. Волновой фронт становится параболическим. Усредняя (22) в этих условиях, получаем то же самое соотношение (20), что и с использованием метода моментов. Видно, что переменная $\eta = r^2 - 2\tau z$ является автомодельной переменной уравнения (2). Аналогичные соотношения могут быть найдены и для моментов функции ψ^2. Однако они оказываются менее информативными, поскольку изменение их не связано с интегральными выражениями (4)–(6).

4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Приведенные выше соотношения получены без знания точного решения уравнения и описывают особенности поведения характерных параметров (моментов) пространственно-локализованного распределения волнового поля. Рассмотрим волновые структуры автомодельного типа:

$$\psi = \varphi(z, \eta = r^2 - 2z\tau). \tag{23}$$

Подставляя (23) в исходное уравнение (2), нетрудно найти уравнение для автомодельной функции

$$-z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\eta} = \eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \tag{24}$$

Оно имеет частное решение

$$\varphi_\beta = z^\beta/\eta^{\beta+1}. \tag{25}$$

Для определения возможных значений β воспользуемся следующим обстоятельством. Исходное уравнение обладает трансляционной симметрией по z и τ. Комплексное обобщение (25) ($z \to z + iz_0$, $\tau \to \tau + i\tau_0$) имеет вид

$$\varphi_\beta = \frac{(z+iz_0)^\beta}{\left[r^2 - 2(z+iz_0)(\tau+i\tau_0)\right]^{\beta+1}}. \tag{26}$$

В отличие от (25) последнее выражение не имеет особенности при $r^2 = 2\tau z$ и описывает ограниченное распределение волнового поля, если $\tau_0 z_0 > 0$. Условие (10) отсутствия нулевой гармоники в спектре локализованного решения (26) реализуется при

$$\beta > 0. \tag{27}$$

При этом комплексное волновое поле (26) описывает фокусировку пространственно-локализованного импульса вблизи $z \approx 0$. Параметр z_0 определяет характерный размер фокальной области, τ_0 — длительность падающего импульса ($z \gg z_0$). Так, например, при $\beta = 1$ распределение поля имеет вид

$$\varphi_1 = \left\{4(z+iz_0)\left[\tau - \frac{r^2 z}{2(z^2+z_0^2)} + i\left(\tau_0 + \frac{r^2 z_0}{2(z^2+z_0^2)}\right)\right]^2\right\}^{-1}. \tag{28}$$

Видно, что волновое поле максимально при $\tau^* \approx r^2 z/2(z^2+z_0^2)$. Длительность импульса (характерный продольный размер поля) $\tau_p \approx \tau_0 + r^2 z_0/2(z^2+z_0^2)$ возрастает при удалении от оси системы. Распределение поля на оси системы ($r = 0$) описывается следующими выражениями:

$$\operatorname{Re}\varphi_1 = -\frac{2\tau_0\tau}{z_0(\tau^2+\tau_0^2)^2}, \quad \operatorname{Im}\varphi_1 = -\frac{\tau^2-\tau_0^2}{z_0(\tau^2+\tau_0^2)^2} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{29}$$

$$\operatorname{Re}\varphi_1 = \frac{\tau^2-\tau_0^2}{z(\tau^2+\tau_0^2)^2}, \quad \operatorname{Im}\varphi_1 = -\frac{2\tau_0\tau}{z(\tau^2+\tau_0^2)^2} \quad \text{при} \quad z \to \pm\infty. \tag{30}$$

Из (30) видно, что при прохождении фокальной плоскости амплитудное распределение поля восстанавливается, а фаза меняется на π. Изменение знака решения при этом находится в соответствии с инвариантностью исходного уравнения относительно преобразования $z \to -z$, $\tau \to -\tau$. В фокальной области ($z \approx 0$, $z \ll z_0$) действительная часть решения (29) принимает структуру мнимой при $z \to \infty$, а мнимая — действительной. Этот процесс соответствует изменению фазы на $\pi/2$.

Используя принцип суперпозиции, можно, очевидно, заметно расширить число автомодельных решений. В частности, в случае целочисленных значений β с помощью разложения в ряд Тейлора (Лорана) по z/η нетрудно найти следующее выражение для решения исходного уравнения:

$$\varphi = \frac{1}{z + iz_0} f\left(\frac{r^2}{2(z + iz_0)} - \tau - i\tau_0\right). \tag{31}$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой (31) в (2).

5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Рассмотренные выше автомодельные структуры аналогичны гауссовым волновым пучкам в квазиоптике (см., например, [12]). Они являются «одномасштабными» и не отражают специфических особенностей задачи, связанных с наличием двух сохраняющихся величин (4) и (9). Для иллюстрации этих особенностей рассмотрим эволюцию импульса с резким передним фронтом. В случае аксиально-симметричного волнового поля решение уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$\psi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(\omega) R(\chi) \exp\left(i\frac{\chi^2}{2\omega}z + i\omega\tau\right) J_0(\chi r) d\chi\, d\omega, \tag{32}$$

где

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(r = 0, z = 0, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$$

— спектр импульса на оси системы ($r = 0$) при $z = 0$, $R(\chi)$ — спектр поперечного распределения поля при $z = 0$. Для импульса гауссовой формы $\exp(-r^2/2a^2)$ по поперечной координате для $R(\chi)$ имеем

$$R(\chi) = a^2 \exp\left(-\chi^2 a^2/2\right). \tag{33}$$

Интегрируя (32) по χ, в этом случае получаем

$$\psi = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\omega) \frac{a^2}{a^2 - iz/\omega} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 - iz/\omega} + i\omega\tau\right) d\omega. \tag{34}$$

5.1. Эволюция импульса на оси системы ($r = 0$)

При $r = 0$ из (34) видно, что в процессе распространения ($z \neq 0$) в спектре поля появляется полюс при $\omega = iz/a^2$. Структура импульсов описывается интегралом:

$$\psi(r=0,z,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)\exp(i\omega\tau)}{\omega - iz/a^2}\, d\omega. \tag{35}$$

Для примера рассмотрим импульсы первоначальной формы:

$$\psi(r=0,z=0,\tau) = \psi_n = L_n \exp(-\tau), \tag{36}$$

где L_n — полином Лагерра, определенный на интервале $0 < \tau < \infty$. При $n \geq 1$ такая форма удовлетворяет условию (10). Заметим, что спектральная компонента поля на частоте $\omega = 0$ обращается в нуль (см. (35)) при любом $z \neq 0$. Поэтому даже для импульсов с $\varphi(\omega = 0) \neq 0$ площадь под кривой $\psi(r = 0, z = +0, \tau)$ оказывается равной нулю. Так, в случае импульса формы (36) при $n = 0$:

$$\psi(r=0,z=0,\tau) = \psi_0 = \begin{cases} 0, & -\infty < \tau < 0, \\ \exp(-\tau), & 0 \neq \tau < \infty. \end{cases} \tag{37}$$

Интегрирование (37) приводит к результату

$$\psi(r=0,z,\tau) = \frac{\exp(-\tau) - (z/a^2)\exp(-z\tau/a^2)}{1 - z/a^2}. \tag{38}$$

Таким образом, в процессе распространения импульса форма его становится двухмасштабной. Амплитуда части поля, имеющего форму падающего импульса, изменяется по закону $(1 - z/a^2)^{-1}$. Характерный временной масштаб второго слагаемого $(\exp(-z\tau/a^2))$ определяется поперечным размером поля при $z = 0$ и уменьшается на пути распространения импульса: $\tau_i \sim a^2/z$. На расстоянии

$$z_F = a^2, \tag{39}$$

равном френелевской длине для поля с частотой ν, определяемой длительностью падающего излучения ($\nu = 1$), τ_p сравнивается с характерным временным масштабом начального распределения. В результате форма импульса принимает вид

$$\psi(r=0,z=a^2,\tau\geq 0) = L_1 \exp(-\tau), \tag{40}$$

где $L_1 = 1 - \tau$ — первый полином Лагерра. Заметим, что импульс первоначальной ($z = 0$) формы (40) трансформируется на пути распространения в $\psi(z = a^2) = L_2 \exp(-\tau)$, где $L_2 = 1 - 2\tau + \tau^2/2$ — второй полином Лагерра. Этот результат связан с тем, что для начальных распределений типа (36) порядок полюса в (35) при $z = a^2$ повышается на единицу и, следовательно, форма импульса определяется полиномом L_{n+1}. Отсутствие ортогональности функций (36) не позволяет сделать более общего вывода.

При $z \gg z_F = a^2$ амплитуда поля, имеющего форму падающего импульса (первое слагаемое в (38)), уменьшается по закону z^{-1}, как и в случае квазимонохроматического импульса. Характерный временной масштаб второго слагаемого становится меньше длительности первоначального импульса, амплитуда не зависит от z. Эту часть поля иногда называют дифракционным предвестником [4]. Выражение (38) описывает процесс его формирования.

Рассмотрим энергетическую характеристику поля на оси системы:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(r = 0, z, \tau) d\tau.$$

Интегрирование при ψ, определяемом (38), приводит к следующему выражению:

$$W(z) = \frac{1}{2(1 + z/a^2)}. \tag{41}$$

Таким образом, при $z \gg a^2$ энергия импульса на оси (41) уменьшается обратно пропорционально z. Очевидно, что столь медленный спад связан с существованием предвестника. Особенности его структуры определяются полюсом $\omega = iz/a^2$ подынтегрального выражения (35). Видно, что для всех начальных распределений типа (36) предвестники одинаковы и, следовательно, энергия поля на оси ($r = 0$) таких образований убывает по закону z^{-1}. Процесс столь медленного уменьшения энергии импульса на пути распространения (медленнее, чем z^{-2}) называют эффектом электромагнитного снаряда [5]. Он связан с наличием высоких гармонических составляющих импульса ($\omega \to \infty$), для которых выполнено приближение геометрической оптики. Длина пути, на которой этот закон выполняется, определяется длительностью переднего фронта импульса τ_p ($\tau_p \ll 1$) и при $z > a^2/\tau_p$ спад становится более быстрым ($W \propto z^{-2}$).

5.2. Динамика пространственного распределения

Исследование пространственной структуры связано с вычислением интеграла (34), что не удается сделать. Однако можно получить представление о динамике пространственного распределения, анализируя коэффициенты ряда Тейлора волнового поля по степеням r^2:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z, \tau) \left(\frac{r^2}{2}\right)^n. \tag{42}$$

Функции ψ_n проще найти непосредственно из уравнения (2). Подставляя (42) в (2) и приравнивая коэффициенты при r^{2n}, получаем рекуррентные соотношения:

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z\, \partial \tau}. \tag{43}$$

Таким образом, все коэффициенты ряда находятся непосредственным дифференцированием волнового поля на оси системы (35) $\psi_0 = \psi(r = 0, z, \tau)$. Отметим, что эти коэффициенты удовлетворяют условию (10) — площадь под кривой ψ_{n+1} равна нулю ($\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+1} d\tau = 0$) на пути распространения импульса по z.

Для импульса первоначальной формы (37), подставляя (38) в (43), найдем выражение для коэффициента при r^2:

$$\psi_1 = -\frac{b\,[(b - z) + b(1 - b)\tau]\exp(-b\tau) + \exp(-\tau)}{a^2(1 - b)^2}, \tag{44}$$

где $b = z/a^2$. Аналогичным образом могут быть вычислены и другие коэффициенты (43).

В двух наиболее интересных случаях $b = 1$ и $b \gg 1$ выражения для коэффициентов ψ_n заметно упрощаются. Так, на расстоянии $z = a^2$, соответствующем френелевской длине ($b = 1$), можно получить

$$\psi_n = (-1)^n \frac{L_{n+1}(\tau)}{n! a^{2n}} \exp(-\tau). \tag{45}$$

В результате находим, что пространственно-временная структура описывается следующим выражением:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^n \frac{L_{n+1}(\tau)}{n!} \exp(-\tau). \tag{46}$$

Довольно быстрая сходимость коэффициентов ряда (45) позволяет ограничиться при качественном анализе небольшим количеством членов ряда (46).

На переднем фронте ($\tau \approx 0$) ряд (42) по степеням $r^2/2$ является знакопеременным и описывает распределение поля $\exp(-r^2/2a^2)$. Для корней полиномов Лагерра L_n, которые определяют поведение коэффициентов ряда (42), известно следующее выражение [16]:

$$\tau_m = \frac{j_m^2}{2(2n+1)} \left[1 + \frac{j_m^2 - 2}{24(2n+1)}\right], \tag{47}$$

где m — номер корня, j_m — корень функции Бесселя нулевого порядка $J_0(j)$. На оси системы ($r = 0$) поле обращается в нуль и меняет знак при $\tau = 1$. Исследование корней (47) показывает существование областей изменения τ, в которых два последовательных коэффициента ряда имеют одинаковые знаки. Так, например, при $1 > \tau > 0.7$ коэффициенты ψ_0 и ψ_1 положительны и учет членов более высокого порядка по r^2 помогает локализовать распределение поля в поперечном направлении. Это означает, что вблизи заднего фронта импульса ($\tau = 1$) сосредоточены довольно сильные неоднородности волнового поля.

На расстояниях z, много бо́льших френелевской длины ($z \gg a^2$, $b \gg 1$), из (44) находим

$$\psi_1 \approx -\frac{L_1(z\tau/a^2)}{a^2} \exp\left(-\frac{z\tau}{a^2}\right). \tag{48}$$

Зависимость ψ_1 от автомодельной переменной $\eta = z\tau/a^2$ заметно упрощает рекуррентное соотношение (43). Более того, применяя известные функциональные соотношения для полиномов Лагерра [17], удается получить выражения, аналогичные формулам (45) для коэффициентов ψ_n ряда Тейлора (42):

$$\psi_n = (-1)^n \frac{L_n(z\tau/a^2)}{n! a^{2n}} \exp\left(-\frac{z\tau}{a^2}\right). \tag{49}$$

Заметим, что неавтомодельным является коэффициент ψ_0, описывающий поведение поля на оси системы ($r = 0$). В условиях $z \gg a^2$

$$\psi_0 = -\frac{a^2}{z} \exp(-\tau) + \exp\left(-\frac{z\tau}{a^2}\right). \tag{50}$$

Рассмотрим далее пространственную структуру части поля, относящуюся к дифракционному предвестнику. Пренебрегая первым слагаемым в (50), получим

$$\psi_{pr} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n}{n!} \frac{z\tau}{a^2} \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^n \exp\left(-\frac{z\tau}{a^2}\right). \tag{51}$$

Если воспользоваться формулой из справочника [17] для производящей функции полиномов Лагерра, приходим к следующему выражению:

$$\psi_{pr} = I_0 \left(2\sqrt{\frac{z\tau}{a^2}\frac{r^2}{2a^2}}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2} - \frac{z\tau}{a^2}\right), \tag{52}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

В силу линейности исходного уравнения очевидно, что (52) является решением исходного уравнения (2). Структура решения (52) отражает симметрию рассматриваемого уравнения относительно замены z на τ, а τ на z. Наличие трансляционной симметрии ($z \to z + iz_0$, $\tau \to \tau + i\tau_0$) позволяет, как и в разд. 4, провести комплексное обобщение решения (52). Аналогично выражению (28) оно описывает поперечную фокусировку пространственно ограниченного импульса вблизи $z \approx 0$.

Из (52) видно, что поле, локализованное вблизи переднего фронта ($\tau \geq 0$), при $r \gg a$ сосредоточено вблизи параболы $r^2 = 2z\tau$:

$$\psi_{pr}(r \gg a) \approx \frac{a}{(2z\tau r^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\left(r - \sqrt{2z\tau}\right)^2}{2a^2}\right] \tag{53}$$

с характерным поперечным масштабом порядка a и временны́м (продольным) $\sim a^2/z$. Амплитудное значение поля ($r = \sqrt{2z\tau}$) уменьшается на пути распространения импульса по закону

$$\psi_{pr} \propto 1/\sqrt{z\tau}, \tag{54}$$

т. е. существенно медленнее, чем по закону z^{-1} для квазимонохроматических импульсов.

Мы рассмотрели некоторые особенности эволюции пространственно ограниченных импульсов с шириной спектра порядка несущей частоты в процессе однонаправленного (безотражательного) распространения в вакууме. Как и в случае квазимонохроматического излучения, изменение характерных параметров видеоимпульса удается проанализировать с помощью моментов. Показано, что центр масс волнового поля движется по прямой с групповой скоростью, меньшей скорости света, эффективный поперечный размер возрастает пропорционально z. Найден широкий класс автомодельных решений, модифицирующих структуры типа гауссовых волновых пучков в квазиоптике для видеоимпульсов.

Для начальных распределений более общего вида показано, что в процессе распространения происходит выделение дифракционного предвестника. Пространственная структура этой части поля имеет форму подковы (53). Амплитуда поля убывает более медленно, чем в случае квазимонохроматического импульса.

Автор признателен сотрудникам отдела физики плазмы Института прикладной физики РАН и прежде всего А. Г. Литваку, В. Е. Семенову, А. И. Смирнову и А. А. Балакину за полезные обсуждения проблемы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-02-17205 и 99-02-16399).

Литература

1. Х. Ф. Хармут, *Несинусоидальные волны в радиолокации и связи*, Радио и связь, Москва (1985).
2. Л. Д. Бахрах, А. А. Блискавицкий, УФН **162**(12), 160 (1992).
3. D. M. Mittleman, R. H. Jacobsen, and M. C. Nuss, IEEE J. of selected topics in Quan. Elect. **2**, 679 (1996).
4. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **53**, 188 (1991).
5. T. T. Wu, J. Appl. Phys. **57**, 2370 (1985).
6. Л. Г. Содин, Радиотехника и электроника **37**, 1014 (1991). О. А. Третьяков, А. Н. Думин, Электромагнитные волны, электронные системы **3**, 12 (1998).
7. R. W. Ziolkowski, Phys. Rev. A **39**, 2005 (1989).
8. N. George and S. Radic, Opt. Commun. **139**, 1 (1997).
9. В. А. Алешкевич, В. К. Петерсон, Письма в ЖЭТФ **66**, 323 (1997).
10. B. Rau, T. Tajima, and H. Hojo, Phys. Rev. Lett. **78**, 3310 (1997).
11. J. N. Brittingham, J. Appl. Phys. **54**, 1179 (1983).
12. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
13. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1967).
15. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, А. И. Таланов, Изв. Вузов. Радиофизика **14**, 1453 (1971). С. Н. Власов, А. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Н. Новгород (1997).
16. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
17. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).