

ТЕОРИЯ ВЫНУЖДЕННОГО НЕРЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ

*Д. Н. Клочков, М. Ю. Пекар, А. А. Рухадзе**

*Институт общей физики Российской академии наук
117942, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 октября 1998 г.

Исследована излучательная неустойчивость Пирса релятивистского электронного пучка в волноводе, стабилизированного бесконечно сильным магнитным полем. С использованием аналитических и вычислительных методов получены инкремент неустойчивости, а так же коэффициент трансформации энергии пучка в энергию электромагнитного поля в зависимости от тока пучка, его релятивизма и геометрии системы. Выявлена физическая природа неустойчивости, обсуждаются механизмы ее насыщения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Широко известно, что релятивистский электронный пучок в результате резонансного взаимодействия с волной может весьма эффективно излучать когерентные электромагнитные волны [1]. В последнее время в работах [2] было установлено, что релятивистский электронный пучок, прямолинейно распространяющийся в волноводе, способен эффективно излучать даже в случае, когда фазовая скорость волны больше скорости пучка. Этот нерезонансный коллективный механизм взаимодействия электронов пучка с электромагнитной волной E -типа является по своей природе излучательной неустойчивостью Пирса.

Излучательная неустойчивость Пирса для нерелятивистского электронного пучка экспериментально была реализована в генераторах типа монотрон (см., например, работу [3]). При этом использовались короткие системы, в которых поперечные размеры резонатора превышали продольные.

Теорию нерелятивистского монотронного генератора впервые разработали Маллер и Ростас [4], которые проанализировали свойства генератора посредством эквивалентной схемы из сосредоточенных элементов. При этом было найдено, что условие возникновения колебаний имеет следующий вид для пролетного угла электронов

$$\theta \equiv \frac{\omega L}{u} = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

где L — длина системы, а n — целое число. Это условие соответствовало нагрузочным характеристикам с отрицательной проводимостью. Можно сказать иначе: в системе возникает обратная положительная связь, приводящая к автоколебаниям. В 40-е годы Пирсом [5] была исследована другая неустойчивость, которая также обеспечивалась положительной обратной связью (между выходными и входными электрода-

* E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

ми через внешнюю цепь). Позднее была дана другая трактовка неустойчивости: когда ток пучка превышает критическое значение, в системе возникает пучковая волна, распространяющаяся навстречу пучку и осуществляющая обратную связь [1, § 49, 50]. Естественно было бы представить две, казалось бы, различные неустойчивости как одну, имеющую два режима. Первый режим — потенциальный — возможен, когда пирсовский параметр $\omega_b \gamma^{-3/2} / k_{\perp} u$ больше единицы. Второй режим — излучательный (волновой) — реализуется в области надкритических частот резонатора, когда в системе возможно существование электромагнитной волны, распространяющейся навстречу пучку. В плазменном резонаторе возможно развитие неустойчивости на плазменной волне.

В данной работе с использованием аналитических и численных методов исследуются линейная и нелинейная стадии нерезонансного вынужденного излучения электромагнитных волн прямолинейным релятивистским пучком электронов в гладком резонаторе. Проводится детальное исследование цилиндрически-симметричного случая, т. е. случая, когда происходит возбуждение только азимутально-симметричных мод в круглом по сечению резонаторе. В линейном приближении по амплитуде волны исследован механизм взаимодействия электронов пучка с электромагнитным полем, приводящий к возникновению неустойчивости.

На основании численного моделирования выделены два механизма насыщения неустойчивости. Получены фазовые портреты электронов пучка, анализ которых позволил выяснить физическую природу обоих механизмов насыщения неустойчивости. Для стационарного режима неустойчивости получены амплитуда поля в резонаторе и коэффициент трансформации энергии электронов пучка в энергию поля как функции геометрии системы, плотности и релятивизма электронов пучка. Исследован спектр электромагнитного излучения.

В заключение рассматривается динамическая неустойчивость частиц пучка в поле возбуждаемой волны.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим гладкий металлический волновод цилиндрической формы. Торцы резонатора закрыты металлической фольгой или сеткой, создающей зеркальные граничные условия для электромагнитного поля и прозрачной для электронов пучка. Длина резонатора L , его радиус R . Система находится в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси резонатора, достаточно сильном, чтобы поперечным движением электронов пучка можно было пренебречь. Уравнения Максвелла для отличных от нуля компонент поля в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho, \quad -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}. \quad (1)$$

Поле в данном случае удобно также выразить через единственную компоненту полярizationного потенциала Герца ψ :

$$E_z = \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi, \quad E_r = \partial_t \partial_r \psi, \quad B_\varphi = -\frac{1}{c} \partial_t \partial_r \psi. \quad (2)$$

Исходное уравнение и граничные условия для поля имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_z \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \psi &= 4\pi\rho, \\ E_z|_{r=R} &= E_r|_{z=0,L} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Возмущенная плотность заряда частиц при этом дается соотношением

$$\rho = en_b(r) \left[\int \delta(z - z(t, z_0)) dz_0 - 1 \right], \quad (4)$$

где $z = z(t, z_0)$ является решением характеристической системы уравнений Власова

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} \tilde{\gamma}^{-3} E_z \quad (5)$$

(n_b — невозмущенная плотность электронов пучка, $\tilde{\gamma} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — фактор Лоренца).

Заряд пучка считается скомпенсированным. При влете электрона в резонатор его невозмущенная скорость равна u . Пучок беспрепятственно покидает резонатор, унося приобретенные возмущения.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Излучательная неустойчивость прямолинейного скомпенсированного релятивистского электронного пучка в линейном приближении рассматривалась на основе решения дисперсионного уравнения [2]. Были получены условия развития неустойчивости и инкремент как функция геометрии системы и тока пучка. Показано, что неустойчивость является неустойчивостью рамановского типа, автоколебательной и беспороговой по току. Однако данный подход не выявил полностью природы развития неустойчивости. Чтобы уяснить механизм передачи энергии направленного движения пучка электромагнитному полю, рассмотрим работу, которую производит продольная компонента E_z поля излучения над электроном при его пролете через резонатор

$$A = e \int_0^L E_z(t[z], z) dz. \quad (6)$$

Компонента E_z выражается по формуле (2) через потенциал ψ , который в линейном приближении по амплитуде поля для волновода с пучком, однородным по сечению резонатора, дается выражением [1, § 8]

$$\psi = \phi_s(r) \sum_{\nu=1}^4 A_\nu \cos(\omega t - k_\nu z), \quad (7)$$

где $\phi_s(r)$ — поперечная структура поля. Продольное волновое число k_ν , соответствующее волне с амплитудой A_ν , связано с частотой ω дисперсионным соотношением [1, § 8]:

$$k_\perp^2 + \left(k_\nu^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_\nu u)^2} \right] = 0. \quad (8)$$

Если усреднить работу поля A по фазам электронов или, что то же самое, по времени влета t_0 электронов в резонатор:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A(t_0) dt_0, \quad \omega^{-1} \ll \tau \ll (\delta\omega)^{-1}, \quad (9)$$

то суммирование по фазам невозмущенных электронов вклад в излучение не дает. Чтобы получить ненулевое когерентное излучение, необходимо учесть обратное влияние поля излучения на электроны пучка. Именно в этом случае возникает фазировка пучка и появляется эффект вынужденного когерентного излучения, соответствующего ненулевому вкладу в работу поля излучения. При этом сопутствующая электронам пучка фазировка поля излучения отсутствует.

При модуляции пучка скорость и траектория электрона получают малые возмущения, так что

$$v = u + \tilde{v}, \quad t[z] = t_0 + \frac{z}{u} + \tilde{t}. \quad (10)$$

При этом \tilde{v} и \tilde{t} являются решениями линеаризованных уравнений характеристической системы уравнений Власова

$$\frac{d\tilde{t}}{dz} = -\frac{\tilde{v}}{u^2}, \quad \frac{d\tilde{v}}{dz} = \frac{e}{mu} \gamma^{-3} E_z. \quad (11)$$

Решение уравнений (11) при потенциале (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{e}{m} \gamma^{-3} \phi_s(r) \sum_{\nu=1}^4 \frac{E_\nu}{\omega - k_\nu u} \sin \left[\omega t_0 + \left(\frac{\omega}{u} - k_\nu \right) z \right], \\ \tilde{t} &= \frac{e}{mu} \gamma^{-3} \phi_s(r) \sum_{\nu=1}^4 \frac{E_\nu}{(\omega - k_\nu u)^2} \cos \left[\omega t_0 + \left(\frac{\omega}{u} - k_\nu \right) z \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $E_\nu = (\omega^2/c^2 - k_\nu^2) A_\nu$. В этом случае усредненное по фазам электронов значение работы равно

$$\langle A \rangle = \frac{e^2 \omega}{2mu} \gamma^{-3} \phi_s^2(r) X \sum_{i < j} a_{ij} \left[\frac{1}{(\omega - k_j u)^2} - \frac{1}{(\omega - k_i u)^2} \right], \quad (13)$$

где $X = E_2^2$, а

$$a_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_2^2} \frac{\cos[(k_i - k_j)L] - 1}{k_j - k_i}. \quad (14)$$

Средняя работа, совершаемая над электронами пучка в единицу времени, равна

$$\mathcal{A} = \int_{S_\perp} \langle A \rangle n_b(r) u dS_\perp. \quad (15)$$

Интегрирование производится по поперечному сечению резонатора.

Чтобы вычислить конкретное значение работы \mathcal{A} , нужно (для нахождения отношений A_i/A_2) воспользоваться граничными условиями, а именно, условиями отсутствия возмущений плотностей заряда и тока пучка в плоскости $z = 0$:

$$\sum_{\nu=1}^4 (k_\nu^2 - a^2) A_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^4 k_\nu^3 A_\nu = 0, \quad (16)$$

а также двумя граничными условиями на поле излучения

$$\sum_{\nu=1}^4 k_\nu A_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^4 k_\nu A_\nu e^{ik_\nu L} = 0. \quad (16a)$$

Здесь $a^2 = \omega^2/c^2 - k_\perp^2$. Из первых трех уравнений (16) и (16a) находятся отношения A_ν/A_2 , последнее уравнение дает значение a . При этом волновые числа k_ν удовлетворяют уравнению (8), которое при малом значении пирсовского параметра

$$\chi \equiv \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_\perp^2 u^2} \ll 1 \quad (17)$$

имеет следующие решения [2]

$$k_{1,2} = \pm a \pm \frac{\beta_{1,2} \omega_b^2}{2a}, \quad \beta_{1,2} = \frac{k_\perp^2 \gamma^{-3}}{(\omega \mp au)^2}, \quad (18)$$

$$k_{3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \alpha \omega_b, \quad \alpha = \frac{\omega}{u} \frac{\gamma^{-5/2}}{\sqrt{\omega^2 - a^2 u^2}}, \quad a \neq 0.$$

Условие (17) обеспечивает рамановский тип развития неустойчивости [1], а также предполагает отсутствие потенциальной неустойчивости Пирса, обрывающей ток в пучке и не дающей вклад в поле излучения.

С учетом сказанного выше получаем следующие выражения для работы

$$\mathcal{A} = (-1)^{n+1} \frac{\omega_b}{2\pi} \|\phi_s\| \frac{\omega^2 u \gamma^{-1/2}}{(\omega^2 - a^2 u^2)^{3/2}} \sin(\alpha \omega_b L) \sin\left(\frac{\omega L}{u}\right) X, \quad (19)$$

где

$$\|\phi_s^2\| = \int_{S_\perp} \phi_s^2(r) dS_\perp.$$

При этом было учтено, что в главном порядке $a = \pi n/L$. Основной вклад в работу \mathcal{A} дают перекрестные пучково-электромагнитные слагаемые. Это соответствует тому, что при модуляции пучка электромагнитной частью волны излучения наибольшую работу производят пучковые волны. И наоборот, при возмущении траектории электрона пучковой волной максимальный вклад в работу поля излучения дают электромагнитные волны. Таким образом осуществляется связь двух колебательных систем: пучка и электромагнитного поля в резонаторе. Результатом такого взаимодействия является сдвиг частоты $\delta\omega$, мнимая часть которого есть не что иное, как инкремент неустойчивости. При этом, очевидно, эффект является коллективным, так как развитие неустойчивости требует возбуждения пучковых плазменных волн в системе.

Для вычисления инкремента неустойчивости запишем уравнение баланса энергии в резонаторе

$$\frac{d}{dt}\langle W \rangle = -\mathcal{A}, \quad (20)$$

где усредненная по времени энергия $\langle W \rangle$ включает как энергию поля, так и кинетическую энергию электронов пучка в резонаторе:

$$\langle W \rangle = \langle W_{el} \rangle + \langle W_e \rangle.$$

При малом значении пирсовского параметра $\chi \ll 1$ энергия, заключенная в резонаторе, будет определяться главным образом энергией электромагнитного поля. Уравнение (20) в этом случае примет вид

$$\frac{dX}{dt} = 2(-1)^n \omega_b \frac{k_{\perp}^2 c^2 \gamma^{-1/2}}{(\omega^2 - a^2 u^2)^{3/2}} \frac{u}{L} \sin(\alpha \omega_b L) \sin\left(\frac{\omega L}{u}\right) X. \quad (21)$$

Для цилиндрического волновода

$$\phi_s(r) = J_0(k_{\perp s} r),$$

где $k_{\perp s} = \mu_{0,s}/R$ ($\mu_{0,s}$ — корень функции Бесселя $J_0(x)$).

Величина X квадратична по полю, поэтому

$$\frac{dX}{dt} = 2\delta\omega X. \quad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), получаем инкремент неустойчивости

$$\delta\omega = (-1)^n \omega_b \frac{k_{\perp}^2 c^2 \gamma^{-1/2}}{(\omega^2 - a^2 u^2)^{3/2}} \frac{u}{L} \sin(\alpha \omega_b L) \sin\left(\frac{\omega L}{u}\right) \quad (23)$$

на частоте

$$\omega \equiv \omega_{s,n} = c \sqrt{\left(\frac{\mu_{s,0}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2}. \quad (24)$$

Условие развития неустойчивости

$$(-1)^n \sin\left(\frac{\omega L}{u}\right) \sin(\alpha \omega_b L) > 0 \quad (25)$$

определяет параметры резонатора и пучка, при которых возможно усиление электромагнитных волн в системе.

В заключение раздела отметим, что формулы (23)–(25) полностью совпадают с полученными в [2] на основе анализа дисперсионного уравнения, что свидетельствует о правильности предложенного механизма излучательной пирсовской неустойчивости как о нерезонансном вынужденном излучении прямолинейного релятивистского электронного пучка собственных волн в резонаторе.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Исследование нелинейной системы уравнений (1), (4), (5) возможно только на основе численного моделирования неустойчивости. Согласно результатам линейной теории в резонаторе происходит возбуждение сразу нескольких мод с близкими частотами. Отсутствие выделенной частоты, а также длины волны, делает невозможным разделение поля на медленно и быстро меняющиеся компоненты с последующим усреднением по времени или пространственной координате. В связи с этим мы пришли к необходимости использовать методы, изложенные в работах [6, 7]. В нашем случае пучок моделировался методом крупных частиц [6]. Для лучшего сглаживания и устранения пилообразных флуктуаций плотности и заряда ядро частицы выбиралось треугольной формы; размер частицы совпадал с размером ячейки (что можно рассматривать как модификацию PIC-метода). При этом на одну ячейку сетки приходилось от 10 до 40 частиц. Для решения уравнения Максвелла использовалась явная схема с перешагиванием [6]. Для исследования длинных систем $L/R \sim 30$ использовалась также явно-неявная схема Кранка—Николсона с факторизацией по координате z . При этом в поперечном направлении поле разлагалось по собственным функциям волновода. Для устранения сеточных флуктуаций применялись различные методы цифровой фильтрации для компонент поля, а так же для плотности тока и заряда пучка [7]. При численном моделировании использовались следующие безразмерные величины:

$$\tau = \frac{u}{L}t, \quad p = \frac{pz}{mc}, \quad \varepsilon = \frac{eL}{mc^2\gamma^3}E_z. \quad (26)$$

В численном счете рассматривался бесконечно тонкий пучок трубчатой геометрии и использовался мягкий режим его вхождения в резонатор. Параметр Пирса χ определялся как отношение рабочего тока I к предельному току Пирса I_n , где

$$I_n = \frac{mc^3}{e} \frac{u^3}{c^3} \frac{\gamma^3}{2 \ln(R/r_0)}. \quad (27)$$

Во всех расчетах бралось $r_0/R = 0.4$. При этом насыщение неустойчивости происходило за 10–10000 пролетных времен в зависимости от тока пучка и геометрического параметра резонатора $\xi = L/R$. В большинстве случаев происходило возбуждение первой поперечной моды $s = 1$. Для очень коротких систем $\xi \leq 1$ и при некоторых значениях параметра ξ для длинных систем наблюдалось возбуждение высших поперечных мод. Для коротких систем, когда $\xi < 12$, режим неустойчивости был в основном одномодовым; при определенных значениях параметра ξ наблюдалось возбуждение двух продольных гармоник, соответствующих правилу отбора (25). В длинных системах ($\xi > 12$) режим становится многомодовым. Действительно, для больших значений ξ ($\xi \gg 1$) имеет место соотношение

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{c}{u} \frac{\pi}{\mu_{s,0}} \frac{n_2^2 - n_1^2}{\Delta\theta}, \quad (28)$$

где n_i — номер продольной моды. Возбуждение двух мод с одинаковыми инкрементами может иметь место, если для разности пролетных углов выполняется неравенство $\Delta\theta < \pi$. Так как согласно условию (25) в длинных системах возможно возбуждение одновременно либо четных, либо нечетных гармоник, получаем, что для $\gamma = 2$ при $\xi \geq 3$ имеет место двухмодовый режим, а при $\xi \geq 12$ — трехмодовый.

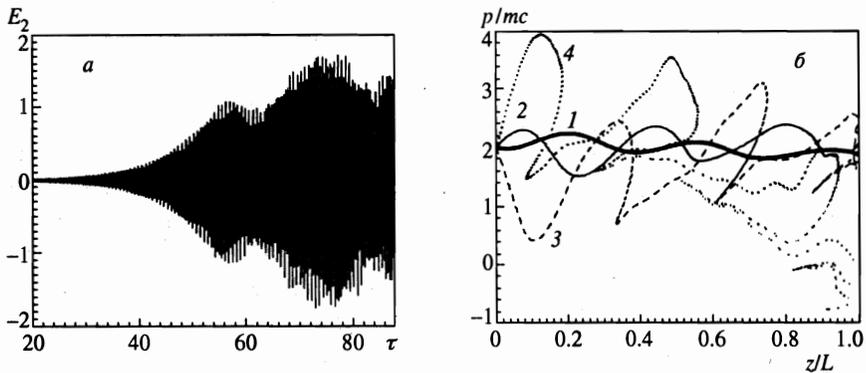


Рис. 1. *a* — Динамика амплитуды волн в коротком резонаторе, $\xi = 6$, для $\gamma = 2$ и $\chi = 0.05$. *б* — Фазовые плоскости электронов пучка в резонаторе, соответствующие моментам времени $\tau = 40$ (1), 45 (2), $\tau = 60$ (3), 65 (4)

Мы выделили два механизма насыщения неустойчивости. Первый механизм реализуется в коротких ($\xi < 12$) системах при одномодовых режимах. Он аналогичен механизму Ландау [8]. В системе возникает четырехволновой процесс

$$\omega_{1,n} + \omega_{1,n} \rightarrow \omega_{1,n-1} + \omega_{1,n+1}, \tag{29}$$

который приводит к перекачке энергии из волны обратно в пучок согласно условию (25). В этом случае при больших амплитудах поля в резонаторе колебания электронов пучка относительно положения равновесия перестают быть гармоническими.

На рис. 1 приведены результаты расчета для $\xi = 6$, $\gamma = 2$ и $\chi = 0.05$ (что примерно соответствует значению тока $I \approx 2.4$ кА). Хорошо видны регулярные осцилляции амплитуды поля с частотой модуляции порядка $\delta\omega$ в стационарном режиме насыщения. Расположение электронов пучка на фазовых плоскостях представлено рис. 1б. Для момента времени $\tau = 45$, когда еще имеет место линейный режим неустойчивости, модуляция пучка является чисто гармонической. С развитием неустойчивости появляются нелинейные искажения, приводящие к «опрокидыванию»: электроны начинают обгонять друг друга, пучок расслаивается по скоростям. Появлению эффекта «опрокидывания» соответствует выход неустойчивости на стационарный режим. С выходом неустойчивости на насыщение изменения плотности электронов пучка приобретают характер глубокой модуляции. Этому соответствует увеличение отношения амплитуд пучковых волн к электромагнитной и сдвигу продольных волновых чисел k_z в сторону больших значений. Пучок при этом остается холодным достаточно долгое время после выхода амплитуды излучения на стационарный уровень.

В длинных системах ($\xi \geq 12$), когда режим неустойчивости изначально является многомодовым, ответственным за насыщение механизмом является стохастизация частиц пучка в поле многих волн. В результате стохастизации траектории частиц модуляция пучка становится равномерной, т.е. фазы электромагнитного поля относительно электронов равномерно распределяются в интервале $[0; 2\pi]$. Поэтому вклад в вынужденное излучение становится равным нулю. Как показали численные исследования, насыщение неустойчивости наступает одновременно с хаотизацией частиц пучка. На рис. 2 приведены результаты расчета для $\xi = 18$, $\gamma = 2$, $\chi = 0.05$. В момент насыщения

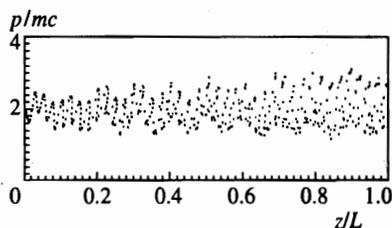


Рис. 2. Фазовая плоскость электронов пучка в резонаторе на момент времени насыщения в длинном резонаторе, $\xi = 18$, для $\gamma' = 2$ и $\chi = 0.05$

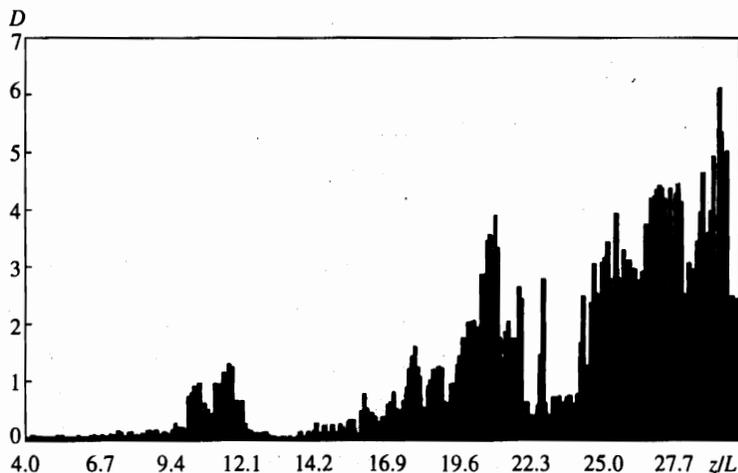


Рис. 3. Зависимость максимального расстояния между двумя пробными частицами на фазовой плоскости в зависимости от геометрического параметра ξ в момент выхода неустойчивости на нелинейную стадию

неустойчивости, $\tau = 40$, выведена фазовая плоскость электронов пучка. Уже в середине резонатора пучок полностью стохастизирован. При этом, несмотря на сильную хаотизацию пучка, его модуляция остается на первоначальном уровне. На выходе из резонатора эффективная температура пучка порядка 0.1–0.3 МэВ, что неудивительно, так как напряженность поля в резонаторе достигает 100–300 кВ/см. Для данного режима работы генератора поле в резонаторе имеет широкий спектр продольных гармоник, возбуждаются также более высокие гармоники и в поперечной структуре. Так, например, наблюдалось возбуждение третьей поперечной моды. В обоих механизмах насыщения неустойчивости отсутствовал эффект бунчировки пучка.

Для оценки степени хаотичности колебаний системы в момент времени, когда неустойчивость только начинает выходить на насыщение, в резонатор запускались две пробные частицы, расстояние между которыми на фазовой плоскости было достаточно малым, а скорости примерно совпадали со скоростью электронов пучка u . В качестве меры стохастизации пучка бралось максимальное расстояние, на которое могли разойтись частицы на фазовой плоскости при пролете через резонатор. На рис. 3 представ-

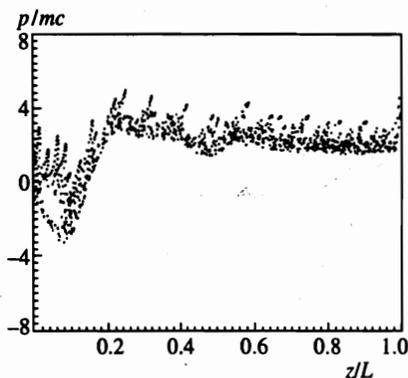


Рис. 4. Фазовая плоскость электронов пучка в момент насыщения для $\xi = 25$, $\chi = 0.95$ и $\gamma = 2$

лена зависимость максимального фазового расстояния между частицами

$$D = \sqrt{\left(\frac{z}{L}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{mc}\right)^2}$$

от управляющего параметра, которым является геометрический фактор ξ при значениях $\gamma = 2$, $\chi = 0.05$. Из приведенного графика хорошо видно наличие двух режимов насыщения неустойчивости, области проявления которых согласуются с приведенными выше оценками.

С увеличением тока пучка, когда пирсовский параметр χ становится порядка (или больше) единицы, в системе развивается потенциальная неустойчивость Пирса. На рис. 4 представлена фазовая картина пучка в момент насыщения неустойчивости, когда $\tau = 10$, для $\xi = 18$, $\chi = 0.95$, $\gamma = 2$. У входа в резонатор наблюдается образование виртуального катода, от которого происходит частичное отражение электронов пучка. Вместе с тем стохастизация пучка соответствует присутствию в резонаторе излучательной неустойчивости, развитие которой несколько подавлено потенциальной неустойчивостью. При дальнейшем увеличении параметра χ инкремент аperiодической неустойчивости Пирса растет быстрее излучательной. В результате потенциальная ветвь подавляет излучательную. Таким образом, аperiодическую и излучательную неустойчивости Пирса можно считать двумя режимами одной неустойчивости, которые реализуются при различных значениях параметра χ .

Итак, прямолинейный релятивистский пучок электронов способен вынужденно излучать электромагнитные волны в гладком резонаторе. Естественно, встает вопрос об эффективности передачи энергии пучка электронов полю излучения. Так как излучение заперто внутри резонансной полости, в качестве эффективности преобразования энергии электронов пучка в энергию электромагнитного излучения берется отношение потока излучения к падающему потоку энергии пучка

$$\eta = \frac{\langle |s| \rangle}{mc^2 n u \gamma}, \quad (30)$$

где $\langle |s| \rangle$ — модуль вектора Пойнтинга электромагнитной волны вблизи правой границы волновода, усредненный по большому интервалу времени $t \gg 2\pi/\omega$.

Для коротких систем, $\xi < 1$, инкремент является малой величиной и ведет себя $\propto \omega_b^2$, поэтому использование пирсотрона для импульсных токов с малыми значениями

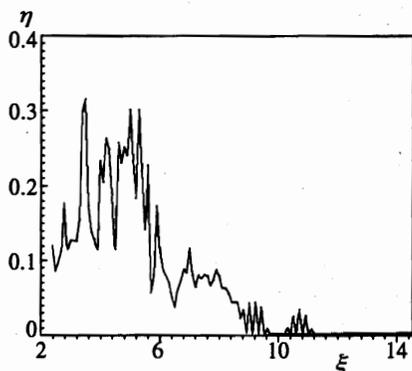


Рис. 5

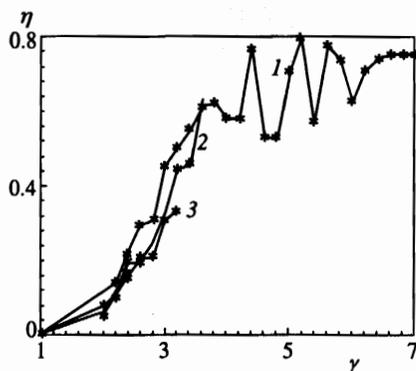


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость коэффициента трансформации энергии η от геометрического параметра резонатора для следующих параметров пучка $\gamma = 2$, $\chi = 0.05$

Рис. 6. Зависимость коэффициента трансформации энергии η от релятивизма γ пучка для $\chi = 0.05$, $\xi = 4$ (1), 5 (2), 6 (3)

ξ является неэффективным. Максимум функции $\eta(\xi)$ реализуется в длинных системах, когда $1 < \xi < 8$ (рис. 5). При дальнейшем увеличении длины резонатора коэффициент трансформации быстро падает, что согласуется с оценками, полученными в линейной теории [2]. Таким образом, оптимальными будут значения ξ порядка пяти.

При численном моделировании была получена зависимость коэффициента трансформации η от тока пучка при различных значениях геометрического параметра ξ . При увеличении тока η уменьшается, что связано с разогревом пучка. При больших длинах резонатора разогрев наступает быстрее, что приводит к более быстрому снижению коэффициента трансформации с ростом тока пучка.

Зависимость η от релятивизма пучка находится в согласии с оценками из линейной теории [2]. С ростом релятивизма пучка γ коэффициент преобразования энергии η растет вначале квадратично по γ , а затем выходит на насыщение при $\gamma > 5$ (рис. 6).

5. ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ПУЧКА

С выходом неустойчивости на нелинейную стадию амплитуда поля продолжает медленно расти. Регулярные амплитудные модуляции поля сменяются хаотическими осцилляциями. Это связано с тем, что при дальнейшем развитии неустойчивости происходит уширение частотного спектра колебаний (рис. 7) в результате нелинейных многоволновых процессов, приводящих к перераспределению энергии в спектре излучения.

$$\omega_{1,n} + \omega_{1,n} \rightarrow \omega_{1,n-m} + \omega_{1,n+m}, \quad (31)$$

где четное число $m < n$.

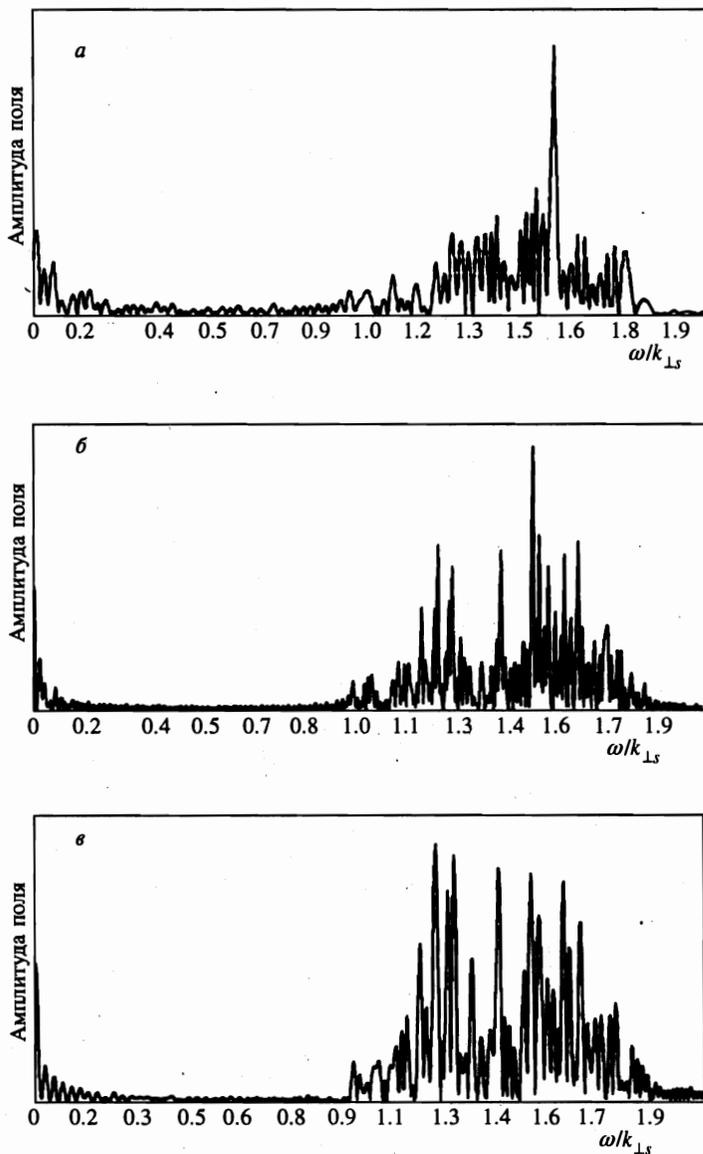


Рис. 7. Фурье-спектр электромагнитных колебаний в различные моменты времени: *а* — в момент насыщения неустойчивости, *б* — нелинейная стадия, *в* — продвинутая нелинейная стадия

Монотрон является открытой системой, так как обменивается энергией с окружающей средой посредством электронного пучка. Развитие неустойчивости предполагает наличие сильной обратной связи. Естественно, в такой системе имеет место динамическая неустойчивость движения — экспоненциальное разбегание траекторий частиц [9], которое наблюдалось в численном счете на нелинейной стадии для длинных систем с $\xi \geq 8$. Именно развитию динамической неустойчивости соответствует процесс ушире-

ния спектра колебаний. В качестве характеристики динамического хаоса удобно взять K -энтропию, определяемую выражением [9]

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{D(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}. \quad (32)$$

Так как время нахождения частиц в резонаторе ограничено и по порядку величины равно L/u , K -энтропия приближенно вычислялась по формуле

$$K = \frac{1}{T} \ln \frac{D_{max}(T)}{D(0)}, \quad (33)$$

где T — время пролета частицы. Полученная таким образом K -энтропия при различных значениях геометрического параметра оказалась убывающей функцией от ξ . Малое значение K -энтропии при $\xi > 8$ связано с тем, что для данных значений геометрического параметра хаотизация пучка ответственна за насыщение неустойчивости. Поэтому уровень хаотичности, развившейся на линейной стадии, остается тем же и на продвинутой нелинейной стадии. Как уже отмечалось, при $\xi < 8$ механизм, отвечающий за стабилизацию неустойчивости, не связан с разогревом пучка, что дает возможность большему усилению электромагнитных волн, а следовательно, и более сильному в дальнейшем разогреву пучка.

При численном расчете при некоторых значениях параметра ξ наблюдалась перемежаемость режимов упорядоченности и хаотичности во времени. Кроме неустойчивости режимов наблюдалось также расслоение пучка на две компоненты: холодную, в которой движение частиц было упорядочено, и горячую, для частиц которой имела место динамическая неустойчивость. При этом время пролета через резонатор для частиц холодной компоненты было значительно меньше времени нахождения частиц горячей компоненты в резонаторе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно ответить на вопрос: почему используемые генераторы типа монотрон оказались малоэффективными. Все приборы работали в области параметров, где имела место слабая генерация, а именно, для $\gamma \simeq 1$ (нерелятивистский пучок) и $\xi = L/R \ll 1$ (сверхкороткие системы). Численное моделирование показало, что в оптимальном режиме генерации КПД прибора может составлять порядка 20–30%.

Существует еще один параметр, позволяющий регулировать эффективность генератора — это радиус тонкого трубчатого пучка r_b . Действительно, электроны, имеющие поперечную координату r_b , модулируются полем излучения пропорционально $\phi_s(r_b)$. Так как выход на стационарный режим определяется глубиной модуляции пучка, амплитуда насыщения будет зависеть от радиуса пучка r_b .

Наконец, отметим, что наличие двух различных режимов неустойчивости открывает возможность для создания как широкополосного, так и узкополосного генераторов. Зависимость режимов только от геометрического размера резонатора ξ делает заманчивой попытку технической реализации перенастраиваемого генератора.

Авторы выражают благодарность В. А. Черепенину за обсуждение проблем, связанных с численным интегрированием уравнений Максвелла и ценные замечания.

Литература

1. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме*, Наука, Москва (1990).
2. Д. Н. Клочков, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **23**, 646 (1997); Д. Н. Клочков, М. Ю. Пекар, *Физика плазмы* **23**, 650 (1997); Д. Н. Клочков, М. Ю. Пекар, А. А. Рухадзе, *Радиотехника и электроника* **44** (1999).
3. F. Biquard, P. Grivet, and A. Septier, *Зарубежная радиоэлектроника* **10**, 123 (1969); *IEEE Trans., Dec., Im-17*, № 4, 354 (1968).
4. J. J. Muller and E. Rostas, *Helvet. Phys. Acta* **13**, 435 (1940).
5. J. R. Pierce, *J. Appl. Phys.* **15**, 721 (1944).
6. Ю. А. Березин, В. А. Вшивков, *Метод частиц в динамике разреженной плазмы*, Наука, Новосибирск (1992).
7. V. P. Tarakanov, in *Users Manual for Code KARAT*, ed. by Berkley Rec., Ass., Inc., Springfield, VA, USA (1992).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
9. Ю. Л. Климонтович, *Турбулентное движение и структура хаоса*, Наука, Москва (1990).