ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 6, стр. 2143–2159

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА В ОДНООСНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ: ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

*Д. Э. Фельдман**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 12 ноября 1998 г.

Найдено точно критическое поведение поперечной полю компоненты намагниченности вырожденных классических магнетиков с взаимодействием только ближайших соседей в одноосном случайном магнитном поле при нулевой температуре. При гауссовом распределении случайного поля асимптотика поперечной намагниченности в сильных полях не зависит от пространственной размерности и имеет вид $m_\perp \propto \ln h_0/h_0^2$, где h_0 — ширина распределения. При бимодальном распределении, когда случайно только направление поля, а амплитуда фиксирована, поперечная намагниченность ведет себя как $m_\perp \propto \exp(-\mathrm{const}/(H_c - H)^{D/2})$, где H — амплитуда случайного поля, D — пространственная размерность, H_c — критическое поле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к фазовым переходам в системах с беспорядком типа случайное магнитное поле [1–3] продолжается уже больше 20 лет. В конце семидесятых годов модель Изинга в случайном поле была предложена для описания допированных антиферромагнетиков, помещенных в однородное внешнее поле [4–6]. Позже был обнаружен ряд других систем с беспорядком типа случайное поле. Сюда относятся различные структурно неупорядоченные вещества [7–9], классические [10] и квантовые [11–13] жидкости и жидкие кристаллы [14, 15] в пористых матрицах, а также вихревые фазы грязных сверхпроводников [16, 17].

Теоретическое исследование этих систем столкнулось с серьезными трудностями. Первые работы [18–20], посвященные изинговскому магнетику в случайном поле, привели к красивому результату, известному как редукция Паризи—Сурласа: критические индексы грязной системы в пространстве размерности D такие же, как в чистом $(D-2)$-мерном магнетике. Этот результат подразумевает, что в трехмерном ферромагнетике в случайном поле дальний порядок отсутствует. Однако эксперименты с допированными антиферромагнетиками в однородном внешнем поле не подтвердили это предсказание теории [5]. Через несколько лет наличие дальнего порядка в трехмерной модели Изинга в случайном поле было доказано строго [21–23]. Последующие эксперименты [1] и численные симуляции [24] показали, что и значения критических индексов во всех размерностях предсказаны неверно. Причина провала теории, видимо, связана со сложной структурой энергетического рельефа неупорядоченной системы [25, 26].

*E-mail: feldman@itp.ac.ru; dima@feb.uupc.chg.ru

В результате отказывается служить теория возмущений, использованная в ранних работах. Поскольку сложный энергетический рельеф характерен для среднеполевых систем, в которых присутствует нарушение репличной симметрии [27–30], соблазнительно использовать концепцию нарушения репличной симметрии и в неупорядоченных системах с конечным радиусом взаимодействий. В последнее время на этом пути были достигнуты успехи [31–35], благодаря использованию вариационного метода, учитывающего возможность нарушения репличной симметрии. Однако для решения задачи о фазовом переходе приближенный вариационный подход недостаточен.

В отсутствие надежного систематического метода важными становятся точные результаты, которые удается получить для конкретных моделей. В системах со случайными полями и конечным радиусом взаимодействия точные решения удается получить в двух случаях: в одномерных моделях [36] и в сферическом приближении [37–40]. Поскольку в одномерном случае фазовый переход отсутствует, точные результаты о критическом поведении имеются только для сферической модели, когда число компонент параметра порядка бесконечно.

В настоящей работе изучено критическое поведение вырожденных классических магнетиков с конечным числом компонент (XY- и гейзенберговского магнетиков) и конечным радиусом взаимодействия в одноосном случайном магнитном поле при нулевой температуре. Рассмотрено критическое поведение поперечной полю компоненты намагниченности вблизи значения средней амплитуды случайного поля, при котором намагниченность обращается в нуль. Эта задача интересна тем, что она поддается точному и при этом математически строгому решению в любой размерности пространства. Краткое сообщение на эту тему было опубликовано в заметке [41]. В настоящей работе содержится подробное изложение представленных в [41] результатов. Метод основан на доказательстве строгих верхней и нижней оценок для намагниченности. Эти оценки удается подобрать достаточно близкими, для того чтобы из них можно было извлечь асимптотическое поведение намагниченности около точки фазового перехода.

В работе изучены два вида распределения случайного поля: гауссов закон и бимодальное распределение, при котором случайно только направление поля, а его абсолютная величина фиксирована. При бимодальном распределении случайного поля модель применима к описанию грязных антиферромагнетиков в однородном магнитном поле. Квантовые флуктуации ниже не учитываются, т. е. спины считаются большими.

Критическое поведение рассматриваемой модели при ненулевой температуре изучалось с помощью метода ренормгруппы в работах [42–44]. При нулевой температуре критическое поведение намагниченности оказывается существенно другим, чем степенной закон, который предсказывают ренормгрупповые вычисления для конечной температуры, причем между гауссовым и бимодальным случаями имеется большое различие.

Модель описывается следующим гамильтонианом:

$$H = -J\sum_{\langle ij\rangle}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j - \sum_i H_i S_i^z, \tag{1}$$

где $\mathbf{S}_i$ — спиновые векторы единичной длины, H_i — случайные поля, $\sum_{\langle ij\rangle}$ обозначает суммирование по парам соседних узлов D-мерной кубической решетки. Расстояние между соседними спинами принято ниже за единицу. Рассматриваются два вида функции распределения случайного поля:

1) гауссово распределение шириной h_0:

$$P(H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_0} \exp\left(-\frac{H_i^2}{2h_0^2}\right); \tag{2}$$

2) бимодальное распределение

$$P(H_i) = c\delta(H_i + H) + (1 - c)\delta(H_i - H), \tag{3}$$

где c и $1 - c$ — вероятности двух противоположных направлений случайного поля $\pm H$.

Для бимодального распределения случайного поля гамильтониан (1) можно получить с помощью калибровочного преобразования гамильтониана маттисовского спинового стекла [45, 46] в однородном магнитном поле H. Можно проверить, что результаты, найденные в бимодальном случае, относятся также к антиферромагнетикам с беспорядком типа случайная связь в однородном внешнем поле.

Поперечная полю компонента намагниченности, которая интересует нас ниже, возникает по тому же механизму, что и поперечная однородному внешнему полю компонента параметра порядка в антиферромагнетиках [47]. Для гауссова распределения случайного поля поперечная намагниченность $m_\perp$ отлична от нуля при любой ширине распределения $h_0 < \infty$. Ниже будет строго доказано, что для больших h_0 поперечная намагниченность подчиняется закону

$$m_\perp \propto \mathrm{const}\frac{\ln h_0}{h_0^2} \tag{4}$$

при любой размерности пространства D. Точная формулировка результата состоит в неравенствах (16) для среднего по беспорядку и по объему значения намагниченности в термодинамическом пределе. Для бимодального распределения случайного поля поперечная намагниченность обращается в нуль в сильных полях, $H > H_c = 4DJ$. Как будет показано ниже, при амплитуде случайного поля H, близкой к критическому полю H_c, поперечная намагниченность подчиняется уравнению

$$m_\perp \propto \exp\left(-\frac{\mathrm{const}}{(H_c - H)^{D/2}}\right). \tag{5}$$

Строгий результат состоит в оценках (33).

Статья построена следующим образом. Во втором разделе критическое поведение поперечной намагниченности (4), (5) поясняется на основе качественных соображений. В третьем разделе приведен строгий вывод верхней и нижней оценок для намагниченности при гауссовом распределении случайного поля. В четвертом разделе разбирается бимодальный случай. Две леммы, которые при этом используются, вынесены в Приложения. В пятом разделе содержится обсуждение результатов.

Ниже сформулированы вспомогательные предложения, которые потребуются в дальнейшем.

Во-первых, заметим, что в основном состоянии поперечные полю компоненты намагниченности всех спинов направлены в одну и ту же сторону. В самом деле, энергия взаимодействия со случайным полем от направления поперечных компонент не зависит. Обменная же энергия минимальна при их одинаковой ориентации. Отсюда следует, что если у всех спинов поперечные компоненты отличны от нуля, то они направлены одинаково. В отдельном рассмотрении нуждается случай, когда некоторые спины в основном состоянии направлены параллельно случайному полю. В этом случае система могла бы разбиться на кластеры, в которых поперечная намагниченность направлена по-разному. Легко, однако, видеть, что в основном состоянии поперечная компонента намагниченности может обращаться в нуль лишь у всех спинов одновременно. Чтобы убедиться в этом, повернем поперечные компоненты всех спинов так, чтобы они смотрели в одну и ту же сторону. Энергия системы вследствие этого не будет повышена. Возьмем теперь такой параллельный полю спин S, у которого есть сосед с ненулевой поперечной компонентой. На спин S действует эффективное поле, включающее случайное поле и поле Вейсса, возникающее благодаря обменному взаимодействию с соседними спинами. Это эффективное поле имеет поперечную случайному полю компоненту. Энергия системы понизится, если не меняя направления остальных спинов, повернуть спин S так, чтобы он был направлен по эффективному полю. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Мы пришли к выводу, что все спины в основном состоянии лежат в одной плоскости. Этим объясняется тот факт, что критическое поведение (4), (5) одно и то же при любом числе компонент спина. Поэтому ниже мы вправе предполагать, что спины $\mathbf{S}_i$ двухкомпонентные и знак поперечной полю компоненты спина положителен:

$$S_i^z = \cos\phi_i, \quad S_i^x = \sin\phi_i \geq 0. \tag{6}$$

Теперь наша задача состоит в вычислении среднего по реализациям беспорядка значения поперечной компоненты любого одного спина в основном состоянии

$$m_\perp = \overline{\sin\phi_i}. \tag{7}$$

Если основное состояние вырождено, то можно выбрать любое из основных состояний, поскольку полученные ниже оценки относятся ко всем основным состояниям. Разумеется, среднее (7) не зависит от выбора спина только в термодинамическом пределе, когда несущественны краевые эффекты. В рассматриваемой задаче переход к термодинамическому пределу не вызывает трудностей. В гауссовом случае для перехода к термодинамическому пределу надо заметить, что оценки, выведенные в третьем разделе, справедливы для всех спинов, удаленных от границы системы дальше чем на 5 (расстояние между соседними спинами принято за 1). В бимодальном случае краевые эффекты несущественны для спинов, удаленных от границы на расстояния $L > \exp(1/(H_c - H))$.

Нами многократно будут использоваться два неравенства, вывод которых приведен ниже. В основном состоянии каждый спин $\mathbf{S}_k$ направлен по эффективному полю, зависящему от случайного поля H_k и направлений соседних спинов $\mathbf{S}_l$. Это выражается уравнением

$$\sin\phi_k = \left(\cos\phi_k J \sum_l \sin\phi_l\right) \Big/ \left(H_k + J\sum_l \cos\phi_l\right). \tag{8}$$

При достаточно большом H_k отсюда следует неравенство

$$\sin\phi_k \leq \left(J\sum_l \sin\phi_l\right) \Big/ \left(|H_k| - 2DJ\right). \tag{9}$$

С учетом того, что $\sin\phi_l \leq 1$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\sin\phi_k \leq 2DJ/(|H_k| - 2DJ). \tag{10}$$

2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Целью этого раздела является изложение интуитивных соображений, поясняющих происхождение результатов работы. Строгие доказательства, содержащиеся в третьем и четвертом разделах, получаются формализацией этих наводящих соображений.

2.1. Гауссов случай

При гауссовом распределении случайного поля результат (4) не зависит от пространственной размерности. Поэтому начнем с нуль-мерного случая.

Для этого рассмотрим двухспиновую модель с гамильтонианом

$$H = -J\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 - H_1S_1^z - H_2S_2^z, \tag{11}$$

где H_1 и H_2 — случайные поля. Предположим, что поле

$$H_2 \gg J, \tag{12}$$

а поле H_1 такое, что

$$|H_1 + J| < \epsilon J^2/|H_2|, \epsilon \ll 1. \tag{13}$$

Сравним энергии двух равновесных (т. е. таких, что спины направлены по локальному эффективному полю и их компоненты подчиняются уравнению (8)) состояний: состояния A, в котором $S_1^x = S_2^x = 0$, и состояния B, в котором $S_1^x \approx 1, S_2^x \approx J/|H_2|$. Простое вычисление показывает, что состояние B глубже: проигрыш в энергии взаимодействия спина S_2 с магнитным полем компенсируется выигрышем в энергии взаимодействия поперечных полю компонент спинов. Поэтому в основном состоянии поперечная намагниченность системы порядка единицы. Для гауссова распределения случайных полей H_1, H_2 ширины $h_0 \gg J$ рассмотренная конфигурация случайных полей (12), (13) имеет вероятность $P \sim \ln h_0/h_0^2$. Если же неравенство (13) не выполнено, то глубже состояние A, и поперечная намагниченность равна нулю. Отсюда вытекает ответ (4).

В D-мерной ситуации замечаем, что при большой ширине гауссова распределения h_0 основной вклад в поперечную намагниченность дают редкие области, в которых случайное поле порядка обменной константы. Можно показать, что при удалении от таких областей поперечная намагниченность экспоненциально быстро убывает. Поэтому намагниченность системы сосредоточена в редких кластерах, состоящих из нескольких спинов. Эти кластеры можно рассматривать как нульмерные системы. В результате критическое поведение (4) сохраняется в любой размерности пространства.

2.2. Бимодальный случай

Как и в гауссовом случае, основной вклад в намагниченность происходит от редких кластеров, но теперь магнитное поле по модулю фиксировано. Основную роль играют кластеры, в которых магнитное поле равно нулю в среднем по объему. Именно в таких кластерах стремление обменного взаимодействия придать всем спинам одинаковое направление вступает в противоречие со стремлением спинов быть направленными по магнитному полю. Строгий анализ показывает, что поперечная намагниченность сосредоточена в кластерах, в которых случайное поле ориентировано вверх и вниз в шахматном порядке.

Найти энергию подобного кластера объема $V = L^D$ (L — размер кластера), когда поперечная компонента всех спинов $m_\perp$ одинакова, — легкая задача. Если не учитывать поверхностных эффектов, то при малых $m_\perp$ энергия выражается следующим образом:

$$E = \mathrm{const}V - V\frac{H_c - H}{2}m_\perp^2, \tag{14}$$

где H — амплитуда случайного поля, $H_c = 4DJ$. Однако состояние с неоднородным по объему кластера значением намагниченности выгоднее, так как в нем ниже потеря энергии, связанная с границей кластера. Предполагая, что намагниченность изменяется плавно по объему от нуля на границе до некоторого значения m в центре кластера, оцениваем энергию, как

$$E \sim \mathrm{const}V - V\frac{H_c - H}{2}m^2 + JL^{D-2}m^2, \tag{15}$$

где L — размер кластера. Состояние с ненулевым L выгодно при $L > 1/\sqrt{H_c - H}$, т. е. $V > (H_c - H)^{-D/2}$. Поскольку большие кластеры экспоненциально редки по величине их объема, отсюда выводится ответ (5).

Ниже результаты (4), (5) обоснуются строго.

3. ГАУССОВО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Мы оцениваем среднее по беспорядку $\overline{\sin\phi_0}$ поперечной полю компоненты спина $\mathbf{S}_0$ в узле решетки S_0. Наша цель состоит в доказательстве следующих неравенств

$$\overline{\sin\phi_0} > C_1\frac{\ln h_0}{h_0^2}, \tag{16a}$$

$$\overline{\sin\phi_0} < C_2\frac{\ln h_0}{h_0^2}, \tag{16b}$$

где C_1 и C_2 — константы.

В следующем разделе содержится вывод формулы ($16a$). Кроме того, в этом разделе вводятся соглашения об обозначениях, используемых в последующих разделах.

Везде далее const и буквы $\alpha, \gamma, \delta, \epsilon, \Omega, C, C_1, C_2$ обозначают константы, зависящие от размерности пространства D, но не от амплитуды случайного поля.

3.1. Оценка намагниченности снизу

Рассмотрим конфигурацию случайных полей, для которой

$$0 < H_0 + 2DJ < \epsilon\sum_k \frac{J^2}{H_k}, \tag{17}$$

$$H_k > \Omega J, \quad H_p > \Omega J. \tag{18}$$

В этих формулах H_0 — поле на узле S_0, H_k — поля на соседних с S_0 узлах S_k, H_p — поля, действующие на спины $\mathbf{S}_p$, $p \neq 0$, соседние с соседями спина $\mathbf{S}_0$ (и отличные от $\mathbf{S}_0$), константы $\epsilon \ll 1$, $\Omega \gg 1$. Аналогичное соглашение о спиновых индексах k, p мы буд... использовать везде ниже без пояснений. Ограничения на константы ϵ и Ω будут ясны и... схемы доказательства, изложенной в настоящем разделе. При больших h_0 вероятност... конфигурации (17), (18) порядка $\ln h_0/h_0^2$. Поэтому для доказательства формулы (16a) достаточно показать, что $\sin\phi_0 \sim 1$. С этой целью сравниваем энергии двух состояний: состояния A, имеющего наименьшую возможную энергию при ограничении $\sin\phi_0 < \epsilon$, и состояния B, которое будет описано ниже, и в котором $\sin\phi_0 = 1$. В состоянии B все спины, кроме $\mathbf{S}_0$ и его соседей $\mathbf{S}_k$, направлены в ту же сторону, что и в состоянии A. Спины $\mathbf{S}_k$ предполагаются направленными по локальному эффективному полю:

$$\sin\phi_k = \left(\cos\phi_k J \sum_l \sin\phi_l\right) \Big/ \left(H_k + J\sum_l \cos\phi_l\right), \tag{19}$$

где $\sum_l$ обозначает суммирование по всем соседям спина $\mathbf{S}_k$, включая спин $\mathbf{S}_0$. Ниже аналогичное обозначение будет использоваться без пояснений. В состоянии A формула (19) тоже имеет силу, поскольку она выражает условие экстремума энергии по отношению к углам ϕ_k.

Как будет видно ниже, состояние B глубже. Это связано с тем, что проигрыш в энергии взаимодействия спинов $\mathbf{S}_k$ со случайным полем меньше выигрыша в энергии обменного взаимодействия их поперечных полю компонент со спином $\mathbf{S}_0$.

Из формулы (19) следует оценка вида (9) величин ϕ_k. В состоянии A аналогичная оценка имеется и для спинов $\mathbf{S}_p$ (ведь в состоянии A они тоже направлены по локальному полю). Из этой оценки следует неравенство (10) для величин $\sin\phi_p$. Легко проверить, что спины $\mathbf{S}_k$ и $\mathbf{S}_p$ образуют углы меньшие $\pi/2$ с соответствующими случайными полями. В сочетании с уравнениями (9), (10) это позволяет оценить $\cos\phi_{(k,p)}$.

Теперь легко оценить вклад в энергию состояния A, зависящий от спинов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_k$. С точностью до не зависящей от спинов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{S}_k$ константы этот вклад равен

$$E(\phi_0, \phi_k) = -(H_0 + 2DJ)\cos\phi_0 + \sum_k (H_k + J\cos\phi_0)(1 - \cos\phi_k) -$$
$$- J\sum_k \sin\phi_k \sin\phi_0 + J\sum_k (1-\cos\phi_k)\sum_p \cos\phi_p - J\sum_k \sin\phi_k \sum_p \sin\phi_p. \tag{20}$$

В этой формуле обозначение $\sum_k(\ldots)\sum_p$ подразумевает суммирование по парам только соседних спинов $\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_p$. Аналогичного соглашения об обозначениях мы будем придерживаться и ниже. Перечисленные выше оценки позволяют заключить, что в случае A

$$E > -\alpha \sum \frac{J^2}{H_k}, \quad \alpha \ll 1. \tag{21}$$

По аналогии с (9) в состоянии B можно оценить углы ϕ_k снизу:

$$\sin\phi_k \geq \frac{J\cos\phi_k}{H_k + (2D-1)J}. \tag{22}$$

Полученные выше оценки позволяют оценить энергию (20) в случае B. Оказывается,

$$E < -b\sum_k \frac{J^2}{H_k}, \quad b \approx 1/2. \tag{23}$$

Мы видим, что состояние B глубже. Отсюда заключаем, что в основном состоянии $\sin\phi_0 > \epsilon$ и извлекаем требуемую оценку (16a).

Совершенно аналогично проводится и доказательство того, что поперечная намагниченность отлична от нуля при любой ширине гауссова распределения.

3.2. Оценка намагниченности сверху

Перейдем к выводу уравнения (16*b*). Если магнитное поле H_0 на узле S_0 велико по сравнению с обменной константой, то спин $\mathbf{S}_0$ ориентирован почти вдоль поля. Вклад в поперечную намагниченность возникает поэтому только от спинов, находящихся в слабом случайном поле. Этот вклад зависит как от поля, действующего на данный спин, так и от полей в соседних узлах. Однако от величины случайного поля, действующего на удаленные спины, этот вклад не зависит. Причина состоит в том, что поперечные компоненты спина быстро убывают при удалении от области слабого поля. Поэтому корреляции между далекими спинами слабы. Оказывается, что в пределе больших h_0 вклад спина $\mathbf{S}_0$ в поперечную намагниченность определяется, главным образом, конфигурацией случайного поля внутри куба Г со стороной 9 (расстояние между соседними спинами принято за единицу) и центром в узле S_0.

Ниже рассматриваются четыре возможности для распределения случайного поля в кубе Г:

1) по крайней мере в двух точках куба Г случайное поле $H_i < \Omega J$, где константа $\Omega \gg 1$;

2) во всех точках куба $H_i > \Omega J$;

3) случайное поле $H_i < \Omega J$ в одной точке куба, причем это не центр куба S_0;

4) случайное поле $H_0 < \Omega J$, в остальных точках куба $H_i > \Omega J$.

Во всех случаях наша задача — оценить вклад в $\overline{\sin\phi_0}$, возникающий от соответствующих конфигураций поля.

1) Этот случай совсем простой. Вероятность того, что он реализуется, порядка $1/h_0^2$, и при этом $\sin\phi_0 \leq 1$. Поэтому соответствующий вклад m_1 в поперечную намагниченность

$$m_1 < \mathrm{const}/h_0^2. \tag{24}$$

2) В этом случае спин $\mathbf{S}_0$ ведет себя почти также, как если бы система находилась в сильном однородном внешнем поле. Поэтому поперечная намагниченность мала. Схема рассуждений при разборе второго случая такая: применяя формулу (9) к спину $\mathbf{S}_0$, получаем

$$\sin\phi_0 < \left(J\sum_k \sin\phi_k\right) / \left(|H_0| - 2DJ\right), \tag{25}$$

где обозначения разъяснены в предыдущем разделе. Применяя (9) к углам ϕ_k и (10) к углам ϕ_p, находим, что

$$\sin\phi_0\left(1 - \frac{1}{\Omega - 2D}\,\frac{2D}{\Omega - 2D}\right) < \frac{J}{|H_0| - 2DJ}\sum_k \frac{J}{|H_k| - 2DJ}\sum_p \frac{2DJ}{|H_p| - 2DJ}. \tag{26}$$

Дальше остается проинтегрировать неравенство (26) по функции распределения случайного поля. В результате для вклада m_2 в поперечную намагниченность получается

$$m_2 < \text{const}\left(\frac{\ln h_0}{h_0}\right)^3. \tag{27}$$

3) Здесь есть два варианта:

а) во всех точках куба Δ со стороной равной пяти и центром в узле S_0 случайные поля $H_i > \Omega J$;

б) в некоторой точке S_1 куба Δ случайное поле $H_1 < \Omega J$.

Случай 3*а*) рассматривается буквально так же, как случай 2). Это связано с тем, что при рассмотрении случая 2) информация о случайных полях вне куба Δ не использовалась. Для вклада в поперечную намагниченность получается

$$m_{3a} < \text{const}\left(\frac{\ln h_0}{h_0}\right)^3. \tag{28}$$

В случае 3*б*) опять рассуждаем аналогично случаю 2). Здесь возникает отличие от случая 2). Это отличие связано с тем, что поперечную компоненту $\sin\phi_1$ спина в узле S_1 теперь нельзя оценивать по формуле (9). Поэтому структура формулы (26) изменится. Индексы p, k теперь не могут пробегать значение 1, зато появляется слагаемое, пропорциональное $\sin\phi_1$. Его можно оценить сверху как $\text{const}\sin\phi_1$. Интегрирование по функции распределения случайного поля дает в результате такую оценку вклада в поперечную намагниченность:

$$m_{3б} < \text{const}\left(\frac{\ln h_0}{h_0}\right)^3 + \text{const}(p\overline{\sin\phi_1}), \tag{29}$$

где черта обозначает среднее по реализациям беспорядка, при которых $H_1 < \Omega J$, p — вероятность конфигурации *б*). Выражение $p\overline{\sin\phi_1}$ можно оценить тем же способом, который будет использован для рассмотрения случая 4).

4) Здесь опять имеются два варианта:

а) $|H_0 + J\sum_k \text{sign}H_k| < C\sum_k \frac{J^2}{|H_k|}$,

б) $|H_0 + J\sum_k \text{sign}H_k| > C\sum_k \frac{J^2}{|H_k|}$,

где обозначения такие же, как в уравнении (17), константа $C \gg 1$.

Вероятность конфигурации 4*а*) порядка $\ln h_0/h_0^2$. Этого достаточно для получения оценки

$$m_{4a} < \text{const}\frac{\ln h_0}{h_0^2}. \tag{30}$$

В случае 4*б*) z-компонента эффективного поля $H_0 + J\sum_k \cos\phi_k$ в узле S_0 мало отличается от $H_0 + J\sum_k \text{sign}H_k$. В этом можно убедиться, заметив, что отличия z-компонент спинов $\mathbf{S}_k$ от $\text{sign}H_k$ малы, как $1/H_k^2$ (или еще сильнее). Дальше можно действовать, как в случае 2). Отличие будет только в том, что в оценку типа (9) для угла ϕ_0 надо будет подставлять вместо $|H_0| - 2DJ$ величину $|H_0 + J\sum_k \text{sign}H_k|/2$. Окончательный результат для вклада в поперечную намагниченность имеет вид

$$m_{4б} < \text{const}\left(\frac{\ln h_0}{h_0}\right)^3. \tag{31}$$

С помощью неравенств (24), (27)–(31) получаем оценку (16b). На этом рассмотрение гауссового случая закончено.

4. БИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Назовем множество узлов решетки связной областью, если из каждого узла этого множества можно попасть в любой другой, передвигаясь по отрезкам, соединяющим соседние узлы, и при этом все время оставаясь внутри области. В бимодальном случае главный вклад в намагниченность возникает от связных областей, в которых случайное поле ориентировано вверх и вниз в шахматном порядке. Будем называть связные области, в которых направление случайного поля в каждой точке области противоположно направлению поля во всех соседних с ней точках решетки, шахматными областями. В шахматных областях гамильтониан (1) может быть получен из гамильтониана антиферромагнетика в однородном внешнем поле путем инверсии $\mathbf{S}_i \to -\mathbf{S}_i$ спинов одной из двух шахматных подрешеток. Поэтому в достаточно больших шахматных областях поперечная намагниченность появляется при том же критическом поле, что и в чистом антиферромагнетике. В нашей модели это поле $H_c = 4DJ$, где D — размерность пространства.

Легко убедиться в том, что при $H > H_c$ поперечная намагниченность обращается в нуль. Для этого надо несколько раз последовательно применить неравенство (9). В результате получим для произвольного спина, заданного углом ϕ,

$$\sin\phi < \left(\frac{2DJ}{H-2DJ}\right)^M, \tag{32}$$

где M — произвольно большое число. Отсюда вытекает, что $\sin\phi = 0$ при $H > 4DJ$.

Наша цель состоит в доказательстве двух неравенств:

$$m_\perp > \exp\left(-\frac{C_1}{(H_c-H)^{D/2}}\right), \tag{33a}$$

$$m_\perp < \exp\left(-\frac{C_2}{(H_c-H)^{D/2}}\right), \tag{33b}$$

где C_1 и C_2 — константы. Неравенство (33b) будет доказано ниже при $D \neq 2$. В двумерном случае будет доказано более слабое неравенство:

$$m_\perp < \exp\left(-\frac{\mathrm{const}}{(H_c-H)\ln(1/(H_c-H))}\right). \tag{33c}$$

Интересно выяснить, на самом ли деле в двумерном случае имеются логарифмические поправки или всегда сохраняется неравенство (33b).

Оценку снизу вывести просто. Для этого надо рассмотреть шахматную область в форме куба размером $L = \Omega/\sqrt{1-H/H_c}, \Omega \gg 1$. Такие области имеют экспоненциально малую концентрацию $\exp(-\mathrm{const}L^D)$. В чистом антиферромагнетике намагниченность вблизи H_c ведет себя по среднеполевому закону $\sin\phi \sim \sqrt{1-H/H_c}$. Сравнение разных вкладов в энергию показывает, что в неупорядоченной системе состояние с $\sin\phi \sim \sqrt{1 - H/H_c}$ в центре куба в самом деле энергетически выгодно. Отсюда получается требуемая оценка. Формальное доказательство можно построить, сравнивая энергию самого глубокого состояния A из числа тех, для которых везде внутри куба $\phi < (1 - H/H_c)^4$, с энергией состояния B, для которого вне и на границе куба все спины направлены так же, как в состоянии A, а внутри куба $\sin\phi$ плавно изменяется, достигая в центре максимального значения $\epsilon\sqrt{1 - H/H_c}$, где ϵ — малая не зависящая от H константа.

Далее идет вывод верхних оценок. Для большей ясности изложения мы рассмотрим сначала случай $c \ll 1$, а затем перейдем к общему случаю. Упрощение при малых c возникает благодаря тому, что в этом пределе большие шахматные кластеры встречаются экспоненциально редко. Изложение общего случая будет опираться на случай $c \ll 1$.

4.1. Оценка намагниченности сверху при слабом беспорядке

При малых c концентрация шахматных кластеров объемом V не превышает $\exp(-\mathrm{const}V)$. Рассуждение, доказывающее этот факт, основано на оценке числа односвязных областей объемом V, содержащих заданную точку. Оно помещено в Приложение 1. Ясно, что вклад в намагниченность, возникающий от шахматных кластеров объемом $V > \mathrm{const}/(H_c - H)^{D/2}$, экспоненциально мал.

Вне шахматных кластеров поперечная намагниченность быстро убывает с ростом расстояния до ближайшего шахматного кластера. Если H близко к H_c (а именно этот случай нам интересен), то из рассмотрения возможных направлений эффективного поля видно, что намагниченность в каждом узле образует со случайным полем угол, меньший $\pi/2$. Это позволяет получить из (8) вне шахматных кластеров следующее неравенство:

$$\sin\phi_k < \frac{J\sum\limits_l \sin\phi_l}{H - (2D-1)J}. \tag{34}$$

Применяя (34) несколько раз последовательно, получим для поперечной компоненты спина $\mathbf{S}_k$

$$\sin\phi_k < \left[\frac{2DJ}{H - (2D-1)J}\right]^S, \tag{35}$$

где S — расстояние от спина $\mathbf{S}_k$ до ближайшей шахматной области. Для вывода формулы (33b) требуется оценка той же структуры, что и (35), но с большим показателем степени.

Для получения такой оценки рассмотрим шахматную область объемом $V < V_c$, где

$$V_c = \alpha(H_c - H)^{-D/2}, \quad D \neq 2, \tag{36a}$$

$$V_c = \alpha\frac{1}{(H_c - H)\ln(1/(H_c - H))}, \quad D = 2, \tag{36b}$$

$$\alpha \ll 1.$$

Намагниченность в этой области можно оценить через намагниченность на ближайших к ней узлах, лежащих вне области, т. е. через намагниченность на границе этой области.

В Приложении 2 доказана лемма, в соответствии с которой внутри описанной области поперечная намагниченность удовлетворяет неравенству

$$\sin\phi < (1+\epsilon)(\sin\phi_b)_{\max}, \quad \epsilon < \text{const}\ \alpha^{2/D} \ll 1. \tag{37}$$

где $(\sin\phi_b)_{\max}$ — максимальная намагниченность на границе области. Эта лемма позволяет записать вместо (34) (для спинов, лежащих вне шахматных кластеров и при этом не на границе шахматных кластеров объема, большего V_c) неравенство

$$\sin\phi_k < \left(J(1+\epsilon)\sum_{u=1}^{2D}\sin\phi_u\right) \Big/ (H-(2D-1)J), \tag{38}$$

где $\sin\phi_u$ обозначают поперечные компоненты некоторых спинов, лежащих вне шахматных областей и удаленных от узла S_k на расстояние, не большее (V_c+1). Многократное применение формулы (38) дает оценку

$$\sin\phi_k < \left[\frac{2DJ(1+\epsilon)}{H-(2D-1)J}\right]^{S'/(V_c+1)}, \tag{39}$$

где V_c — это критический объем (36), S' - расстояние от спина $\mathbf{S}_k$ до ближайшей шахматной области объемом $V > V_c$. Формула (39) относится к спинам за пределами шахматных кластеров. Комбинируя ее с неравенством (37), можно получить аналогичную оценку и для спинов из маленьких шахматных областей. Поскольку большие шахматные области экспоненциально редки, это позволяет вывести уравнения (33b,c).

4.2. Оценка намагниченности сверху при сильном беспорядке

Если c не мало, то нельзя утверждать, что большие шахматные кластеры встречаются экспоненциально редко. Наоборот, выше порога протекания в системе могут возникать даже бесконечные шахматные кластеры. Однако оценки поперечной намагниченности (33b,c) остаются в силе. Дело в том, что почти каждый шахматный кластер «нашпигован» нешахматными областями. Хотя появление поперечной намагниченности внутри кластера энергетически выгодно, проигрыш в энергии за счет «нешахматных вкраплений» может оказаться больше. В результате вклад в намагниченность дают только те большие шахматные кластеры, которые свободны от «нешахматных вкраплений». А таких кластеров экспоненциально мало.

Перейдем к доказательству. Разрежем систему на кубические клетки с ребрами большой не зависящей от H длины A. Вероятность такой клетки быть шахматным кластером мала. В дальнейшем термин «шахматный кластер» сохраним только за шахматными областями, состоящими из одной или нескольких клеток целиком. При таком определении большие шахматные кластеры вновь станут экспоненциально редкими. Поэтому их вклад в намагниченность опять экспоненциально мал. Дальнейшая наша цель — вывод аналога формулы (39) для спинов вне шахматных кластеров. Как и в предыдущем пункте, аналогичная формула для спинов из маленьких шахматных кластеров получится отсюда благодаря неравенству (37). Это позволит дать полное доказательство.

При выводе аналога формулы (39) будем предполагать, что расстояние от рассматриваемого спина до ближайшего шахматного кластера объема большего V_c (36) превышает $AD(V_c+1)$. Доля спинов, для которых это условие не выполнено, экспоненциально мала по V_c, поэтому их вклад в поперечную намагниченность заведомо тоже экспоненциально мал.

Все дальнейшие рассуждения справедливы, если амплитуда случайного поля достаточно близка к H_c, $H_c - H < B \ll H_c$, и константа α (36) достаточна мала (но не зависит от H). Насколько малыми должны быть α и B, будет видно из изложенной ниже схемы доказательства.

Вне шахматных кластеров из (8) следует неравенство, похожее на (34) (но в виду нового определения шахматного кластера, более слабое). Это неравенство гласит:

$$\sin\phi_k \le \left(\sum_l \sin\phi_l\right) \Big/ 2D\left(1 - (H_c - H)/(2DJ)\right). \tag{40}$$

В каждой нашей клетке со стороной A, если она не является шахматным кластером (а нас теперь интересует только такой случай), найдется спин $\mathbf{S}_1$, для которого случайное поле на одном из соседних узлов направлено в ту же сторону, что и на этом спине. Для этого спина неравенство (34) сохраняется. Можно записать для произвольного спина $\mathbf{S}_k$ из нешахматной клетки, что

$$\sin\phi_k \le \frac{T_k}{2D}\left(\sum_l \sin\phi_l\right), \tag{41}$$

где $T_k/(2D)\sum\limits_l \sin\phi_l$ обозначает правую часть неравенства (40) для спинов, у которых случайные поля на всех соседних узлах направлены в другую сторону, чем на самих этих спинах, и правую часть неравенства (34) для остальных спинов.

Используя лемму, доказанную в Приложении 2, из неравенства (41) выводим соотношение

$$\sin\phi_k \le \frac{R_k}{2D}\left(\sum_{u=1}^{2D} \sin\phi_u\right), \tag{42}$$

где $R_k = (1+\epsilon)T_k$, а спины $\mathbf{S}_u$ лежат вне шахматных кластеров и удалены от узла S_k не дальше, чем на расстояние $(V_c + 1)$. Константу ϵ можно сделать сколь угодно малой (независимо от H) надлежащим выбором константы α в определении критического объема (36). Поэтому при амплитуде случайного поля, достаточно близкой к H_c, можно добиться того, что

$$R_k < 1 + \gamma, \tag{43}$$

где γ — не зависящая от H константа, которую выбором α и B можно сделать сколь угодно малой. Для упомянутого выше спина S_1, обладающего тем свойством, что действующее на него случайное поле направлено в ту же сторону, что и поле на одном из соседних узлов, имеется более сильная, чем (43), оценка

$$R_1 < \frac{1+\epsilon}{1 + 1/(4D)}. \tag{44}$$

Следующим шагом применим неравенство (42) последовательно DA раз. Для поперечной намагниченности $\sin\phi_k$ в результате получится оценка вида

$$\sin\phi_k \le \frac{1}{(2D)^{DA}} \sum_{w=1}^{(2D)^{DA}} P_w \sin\phi_w, \tag{45}$$

где все спины $\mathbf{S}_w$ удалены от узла S_k не больше, чем на расстояние $DA(V_c+1)$. Каждый коэффициент P_w в формуле (45) — это произведение DA множителей вида R_i. Неравенство (45) можно преобразовать к виду

$$\sin\phi_k \leq \frac{1}{(2D)^{DA}} \sum_w P_w (\sin\phi_w)_{\max}, \tag{46}$$

где $(\sin\phi_w)_{\max}$ — максимальная из величин $\sin\phi_w$.

Вспомним теперь неравенства (43), (44). Они позволяют оценить P_w. При этом важно, что поскольку мы работали с нешахматной клеткой, в оценку одного из коэффициентов P_w входит множитель, равный правой части (44). При достаточно малом γ это позволяет показать, что

$$\frac{1}{(2D)^{DA}} \sum_w P_w < 1-\delta, \tag{47}$$

где δ — маленькая положительная константа, не зависящая от H. В результате из (46) получаем, что

$$\sin\phi_k \leq (1-\delta)(\sin\phi_w)_{\max}. \tag{48}$$

Применяя последнюю формулу многократно, получаем оценку типа (39). Для завершения доказательства остается провести рассуждение, аналогичное содержащемуся в предыдущем разделе.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Упорядочение в изученной системе возникает благодаря редким областям. Это напоминает фазу Гриффитса [48]. Однако в нашей задаче имеются дальний порядок и спонтанное нарушение симметрии. Появление дальнего порядка связано со слабым ферромагнитным взаимодействием редких упорядоченных кластеров. Такое взаимодействие присутствует и в других неупорядоченных системах, испытывающих переход Гриффитса, но даже слабые тепловые флуктуации способны разрушить порядок. Специфика рассмотренной задачи состоит в отсутствии тепловых флуктуаций.

Приближение среднего поля [42] игнорирует вклады редких областей и поэтому приводит к ошибочным выводам. В гауссовом случае приближение среднего поля предсказывает неправильную экспоненциальную зависимость намагниченности от поля в пределе сильных полей. В бимодальном случае приближение среднего поля дает неправильные ответы как для критического поведения, так и для критического поля, при котором происходит фазовый переход.

Полученные в настоящей работе результаты применимы к некоторым другим системам. В частности, критическое поведение (5) имеет место в антиферромагнетике с беспорядком типа случайная связь, помещенном в однородное поле.

Изученная модель не учитывает квантовых флуктуаций. Сильные квантовые флуктуации могут полностью изменить поведение системы. В случае слабых флуктуаций имеются два критических режима: изученный в настоящей работе классический, а ближе к точке фазового перехода — квантовый, с предположительно медленной степенной зависимостью намагниченности от поля.

Автор благодарен В. С. Доценко, А. Б. Кашубе, А. Ю. Китаеву, В. И. Марченко, И. М. Суслову и М. В. Фейгельману за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-18985) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект 96-15-96756).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Здесь оценено сверху число связных областей объема V, составленных из узлов D-мерной кубической решетки и содержащих заданный узел A. Показано, что это число ограничено сверху экспоненциальной функцией объема. При слабом беспорядке отсюда следует экспоненциальная по V малость концентрации шахматных областей объема V.

Число ломаных длиной $(2V-2)$, состоящих из ребер решетки и начинающихся в точке A, не больше чем $(2D)^{(2V-2)}$. Поэтому достаточно показать, что интересующих нас областей не больше, чем описанных выше ломаных.

Для этого замечаем, что каждой связной области можно по крайней мере одним способом поставить в соответствие древесный граф, состоящий из ребер решетки, лежащий в области и содержащий все ее узлы. Длина древесного графа $(V-1)$. Осталось заметить, что древесному графу можно поставить в соответствие замкнутую ломаную, дважды проходящую каждое его ребро.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Здесь доказана лемма, используемая в четвертом разделе.

Лемма. Рассмотрим шахматную область объемом $V < V_c$, где V_c определяется уравнениями (36). Внутри такой области поперечная намагниченность удовлетворяет неравенству (37).

Доказательство. Внутри шахматной области из уравнения (8) следует неравенство вида

$$\Delta \sin\phi \geq -\frac{H_c - H}{J}(\sin\phi)_{\max}, \tag{49}$$

где

$$\Delta \sin\phi = \sum_{\text{neighbours}} \sin\phi_k - 2D\sin\phi \tag{50}$$

— решеточный лапласиан, суммирование ведется по ближайшим соседям, $(\sin\phi)_{\max}$ — максимальное значение поперечной намагниченности внутри шахматной области. Для доказательства неравенства (49) надо переписать (8) к виду

$$\sin\phi_k \leq \left(J\sum_l \sin\phi_k\right) \Big/ (H - 2DJ),$$

а затем преобразовать тождественно к форме

$$\Delta\sin\phi \geq -\frac{H_c - H}{J}\sin\phi.$$

Решения неравенства (49) мажорируются сверху решениями уравнения

$$\Delta u = -\frac{H_c - H}{J}(\sin\phi)_{\max} \tag{51}$$

с теми же граничными условиями, что и неравенство. Решение последнего уравнения конструируем следующим образом. Вначале находим частное решение u_1. Его можно взять в виде свертки правой части уравнения и функции Грина решеточного уравнения Лапласа. Можно проверить, что ввиду малости α (36) это решение мало по сравнению с $(\sin\phi)_{\max}$,

$$|u_1| < \beta(\sin\phi)_{\max}, \quad \beta = \text{const}\ \alpha^{2/D} \ll 1. \tag{52}$$

При $D = 1, 2$ получение оценки (52) не составляет труда. При $D > 2$ для ее получения надо заметить, что при заданном объеме области $u_1(\mathbf{r})$ максимально для области в форме шара с центром в точке $\mathbf{r}$. Затем находим решение уравнения с нулевой правой частью u_2 такое, чтобы $u = u_1 + u_2$ удовлетворяло граничным условиям. В силу принципа максимума

$$u_2 < (\sin\phi_b)_{\max} + \beta(\sin\phi)_{\max}. \tag{53}$$

Вспоминая, что u — мажоранта искомой функции, и используя неравенства (52), (53), получаем требуемую оценку для $\sin\phi$.

Литература

1. D. P. Belanger and A. P. Young, J. Magn. Magn. Mater. **100**, 272 (1991).
2. В. С. Доценко, УФН **165**, 481 (1995).
3. T. Nattermann, E-prints archive cond. mat./97 05 295 (1997).
4. S. Fishman and A. Aharony, J. Phys. C **12**, L729 (1979).
5. D. P. Belanger, A. R. King, V. Jaccarino, and J. L. Cardy, Phys. Rev. B **28**, 2522 (1983).
6. Ch. Binek, S. Kuttler, and W. Kleemann, Phys. Rev. Lett. **75**, 2412 (1995).
7. J. Villain, J. Physique Lett. **43**, 808 (1982).
8. C. Bostoen and K. H. Michel, Z. Phys. B **71**, 369 (1988).
9. T. Nattermann, Ferroelectrics **104**, 171 (1990).
10. P. G. de Gennes, J. Phys. Chem. **88**, 6469 (1984).
11. J. V. Porto and J. M. Parpia, Phys. Rev. Lett. **74**, 4667 (1995).
12. J. Hook, Bull. Am. Phys. Soc. **42**, 799 (1997).
13. K. Matsumoto, J. V. Porto, L. Pollak et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 253 (1997).
14. N. A. Clark, T. Bellini, R. M. Malzbender et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 3505 (1993).
15. H. Haga and C. W. Carland, Liq. Crist. **22**, 275 (1997).
16. G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, and A. I. Larkin, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
17. T. Giamarchi and P. Le Doussal, E-prints archive cond. mat./97 05 096 (1997).
18. A. Aharony, Y. Imry, and S.-K. Ma, Phys. Rev. Lett. **37**, 1364 (1976).
19. A. P. Young, J. Phys. C **10**, L257 (1977).
20. G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
21. J. Imbrie, Phys. Rev. Lett. **53**, 1747 (1984).
22. J. Imbrie, Commun. Math. Phys. **98**, 145 (1985).
23. J. Bricmont and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **59**, 817 (1987).
24. M. Gofman, J. Adler, A. Aharony et al., Phys. Rev. B **53**, 6362 (1996).

25. G. Parisi, *Proceedings of Les Houches 1982, Session* XXXIX, ed. by J. B. Zuber and R. Stora, North Holland, Amsterdam (1984).
26. J. Villain, J. de Phys. **46**, 1843 (1985).
27. M. Mezard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, Singapore (1987).
28. K. H. Fischer and J. A. Hertz, *Spin Glasses*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
29. G. Parisi, J. Phys. A **13**, 1887 (1980).
30. В. С. Доценко, УФН **163**, № 6, 1 (1993).
31. M. Mezard and A. P. Young, Europhys. Lett. **18**, 653 (1992).
32. S. E. Korshunov, Phys. Rev. B **48**, 3969 (1993).
33. M. Mezard and R. Monasson, Phys. Rev. B **50**, 7199 (1994).
34. T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **52**, 1242 (1995).
35. D. E. Feldman, Phys. Rev. B **56**, 3167 (1997).
36. E. Farhi and S. Gutman, Phys. Rev. B **48**, 7114 (1993).
37. M. Schwartz, Phys. Lett. A **76**, 408 (1980).
38. R. M. Hornreich and H. G. Schuster, Phys. Rev. B **26**, 3929 (1982).
39. T. Vojta, J. Phys. A **26**, 2883 (1993).
40. T. Vojta and M. Schreiber, Phys. Rev. B **50**, 1272 (1994).
41. D. E. Feldman, J. Phys. A **31**, L177 (1998).
42. A. Aharony, Phys. Rev. B **18**, 3328 (1978).
43. V. S. Dotsenko and M. V. Feigelman, J. Phys. C **14**, L823 (1981).
44. B. J. Minchau and R. A. Pelcovits, Phys. Rev. B **32**, 3081 (1985).
45. D. C. Mattis, Phys. Lett. A **56**, 421 (1976).
46. R. Bidraux, J. P. Carton, and G. Sarma, Phys. Lett. A **58**, 467 (1976).
47. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
48. R. B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. **23**, 17 (1969).