*ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 6, стр. 2113–2132* 

# СУБДИФФУЗИЯ И УСТОЙЧИВЫЕ ЗАКОНЫ

*В. В. Учайкин**

*Ульяновский государственный университет*
*422700, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 18 сентября 1998 г.

Рассматривается процесс диффузии частицы в $N$-мерном евклидовом пространстве с ловушками возвратного типа. В предположении, что случайное время непрерывной диффузии имеет конечное среднее значение, установлено, что для возникновения субдиффузии, характеризующейся ростом ширины диффузионного пакета со временем по закону $\propto t^{\alpha}$, $\alpha < 1$ (для нормальной диффузии $\alpha = 1$), необходимо и достаточно, чтобы плотность распределения случайного времени пребывания в ловушке имела асимптотический хвост степенного вида $\propto t^{\alpha-1}$. В этих условиях найдено асимптотическое выражение плотности распределения диффундирующей частицы через плотность одностороннего устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha$. Показано, что найденная плотность является решением уравнений субдиффузии в дробных производных. Обсуждается физический смысл решения, его свойства и связь с результатами других работ по теории аномальной диффузии. Приведены результаты численных расчетов.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Аномальной диффузией принято называть случайный процесс блуждания частицы, размер диффузионного пакета $\Delta(t)$ которой (т. е. ширина плотности распределения $\rho(x,t)$ при начальном условии $\rho(x,0) = \delta(x)$), растет со временем по закону

$$\Delta t \propto t^{\nu}, \quad t \to \infty, \tag{1}$$

где показатель $\nu$ отличается от значения 1/2, соответствующего нормальной диффузии. При $\nu > 1/2$ мы имеем дело с супердиффузией, при $\nu < 1/2$ — с субдиффузией (см. обзорные статьи [1–3]). Первый тип аномальной диффузии ассоциируется с аномально большими длинами пробегов частицы в среде, $\xi$, второй — с аномально большими временами пребывания частицы в ловушках, $\tau$. Под аномально большими понимаются случайные величины $\xi$ и $\tau$ такие, что $\langle \xi^2 \rangle = \infty$ и $\langle \tau \rangle = \infty$. Степенной закон (1) возникает в случае, когда распределения $\xi$ и (или) $\tau$ имеют хвосты степенного типа. В [4] показано, что супердиффузия в асимптотике больших времен описывается уравнением с дробным лапласианом, решением которого является симметрическое устойчивое распределение. Настоящая работа посвящена теоретическому изучению модели субдиффузии, многочисленные примеры применения которой к физическим процессам обсуждаются в работах [1–3, 5–10] и др.

В предположении о взаимной независимости случайных переменных $\xi_i$ и $\tau_i$ субдиффузия может быть описана с помощью интегральных уравнений. Стремление придать уравнению субдиффузии вид, подобный обычному диффузионному уравнению,

*E-mail: uchaikin@sv.uven.ru, uchaikin@themp.univ.simbirsk.su

ведет к уравнениям в дробных производных [5–10]. В ряде работ [11–13] решения таких уравнений представляются с помощью функций Фокса [14], однако в силу недостаточной адаптированности последних к вычислительным задачам подобные представления немногим более полезны, чем просто преобразования Фурье—Лапласа или Меллина. Плотности пространственного распределения субдиффундирующей частицы в численном виде еще не найдены.

Идея искать решение уравнений субдиффузии в терминах устойчивых законов возникла на основе двух не очень известных среди физиков фактов. Во-первых, гауссово распределение — это лишь один из представителей бесконечного множества устойчивых законов, общим свойством которых является то, что они описывают предельные распределения нормированных специальные образом сумм независимых случайных величин [15–17]. Гауссово распределение появляется в качестве предельного только в случае слагаемых с конечной или логарифмически расходящейся дисперсией. Во-вторых, в работах [18, 19] установлена связь между устойчивыми законами и функциями Фокса.

Поскольку в разных подходах к проблеме аномальной диффузии появляются различные варианты уравнений, начнем с полного описания рассматриваемой модели, основанного на интегральных уравнениях.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ С ЛОВУШКАМИ

В рассматриваемой ниже модели частица может находиться в одном из двух состояний: в состоянии обычной диффузии (1) и в состоянии покоя (0) (после попадания в ловушку). Процесс субдиффузии представляет собой последовательную смену этих состояний в случайные моменты времени. Случайные времена пребывания в этих состояниях будем считать взаимно независимыми и распределенными соответственно с плотностями $q_1(\tau)$ и $q_0(\tau)$.

Распределение времени пребывания в ловушке $q_0(\tau)$, обусловленное механизмом захвата и статистическим разбросом свойств ловушек, пока конкретизировать не будем, а относительно $q_1(\tau)$ предположим только, что среднее время $\tau_1$ между выходом частицы из ловушки и последующим попаданием в ловушку конечно:

$$\overline{\tau}_1 = \int_0^\infty \tau q_1(\tau) d\tau < \infty. \tag{2}$$

Среду считаем пространственно-однородной и стационарной.

Пусть $p(x,t)$ — пространственное распределение вероятности в случае непрерывной диффузии. В $N$-мерном пространстве

$$p(x,y) = (4\pi Dt)^{-N/2} e^{-x^2/4Dt}, \quad x \in R^N, \tag{3}$$

где $D$ — коэффициент диффузии. Обозначим, далее, через $\rho_0(x,t)$ распределение частицы в момент $t$, начавшей свою историю в момент $t = 0$ с попадания в ловушку в точке $x = 0$, а через $\rho_1(x,t)$ — то же для частицы, чья история начинается с выхода из ловушки в точке $x = 0$. Эти два распределения связаны системой интегральных уравнений

$$\rho_0(x,t) = Q_0(t)\delta(x) + \int_0^t d\tau\, q_0(\tau)\rho_1(x, t-\tau), \tag{4}$$

$$\rho_1(x,t) = Q_1(t)p(x,t) + \int_0^t d\tau\, q_1(\tau)p(x,\tau) * \rho_0(x,t-\tau),$$

где

$$Q_i(t) = \int_t^\infty q_i(\tau)d\tau,$$

а $*$ означает операцию свертки по пространственным переменным:

$$p(x,\tau) * \rho_0(x,t-\tau) \equiv \int p(x',\tau)\rho_0(x-x',t-\tau)d^N x'. \tag{6}$$

Вообще, система уравнений (4), (5) описывает более общий класс процессов, поскольку она справедлива при произвольном распределении $p(x,t)$. В частности, вместо диффузионного режима (3) в промежутках между попаданиями в ловушку можно использовать баллистический или, скажем, супердиффузионный режим. В настоящей работе мы ограничимся изучением решений уравнений (4), (5) с использованием распределения (3), выбрав распределение времени пребывания в ловушке $q_0(\tau)$ в виде, обеспечивающем субдиффузионный режим.

## 3. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУБДИФФУЗИИ

Найдем условие, которому необходимо подчинить распределение $q_0(\tau)$, чтобы рассматриваемая модель привела к субдиффузии (1). Введя, для краткости, обозначения

$$s_i(t) = \int |x|^2 \rho_i(x,t)d^N x,$$

из (4), (5) получаем

$$s_0(t) = \int_0^t d\tau\, q_0(\tau)s_1(t-\tau), \tag{7}$$

$$s_1(t) = Q_1(t)s(t) + \int_0^t d\tau\, q_1(\tau)\left[s(\tau) + s_0(t-\tau)\right], \tag{8}$$

где

$$s(t) = \int |x|^2 p(x,t)d^N x = at, \quad a = 2ND. \tag{9}$$

Применяя к уравнениям (7) и (8) преобразование Лапласа

$$s_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}s_i(t)dt,$$

приходим к алгебраической системе уравнений для компонент

$$s_0(\lambda) = q_0(\lambda)s_1(\lambda),$$

$$s_1(\lambda) = K(\lambda) + q_1(\lambda)s_0(\lambda),$$

где

$$K(\lambda) = \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\left[Q_1(t)s(t) + \int_0^t d\tau\, q_1(\tau)s(\tau)\right].$$

Ее решение имеет вид

$$s_0(\lambda) = \frac{q_0(\lambda)K(\lambda)}{1-q_0(\lambda)q_1(\lambda)}, \tag{10}$$

$$s_1(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{1-q_0(\lambda)q_1(\lambda)}. \tag{11}$$

Используя (9), преобразуем $K(\lambda)$ к виду

$$K(\lambda) = -a\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty Q_1(t)e^{-\lambda t}dt - \frac{a}{\lambda}\frac{dq_1\lambda}{d\lambda} =$$

$$= -a\frac{d}{d\lambda}\frac{1-q_1(\lambda)}{\lambda} + \frac{a}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}[1-q_1(\lambda)] = \frac{a[1-q_1(\lambda)]}{\lambda^2}. \tag{12}$$

Согласно тауберовой теореме соотношение

$$s_i(t) \sim A_i t^\alpha, \quad t\to\infty$$

влечет за собой

$$s_i(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)A_i\lambda^{-\alpha-1}, \quad \lambda\to 0 \tag{13}$$

и наоборот [20]. В силу условия (2)

$$1-q_1(\lambda) \sim \overline{\tau}_1\lambda, \quad Q_1(\lambda) = \frac{1-q_0(\lambda)}{\lambda} \sim \overline{\tau}_1 \tag{14}$$

и, следовательно, $K(\lambda) \sim a\overline{\tau}_1/\lambda$ при $\lambda\to 0$. Подставляя (13) в (10) и (11) и разрешая полученные уравнения относительно $1-q_0(\lambda)$, находим необходимое условие для возникновения субдиффузии

$$1-q_0(\lambda) \sim b\lambda^\alpha, \quad \lambda\to 0, \quad b = \frac{a\overline{\tau}_1}{\Gamma(\alpha+1)A}, \quad \alpha<1, \tag{15}$$

причем $A_1 = A_2 = A$ (асимптотическое поведение ширины субдиффузионного пакета не зависит от начального состояния частицы). В силу обратимости тауберовой теоремы условие (14) является и достаточным.

Чтобы переформулировать условие (14) для плотности распределения $q_0(\tau)$, вновь вернемся к тауберовой теореме и применим ее к функциям $Q_0(t)$ и

$$Q_0(\lambda) = \frac{1 - q_0(\lambda)}{\lambda}.$$

В результате получим

$$Q_0(t) = \int_t^\infty q_0(\tau)d\tau \sim Bt^{-\alpha}, \quad t \to \infty, \quad B = \frac{a\overline{\tau}_1}{\left[\Gamma(1-\alpha)\right]^2 A} \tag{16}$$

или, для плотности,

$$q_0(t) \sim \alpha B t^{-\alpha-1}, \quad t \to \infty. \tag{17}$$

Таким образом, в рассматриваемой модели субдиффузия возникает тогда и только тогда, когда распределение времен пребывания в ловушках имеет асимптотику степенного типа (16) с показателем $\alpha < 1$. Последнее, в частности, означает, что среднее время пребывания частицы в ловушках должно быть бесконечным:

$$\int_0^\infty \tau q_0(\tau)d\tau = \infty, \quad \alpha < 1.$$

В случае, если оно конечно,

$$\int_0^\infty \tau q_0(\tau)d\tau = \overline{\tau}_0,$$

асимптотика $q_0(\lambda)$ имеет вид

$$q_0(\lambda) \sim 1 - \overline{\tau}_0\lambda, \quad \lambda \to 0. \tag{18}$$

Подставляя (14) и (18) в (11), видим, что в этом случае

$$s_1(\lambda) \sim \frac{a}{\lambda^2\left[1 + \overline{\tau}_0/\overline{\tau}_1\right]}, \quad \lambda \to 0$$

и, стало быть, влияние ловушек сводится лишь к изменению (уменьшению) коэффициента диффузии

$$D \to \frac{D}{1 + \overline{\tau}_0/\overline{\tau}_1},$$

а асимптотический закон изменения среднего квадрата $s_1(t)$ со временем остается линейным. Можно показать, что и форма диффузионного пакета в этом случае остается гауссовой.

## 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

Вернемся к уравнениям (4) и (5) и применим к ним преобразования Фурье и Лапласа соответственно по координатам и времени:

$$\rho_i(k,\lambda) = \int_0^\infty dt \int d^N x \exp\{-\lambda t + ikx\} p_i(x,t), \quad k \in R^N.$$

В результате получим

$$\rho_0(k,\lambda) = Q_0(\lambda) + q_0(\lambda)\rho_1(k,\lambda),$$

$$\rho_1(k,\lambda) = Q_1(\lambda + Dk^2) + q_1(\lambda + Dk^2)\rho_0(k,\lambda).$$

Решение этой системы имеет вид

$$\rho_0(k,\lambda) = \frac{Q_0(\lambda) + q_0(\lambda)Q_1(\lambda + Dk^2)}{1 - q_0(\lambda)q_1(\lambda + Dk^2)} \tag{19}$$

и

$$\rho_1(k,\lambda) = \frac{Q_1(\lambda + Dk^2) + Q_0(\lambda)q_1(\lambda + Dk^2)}{1 - q_0(\lambda)q_1(\lambda + Dk^2)}. \tag{20}$$

Используя в формулах (19), (20) условия (15)–(17), получим для главных асимптотических членов выражение

$$\rho^{as}(k,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda[D'k^2 + \lambda^\alpha]}, \quad D' = \frac{\overline{\tau}_1 D}{b}, \tag{21}$$

не зависящее от начального состояния. Отложив обратное преобразование до следующего раздела, представим найденное соотношение в следующих трех эквивалентных формах:

$$\lambda^\alpha \rho^{as}(k,\lambda) = -D'k^2\rho^{as}(k,\lambda) + \lambda^{\alpha-1}, \tag{22}$$

$$\lambda\rho^{as}(k,\lambda) = -D'k^2\lambda^{1-\alpha}\rho^{as}(k,\lambda) + 1, \tag{23}$$

$$\rho^{as}(k,\lambda) = -D'k^2\lambda^{-\alpha}\rho^{as}(k,\lambda) + \lambda^{-1}. \tag{24}$$

Известно, что на подходящем классе функций преобразование Лапласа $F(\lambda)$ дробной производной Римана—Лиувилля

$$F(t) = \frac{d^\mu f(t)}{dt^\mu} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\mu} f(\tau) d\tau, \quad \mu < 1, \tag{25}$$

связано с $f(\lambda)$ дифференцируемой функции $f(t)$ соотношением [21, 22]

$$F(\lambda) = \lambda^\mu f(\lambda). \tag{26}$$

При $\mu < 0$ выражение (25) представляет собой дробный интеграл порядка $|\mu|$. Используя эти обозначения при обратном преобразовании Фурье—Лапласа соотношений (22)–(24), приходим к уравнениям в дробных производных, описывающим асимптотическое поведение субдиффузионного процесса:

$$\frac{\partial^\alpha \rho^{as}}{\partial t^\alpha} = D'\nabla^2 \rho^{as} + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,\delta(x), \tag{27}$$

$$\frac{\partial \rho^{as}}{\partial t} = D'\nabla^2 \frac{\partial^{1-\alpha}\rho^{as}}{\partial t^{1-\alpha}} + \delta(x)\delta(t), \tag{28}$$

$$\rho^{as} = D'\nabla^2 \frac{\partial^{-\alpha}\rho^{as}}{\partial t^{-\alpha}} + \delta(x). \tag{29}$$

Все они имеют общее решение, компонента Фурье—Лапласа которого уже найдена выше и представлена формулой (21).

Отметим, что частный случай уравнения (27), соответствующий значению параметра $\alpha = 1/2$, получен в работе [5] в связи с диффузией на фрактальных структурах типа «дерева Коха», моделирующих пористые и неупорядоченные среды. Одномерный аналог уравнения (28) был записан в [10], интегральное уравнение (29) решалось в работе [11]. Ниже мы приведем полученное там решение.

## 5. СУБДИФФУЗИОННАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Положим в уравнении (29) $D' = 1$ и перепишем его в виде

$$\rho(x,t) = \delta(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\nabla^2\rho(x,t), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{30}$$

Уравнение (30) рассматривалось в работе [11], где его решение как функция расстояния $r = |x|$ выражено через функции Фокса:

$$\rho(r,t) = \alpha^{-1}\pi^{-N/2}r^{-N} H_{12}^{20}\left((r/2)^{2/\alpha}t^{-1}\,\middle|\, \begin{matrix} (1, & 1) \\ (N/2, 1/\alpha), & (1, 1/\alpha) \end{matrix}\right). \tag{31}$$

В явном виде найдена компонента Меллина по $r$:

$$\rho(s,t) = \int_0^\infty r^{s-1}\rho(r,t)dr = 2^{s-N-1}\pi^{-N/2}t^{\alpha(s-N)/2}\frac{\Gamma(s/2)\Gamma\left((s-N)/2\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha(s-N)/2\right)}. \tag{32}$$

Мы найдем другую форму решения, связывающую его с устойчивыми распределениями, что позволит не только легко провести количественный анализ, но и увидеть в решении физическую картину рассматриваемого процесса.

Представим (21) в виде

$$\rho^{as}(k,\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty \exp\left\{-[D'k^2 + \lambda^\alpha]y\right\}dy, \quad \alpha < 1 \tag{33}$$

и запишем обратное преобразование Лапласа:

$$\rho^{as}(k,t) = \int\limits_0^\infty dy\, \exp(-D'k^2y)(2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma d\lambda\, \lambda^{\alpha-1} \exp(\lambda t - \lambda^\alpha y).$$

Выполняя внутреннее интегрирование по частям, получим

$$\rho^{as}(k,t) = \frac{t}{\alpha} \int\limits_0^\infty dy\, \exp(-D'k^2y) y^{-1} (2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma \exp(\lambda t - \lambda^\alpha y) d\lambda.$$

Во внутреннем интеграле перейдем к новой переменной

$$s = y^{1/\alpha}\lambda,$$

$$\rho^{as}(k,t) = \alpha^{-1} t \int\limits_0^\infty dy\, e^{-D'k^2y} y^{-1-1/\alpha} \left[ (2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma \exp(sy^{-1/\alpha}t - s^\alpha) ds \right].$$

Заключенное в квадратные скобки выражение есть односторонняя устойчивая плотность с характеристическим показателем $\alpha < 1$ (см. (П.1)):

$$g^{(\alpha)}(t) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_\gamma \exp(st - s^\alpha) ds. \tag{34}$$

Таким образом,

$$\rho^{as}(k,t) = \alpha^{-1} t \int\limits_0^\infty dy\, \exp(-D'k^2y) y^{-1-1/\alpha} g^{(\alpha)}(y^{-1/\alpha}t).$$

Переходя к переменной интегрирования

$$\tau = y^{-1/\alpha} t,$$

получим

$$\rho^{as}(k,t) = \int\limits_0^\infty d\tau\, \exp(-D'k^2 t^\alpha/\tau^\alpha) g^{(\alpha)}(\tau).$$

Наконец, совершая обратное преобразование Фурье, приходим к результату

$$\rho^{as}(x,t) = (D't^\alpha)^{-N/2} \Psi_N^{(\alpha)} \left( |x|/\sqrt{D't^\alpha} \right), \tag{35}$$

где

$$\Psi_N^{(\alpha)}(r) = (4\pi)^{-N/2} \int\limits_0^\infty d\tau\, \exp(-r^2\tau^\alpha/4) \tau^{N\alpha/2} g^{(\alpha)}(\tau), \quad \alpha < 1 \tag{36}$$

— функция расстояния, зависящая от двух параметров: показателя субдиффузии $\alpha$ и размерности пространства $N$.

Заметим, что выражения (21) и (33) сохраняют смысл и при крайнем значении $\alpha = 1$, приводя к нормальной диффузии с тем же коэффициентом $D'$, поэтому функцию $\Psi_N^{(\alpha)}(r)$ можно доопределить и для $\alpha = 1$ соотношением

$$\Psi_N^{(\alpha)}(r) = (4\pi)^{-N/2}e^{-r^2/4}.$$

Субдиффузионное распределение в форме (35) может быть выведено, как и обычное диффузионное распределение, из простых вероятностных соображений, основанных на использовании центральной предельной теоремы в ее обобщенном варианте (П.7), (П.8) [16, 17, 23]. Пренебрегая временем пребывания частицы в состоянии диффузии при вычислении распределения числа попаданий в ловушки за время наблюдения $t \to \infty$, получим

$$p_n \approx Q_0^{(n+1)}(t) - Q_0^{(n)}(t) = G^{(\alpha)}\left((nB^*)^{-1/\alpha}t\right) - G^{(\alpha)}\left(\left[(n+1)B^*\right]^{-1/\alpha}t\right).$$

Представляя аргумент вычитаемой функции в виде

$$\left[(n+1)B^*\right]^{-1/\alpha}t = [nB^*]^{-1/\alpha}t - [nB^*]^{-1/\alpha}t(n\alpha)^{-1}$$

и разлагая ее в ряд, находим асимптотическое выражение

$$p_n \sim [nB^*]^{-1/\alpha}t(n\alpha)^{-1}g^{(\alpha)}\left([nB^*]^{-1/\alpha}t\right), \quad t \to \infty.$$

При фиксированном $n$ условное распределение координаты частицы выражается через обычную диффузионную плотность соотношением

$$\rho(x, t|n) \sim p(x, n/\mu).$$

Здесь случайное время диффузии заменено средним значением $n/\mu$ по понятным основаниям. Усредняя теперь по числу актов непрерывной диффузии

$$\rho(x, t) = \sum_n \rho(x, t|n)p_n$$

и переходя от суммирования по $n$ к интегрированию по переменной

$$\tau = [nB^*]^{-1/\alpha}t,$$

приходим к распределению (35).

Сравнить найденное нами решение с полученным в [11] удобнее всего путем сопоставления их меллиновских образов. Согласно (35)

$$\rho^{as}(s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-N/2}(4D't^\alpha)^{(s-N)/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\int_0^\infty \tau^{(N-s)\alpha/2}g^{(\alpha)}(\tau)d\tau.$$

Выражая оставшийся интеграл через Г-функции с помощью соотношения (П.2) и сравнивая результат с формулой (32) при $D' = 1$, убеждаемся в идентичности рассматриваемых решений.

## 6. АНАЛИЗ СУБДИФФУЗИОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этом разделе мы обсудим некоторые свойства найденных решений, рассмотрим их поведение на малых и больших расстояниях и приведем результаты численных расчетов.

Начнем с пространственных моментов, которые выражаются в явном виде с помощью приведенных выше компонент Меллина:

$$\langle |x|^{2n} \rangle = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \int_0^\infty r^{2n+N-1} \rho^{as}(r,t)dr = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(N/2+n)}{\Gamma(\alpha n+1)\Gamma(N/2)} (4D't^\alpha)^n.$$

Второй момент

$$\langle |x|^2 \rangle = \frac{2ND'}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \tag{37}$$

совпадающий с вычисленным в работе [11] (формула. (1.14)), растет со временем пропорционально $t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, что и является признаком субдиффузионного процесса. Отношение

$$\mu_{2n}^{(\alpha)} = \frac{\langle |x|^{2n} \rangle}{\langle |x|^2 \rangle^n} = \frac{2^n \Gamma(n+1)\Gamma(N/2+n)\,[\Gamma(\alpha+1)]^n}{N^n \Gamma(\alpha n+1)\Gamma(N/2)},$$

представляющее безразмерные моменты порядков выше второго, не зависит от времени, что указывает на неизменность формы распределения (впрочем, это видно и непосредственно из формулы (35)). При $\alpha = 1$ оно переходит в безразмерные моменты для нормального распределения

$$\mu_{2n}^{(1)} = \frac{2^n \Gamma(N/2+n)}{N^n \Gamma(N/2)}.$$

На рис. 1 приведено отношение безразмерных абсолютных моментов порядка $2s$ $(-1/2 < s < 3/2)$

$$\nu_{2s}^{(\alpha)} = \mu_{2s}^{(\alpha)}/\mu_{2s}^{(1)} = \Gamma(s+1)\,[\Gamma(\alpha+1)]^s\,/\Gamma(as+1),$$

характеризующее отличие формы субдиффузионного распределения $\Psi_N^{(\alpha)}(r)$ при $\alpha < 1$ от нормального $\Psi_N^{(1)}(r)$. В области близкой к нулю ($s < 0$), как и на больших расстояниях ($s > 1$), плотность $\Psi_N^{(\alpha)}(r)$ превышает нормальную, тогда как в средней области расстояний ($0 < s < 1$) ситуация обратная.

Переходя к анализу формы распределений $\Psi_N^{(\alpha)}(r)$, отметим, прежде всего, что дифференцированием (36) по $r$ легко устанавливается следующее соотношение между распределениями в $N$-мерном и $N+2$-мерном пространствах:

$$\Psi_{N+2}^{(\alpha)}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{df_N^{(\alpha)}(r)}{dr}. \tag{38}$$

Пусть далее $r = (x_1, \ldots, x_N)$ — $N$-мерный вектор, так что $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$. Интегрируя (36) по переменным $x_{n+1}, \ldots, x_N$, где $1 < n < N$, приходим к соотношению

$$\int dx_{n+1} \ldots \int dx_N \Psi_N^{(\alpha)} \left( \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2} \right) = \Psi_n^{(\alpha)} \left( \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \right),$$

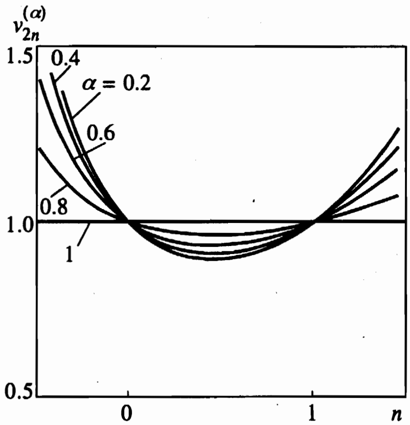


**Рис. 1.** Отношение безразмерных моментов $\nu_{2s}^{(\alpha)}$ для $\alpha = 0.2;\ 0.4;\ 0.6;\ 0.8$ и $\alpha = 1$

означающему, что поведение проекции случайной точки, совершающей субдиффузию в $N$-мерном пространстве, на $n$-мерное подпространство описывается $n$-мерным уравнением субдиффузии с тем же показателем $\alpha$. В этом отношении ситуация подобна нормальной диффузии, однако имеется и существенное отличие. В нормальной диффузии разные координаты $X_1$, $X_2$ диффундирующей частицы взаимно независимы, в случае же субдиффузии их совместное распределение

$$P\left\{X_1 \in dx_1, X_2 \in dx_2\right\} = (4\pi)^{-1} \int\limits_0^\infty d\tau \, \exp\left\{-(x_1^2 + x_2^2)\tau^\alpha/4\right\} \tau^\alpha g^{(\alpha)}(\tau)$$

не сводится к произведению $P\{X_1 \in dx_1\}P\{X_2 \in dx_2\}$, следовательно, случайные координаты $X_1$ и $X_2$ не являются более независимыми. Характер их статистической зависимости на малых и больших расстояниях можно увидеть из приводимых ниже асимптотик.

Как следует из (36), в одномерном ($N = 1$) случае плотность распределения в начале координат существует:

$$\Psi_1^{(\alpha)}(0) = (4\pi)^{-1/2} \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha/2} g^{(\alpha)}(\tau) d\tau,$$

поскольку плотность $g^{(\alpha)}(\tau)$ имеет конечные моменты порядков, меньших $\alpha$. Пользуясь формулой (П.2), находим

$$\Psi_1^{(\alpha)}(0) = \left[2\Gamma(1 - \alpha/2)\right]^{-1}.$$

В пространствах высших размерностей ($N \leq 2$) субдиффузионная плотность (в отличие от нормальной диффузионной) имеет интегрируемую особенность. При $N = 2$ эта особенность логарифмического типа, в чем нетрудно убедиться, разбив интеграл в (36) на две части — переходную и асимптотическую, и заменив в последней плотность $g^{(\alpha)}(\tau)$ главным членом разложения (П.5):

$$\Psi_2^{(\alpha)}(r) \approx (4\pi)^{-1} \left\{ \int\limits_0^T \exp(-r^2\tau^\alpha/4)\tau^\alpha g^{(\alpha)}(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha) \int\limits_T^\infty \exp(-r^2\tau^\alpha/4)\tau^{-1} d\tau \right\}.$$

При $r \to \infty$ в этой сумме доминирует второе слагаемое, которое и приводит к логарифмической особенности:

$$\Psi_2^{(\alpha)}(r) \sim [4\pi\Gamma(1-\alpha)]^{-1} E_1(r^2T^{\alpha/4}) \sim [2\pi\Gamma(1-\alpha)]^{-1}\,|\ln r|, \quad r \to 0.$$

В пространстве трех и больше числа измерений особенность в пуле является гиперболической:

$$\Psi_N^{(\alpha)}(r) \sim \pi^{-1}(4\pi)^{-N/2}\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha)\int_0^\infty \exp(-r^2\tau^\alpha/4)T^{(N/2-1)\alpha-1}d\tau =$$
$$= (1/4)\pi^{-N/2}\left[\Gamma(N/2-1)/\Gamma(1-\alpha)\right] r^{-(N-2)}, \quad r \to 0. \tag{39}$$

Полагая в формуле (38) $N = 1$ и подставляя в левую ее часть асимптотическое выражение (39), видим, что при $r \to \infty$

$$\frac{d\Psi_1^{(\alpha)}(r)}{dr} \to -\frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Отсюда следует, что в точке $x = 0$ производная функции $\Psi_1^{(\alpha)}(x)$ имеет конечный разрыв, т. е. вершина распределения в одномерном случае не гладкая как при нормальной диффузии, а острая. При $\alpha \to 1$ производная обращается в нуль и вершина становится гладкой.

При больших $r$ подынтегральная экспонента в (36) быстро убывает, поэтому для асимптотической оценки интеграла воспользуемся выражением (П.6), аппроксимирующим устойчивую плотность в области малых значений аргумента. Получающийся при этом интеграл

$$\Psi_N^{(\alpha)}(r) \approx (4\pi)^{-N/2}A\int_0^\infty \exp\left\{-r^2\tau^\alpha/4 - br^{-\delta}\right\} T^{N\alpha/2-\gamma}d\tau \tag{40}$$

вычислим методом Лапласа. Введя обозначение

$$\varphi(\tau) = -r^2\tau^\alpha/4 - b\tau^{-\delta}, \tag{41}$$

найдем из условия

$$\varphi'(\overline{\tau}) = 0$$

положение максимума этой функции

$$\overline{\tau} = \left(\frac{4b\delta}{\alpha r^2}\right)^{1/(\delta+\alpha)}. \tag{42}$$

Действуя далее обычным образом, находим

$$\int_0^\infty \exp\left\{-r^2\tau^\alpha/4 - b\tau^{-\delta}\right\} T^{(N\alpha/2-\gamma)}d\tau \sim \pi^{-N/2}A\overline{\tau}^{-(N\alpha/2-\gamma)/(\delta+\alpha)}\sqrt{2\pi/|\varphi''(\overline{\tau})|}\,e^{\varphi(\overline{\tau})}. \tag{43}$$

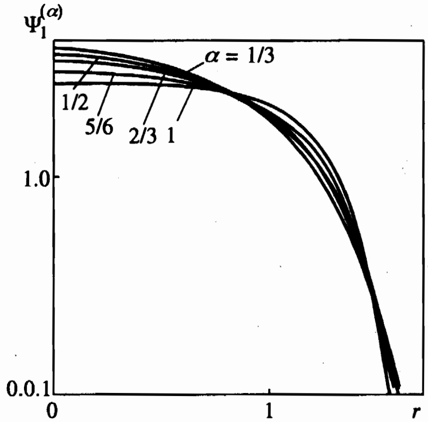


**Рис. 2**

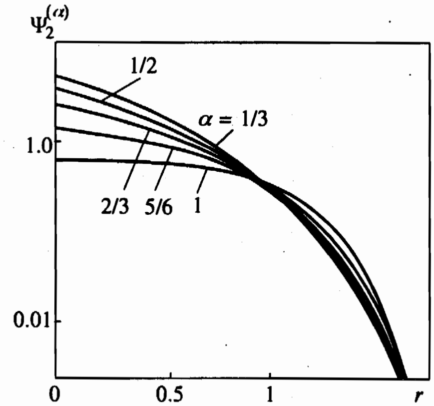


**Рис. 3**

**Рис. 2.** Одномерные распределения $\Psi_1^{(\alpha)}(r)$ для $\alpha = 2/6;\ 3/6;\ 4/6;\ 5/6;\ 1$

**Рис. 3.** Двумерные распределения $\Psi_2^{(\alpha)}(r)$ для тех же значений $\alpha$

Подставляя (41) и (42) в (43), а результат — в (40), мы получим асимптотику (40) в виде

$$\Psi_N^{(\alpha)}(r) \sim (4\pi)^{-N/2}\frac{\alpha^{[(N+1)\alpha/2-1]/(2-\alpha)}}{\sqrt{2-\alpha}}\left(\frac{r}{2}\right)^{-N(1-\alpha)/(2-\alpha)}\times$$
$$\times\exp\left\{-(2-\alpha)\alpha^{\alpha/(2-\alpha)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2/(2-\alpha)}\right\}. \qquad (44)$$

Сравнение с результатами точных расчетов, приводимых ниже, показало, что при $\alpha > 1/2$ формула (44) удовлетворительно аппроксимирует распределения во всей области, за исключением малых расстояний, а при $\alpha \to 1$ переходит в нормальное распределение

$$\Psi_N^{(1)}(r) = (4\pi)^{-N/2}e^{-r^2/4},$$

т. е. становится точным.

Точное представление о форме распределений дают рис. 2–4, на каждом из которых представлены субдиффузионные распределения $f_N^{(\alpha)}(r)$ для нескольких значений $\alpha$, включая предельное, $\alpha = 1$, соответствующее нормальной диффузии (дисперсии приведенных распределений различны и зависят от $\alpha$ согласно (37)). Важнейшим отличием формы субдиффузионных распределений от нормальной является более высокая концентрация вероятности в области малых и больших расстояний. Впрочем, если эти детали не играют существенной роли в условиях конкретной задачи, то в одномерном случае для $\alpha > 1/2$ субдиффузионные распределения действительно могут быть аппроксимированы гауссовой кривой с субдиффузионной дисперсией, как это сделано Ю. Л. Климонтовичем [24] (рис. 5). В случае более высоких размерностей нормальная аппроксимация не дает удовлетворительных результатов.

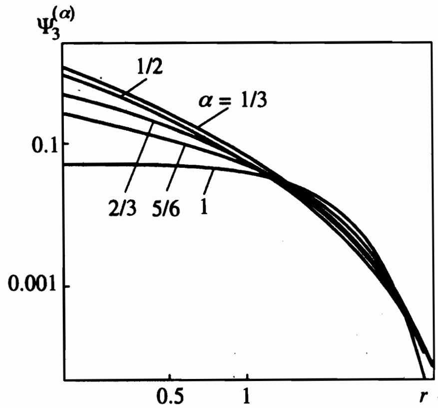


**Рис. 4.** Трехмерные распределения $\Psi_3^{(\alpha)}(r)$ для тех же значений $\alpha$

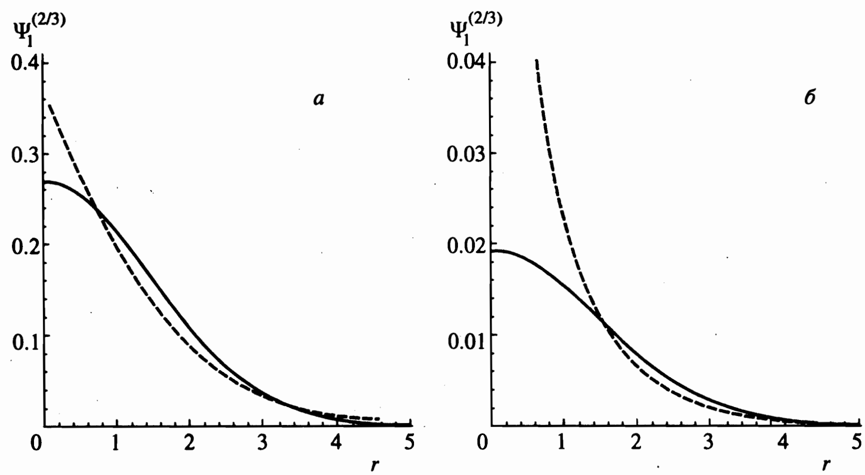


**Рис. 5.** Сравнение субдиффузионных распределений (сплошные кривые) с нормальным (штриховые кривые), имеющим ту же дисперсию, $\alpha = 2/3$, $N = 1$ (*а*) и 3 (*б*)

## 7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наличие разных формулировок задачи об аномальной диффузии и использование различных форм представления результатов иногда приводят к тому, что авторы работ не усматривают логической связи между ними даже в том случае, когда речь идет об одной и той же задаче. Развиваемый в настоящей работе подход — от модели блужданий, основанной на интегральных уравнениях, к асимптотической части их решений, удовлетворяющей уравнениям в двойных производных, — позволяет не только выразить коэффициенты аномальной диффузии через характеристики «элементарных распределений», но и установить соответствие между решениями, полученными в рамках различных подходов. В том, что такая проблема существует, можно убедиться, сопоставив несколько работ по аномальной диффузии [1, 11] с работой [13].

Как уже отмечалось выше, в работе [11] использовалось интегральное уравнение (29) с многомерным лапласианом, найдены трансформанты Меллина и Лапласа, решение выражено через функции Фокса, найдено приближенное выражение плотности на больших расстояниях, с которым в точности совпадает формула (44), и в одномерном случае получено точное выражение для плотности, имеющее (в наших обозначениях) вид

$$\Psi_1^{\alpha}(r) = \alpha^{-1} r^{-1-2/\alpha} g^{(\alpha/2)}(r^{-2/\alpha}). \tag{45}$$

Полагая в (36) $N = 1$ и используя соотношение (П.3), мы приходим к этой же формуле, выгодно отличающейся от (36) тем, что необходимость в интегрировании теперь отпадает. Заметим, кстати, что согласно свойству (38) через плотность $g^{(\alpha/2)}$ и ее производные могут быть выражены распределения в пространствах и высших нечетных размерностей, однако при численных расчетах, как известно, интегрирование предпочтительней дифференцирования.

При $\alpha = 2/3$ распределение (45) согласно (П.4) выражается через модифицированную функцию Бесселя второго ряда:

$$\Psi_1^{(2/3)}(r) = \frac{1}{3\pi}\sqrt{r}\, K_{1/3}\frac{2r^{3/2}}{\sqrt{27}}.$$

В разделе 1.2.3.1 обзора [1] рассматривалась задача о частице, совершающей мгновенные скачки из одной точки в другую с плотностью, характеризующейся конечным значением среднего квадрата длины скачка, и распределением времен между последовательными скачками, удовлетворяющим условию (16). С использованием центральной предельной теоремы (как это сделано в конце разд. 5 данной работы) там была найдена трансформанта Лапласа $\rho^{as}(x, \lambda)$, совпадающая с полученной в работе [11] (формулы (2.8) и (2.10)), установлено автомодельное поведение распределения, т. е. введена функция $\Psi_N(r)$, и снова выведена формула (45) вне связи с работой [11].

Во введении к работе [13] упоминается работа [11], но авторы полагают, что решая уравнение (28), они решают другую задачу, отличную от решенной в работе [11], использующей уравнение (28). Результат решения (рассматривался лишь одномерный случай) выражен через функции Фокса, и приведено приближенное выражение (44), полученное ранее в [11]. В работе [13] не приводятся ни общая формула для многомерного случая, ни точное решение (45) для одномерного, а известная работа [1] в ней вообще не упоминается. Следует отметить к тому же, что записав решаемое уравнение в виде

$$\frac{\partial \sigma_0(x,t)}{\partial t} = C\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^\beta \sigma_0(x,t)}{\partial t^\beta}, \tag{46}$$

авторы применили нестандартное обозначение дробной производной

$$\frac{\partial^\beta f(t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{f(t')dt'}{(t-t')^\beta}$$

вместо стандартного (25). В результате уравнение (46) соответствует уравнению (28) при $\beta - 1 = 1 - \alpha$, т. е. $\beta = 2 - \alpha$. При таком соответствии полученные в [13] результаты совпадают с их аналогами в цитируемых работах и в данной работе, однако некорректность в определении порядка дробной производной привела авторов к неверному заключению, что при $\alpha > 1$ найденное ими решение описывает супердиффузию (см. замечание к формуле (44) и рис. 2–5 цитируемой работы, на которых приведены графики распределений при $\alpha > 1$). В действительности, однако, как следует из разд. 4 настоящей работы, параметр $\alpha$ в рассматриваемой задаче не может превышать единицу: даже если в распределении (16), где он впервые появляется, принять $\alpha > 1$, то вследствие (18) трансформанты (19) и (20) приведут к обычному уравнению диффузии, т. е. к уравнению (28) при $\alpha = 1$. Как следует из нашей предыдущей работы [4], супердиффузионный режим описывается уравнениями, содержащими дробные производные по пространственным переменным (о чем, впрочем, говорится в последнем разделе работы [13]).

В заключение отметим, что представление субдиффузионных распределений с помощью устойчивых распределений, в отличие от функций Фокса, представляется более удобным, физически ясным и логически оправданным (в смысле предельной теоремы), свойства устойчивых распределений хорошо изучены, сами плотности табулированы и поэтому вполне могут быть причислены к классу специальных функций [19].

Автор благодарен Д. А. Коробко за проведение численных расчетов приведенных в работе распределений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-03307).

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

### Односторонние устойчивые законы

Односторонние устойчивые плотности $g^{(\alpha)}(t)$, $\alpha < 1$, являются подмножеством семейства строго устойчивых законов, определяемых следующим образом: плотность $g(t)$ является строго устойчивой тогда и только тогда, когда для любых положительных чисел $b_1$ и $b_2$ найдется положительное $b$ такое, что

$$\frac{1}{b_1 b_2} g\left(\frac{t}{b_1}\right) * g\left(\frac{t}{b_2}\right) = \frac{1}{b} g\left(\frac{t}{b}\right).$$

Другими словами, форма строго устойчивых распределений является инвариантной относительно операции свертки (самым известным из этого класса распределений является закон Гаусса, соответствующий параметру $\alpha = 2$, но он не входит в рассматриваемое здесь подмножество односторонних распределений).

Характеристические функции односторонних устойчивых распределений имеют простой вид (форма (B) из [19]):

$$\varphi^{(\alpha)}(k) = \int_0^\infty e^{ikt} g^{(\alpha)}(t)dt = \exp\left\{-|k|^\alpha \exp\left[-i(\alpha\pi/2)k/|k|\right]\right\}.$$

Согласно лемме 2.2.1 работы [19] аналитическое продолжение функции $\varphi^{(\alpha)}(k)$ со всей вещественной оси $k$ в комплексную плоскость $z$ с разрезом по лучу $\arg z = -(3/4)\pi$ дается функцией

$$\varphi^{(\alpha)}(z) = \exp\left\{-(-iz)^\alpha\right\}, \quad \alpha < 1,$$

в соответствии с чем трансформанта Лапласа

$$g^{(\alpha)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g^{(\alpha)}(t)dt$$

односторонней устойчивой плотности $g^{(\alpha)}(t)$ имеет вид

$$g^{(\alpha)}(\lambda) = \varphi^{(\alpha)}(i\lambda) = \exp\{-\lambda^\alpha\}. \quad \text{(П.1)}$$

Трансформанта Меллина устойчивой плотности выражается через отношение двух Г-функций [17, 18]:

$$g^{(\alpha)}(s) \equiv \int_0^\infty t^s g^{(\alpha)}(t)dt = \frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s)}. \quad \text{(П.2)}$$

Имеет место следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \exp(-r^2\tau^\alpha/4) g^{(\alpha)}(\tau)\tau^{\alpha/2}d\tau = \alpha^{-1} r^{-1-2/\alpha} g^{(\alpha/2)}(r^{-2/\alpha}), \quad \text{(П.3)}$$

легко доказываемое преобразованием Меллина с использованием (П.2).

В элементарных функциях плотность $g^{(\alpha)}(t)$ выражается лишь в случае $\alpha = 1/2$:

$$g^{(1/2)}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right).$$

Это — распределение Леви, называемое еще распределением Н. В. Смирнова [17, 25]. При $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 2/3$ устойчивая плотность (34) выражается через модифицированную функцию Бесселя и функцию Уиттекера [17]:

$$\begin{aligned} g^{(1/3)}(t) &= (3\pi)^{-1} t^{-3/2} K_{1/3}\left(2/\sqrt{27t}\right), \\ g^{(2/3)}(t) &= \sqrt{3/\pi}\, t^{-1} e^{-u/2} W_{1/2,1/6}(u), \end{aligned} \quad \text{(П.4)}$$

где

$$u = (4/27)t^{-2}.$$

Для рациональных значений $\alpha$ $g^{(\alpha)}(t)$ может быть представлена в виде конечной суммы обобщенных гипергеометрических функций [26], например:

$$g^{(3/4)}(t) = -t^{-1}\left(\frac{8}{3\pi}\right)\sum_{n=1}^{3} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) z_2^n F_2\left(\frac{1}{3}+\frac{n}{4}, \frac{2}{3}+\frac{n}{4}; \frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{8}, \frac{n(7-n)}{8}; -z^4\right),$$

где

$$z = -(3/t)^{3/4}/4.$$

Для произвольных $\alpha$ $g^{(\alpha)}(t)$ связаны с функциями Фокса соотношением [18]

$$g^{(\alpha)}(x) = \alpha^{-1}x^{-2}H_{11}^{10}\left(x^{-1}\left|\begin{array}{cc}(-1, & 1)\\ (-\alpha^{-1}, & \alpha^{-1})\end{array}\right.\right).$$

Для вычислительных целей удобным является представление плотности в виде интеграла от неосциллирующей функции, полученное В. М. Золотаревым [27] путем специального изменения контура интегрирования в (34):

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{\alpha t^{1/(\alpha-1)}}{\pi(1-\alpha)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} U_\alpha(\varphi)\exp\left\{-t^{\alpha/(\alpha-1)}U_\alpha(\varphi)\right\}d\varphi,$$

где

$$U_\alpha(\varphi) = \left[\frac{\sin\left[\alpha(\varphi+\pi/2)\right]}{\cos\varphi}\right]^{\alpha/(1-\alpha)}\frac{\cos\left[\pi\alpha/2-(1-\alpha)\varphi\right]}{\cos\varphi}.$$

Полезно также разложение плотности в сходящийся при любом $t > 0$ ряд

$$g^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\Gamma(1+n\alpha)\sin(\pi n\alpha)t^{-n\alpha-1}, \qquad (\text{П.5})$$

а также главный член асимптотического разложения при $t \to 0$

$$g^{(\alpha)}(t) = At^{-\gamma}e^{-bt^{\delta}}, \qquad (\text{П.6})$$

где

$$A = [2\pi(1-\alpha)]^{-1/2}\,\alpha^{1/2(1-\alpha)},$$

$$\gamma = \frac{1-\alpha/2}{1-\alpha}, \quad b = \frac{\alpha-1}{\alpha^{\delta}}, \quad \delta = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Формула (П.6), являющаяся точной для $\alpha = 1/2$, неплохо аппроксимирует устойчивые распределения в средней части интервала $(0, 1)$.

Математическое ожидание и высшие моменты рассматриваемых плотностей бесконечны, однако моменты порядков $\mu < \alpha$ (в том числе и отрицательных) существуют и даются формулой (П.2).

Таблицы функций распределения

$$G^{(\alpha)}(t) = \int\limits_0^t g^{(\alpha)}(\tau)d\tau$$

и плотностей можно найти соответственно в работах [28, 29]. Заметим, что в [29] использована форма (A) устойчивого распределения, связанная с используемой нами формой (B) [28] соотношением

$$g_A^{(\alpha)}(t) = c(\alpha)g^{(\alpha)}\left(c(\alpha)t\right),$$

где $c(\alpha) = [\cos(\pi\alpha/2)]^{1/\alpha}$. Кроме того, по-разному определен в этих работах второй параметр устойчивых законов $\beta$: одностороннему распределению на положительной полуоси в [29] соответствует $\beta = -1$, а в [28] $\beta = 1$. Возможно, эти различия помешали авторам [29] провести сопоставление с более ранними расчетами [28] (об этой попытке они сообщают в конце своей работы, стр. 163). Во всяком случае, проведенное нами с учетом указанных фактов сравнение этих результатов показало хорошее согласие.

Устойчивые законы играют ту же роль в суммировании независимых случайных величин с бесконечными дисперсиями, что и обычный гауссов закон в случае конечных дисперсий. В частности, если независимые случайные величины $T_i \leq 0$ распределены с плотностью $q_0(t)$, удовлетворяющей условию (16) при $\alpha < 1$, то нормированная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{[nB\Gamma(1-\alpha)]^{1/\alpha}} \tag{П.7}$$

при больших $n$ распределена с плотностью $g^{(\alpha)}(t)$. Другими словами, плотность распределения $q_0^{(n)}(t)$ суммы $\sum_{i=1}^{n} T_i$ в асимптотике больших $n$ имеет вид

$$q_0^{(n)}(t) \sim [nB^*]^{-1/\alpha} g^{(\alpha)}\left((nB^*)^{-1/\alpha} t\right), \tag{П.8}$$

где

$$B^* = B\Gamma(1-\alpha).$$

## Литература


1. J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
2. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
3. B. J. West and W. Deering, Phys. Rep. **246**, 1 (1994).
4. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).
5. R. R. Nigmatullin, Phys. Stat. Sol. (b) **123**, 739 (1984).
6. W. Wyss, J. Math. Phys. **27**, 2782 (1986).
7. T. F. Nonnenmacher, D. J. F. Nomienmacher, Acta. Phys. Hungarica **66**, 145 (1989).
8. G. M. Zaslavsky, Physica D **76**, 110 (1994).
9. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
10. A. Compte, Phys. Rev. E **53**, 4191 (1996).
11. W. R. Schneider and W. Wyss, J. Math. Phys. **30**, 134 (1989).
12. W. G. Glöckle and T. F. Nunnenmacher, J. Stat. Phys. **71**, 741 (1993).
13. B. J. West, P. Grigolini, R. Metzler, T. F. Nonnenmacher, Phys. Rev. E **55**, 99 (1997).
14. C. Fox, Trans. Amer. Math. Soc. **98**, 395 (1961).
15. Л. Леви, *Стохастические процессы и броуновское движение*, Наука, Москва (1972).
16. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Гостехиздат, Москва (1949).
17. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).
18. W. R. Schneider, in *Lecture notes in physics*, **262**, Berlin, Springer (1986), p. 497.
19. W. R. Schneider, in *Lecture notes in physics*, **1250**, Berlin, Springer (1987), p. 269.
20. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, т. 2, Мир, Москва (1984).

21. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
22. K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and sons, inc., N-Y (1993).
23. А. А. Боровков, *Курс теории вероятностей*, Наука, Москва (1972).
24. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем*, ТОО Янус, Москва (1995).
25. Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, Москва (1979).
26. H. Scher and E. W. Montroil, Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).
27. В. М. Золотарев, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **71**, 47 (1964).
28. Л. Н. Большев, В. М. Золотарев, Е. С. Кедрова, М. А. Рыбинская, *Теория вероятности и ее применения*, т. XV (1970), с. 309.
29. D. R. Holt and E. L. Crow, J. Res. NBS-B. Math. Sci, 77 **B**, 143 (1973).