

НАЧАЛЬНЫЙ СПЕКТР МАСС ЧЕРНЫХ ДЫР В ЯДРАХ ГАЛАКТИК

Ю. Н. Ерошенко*, М. И. Зельников†

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 декабря 1998 г.

В рамках космологической модели с холодной темной материей рассчитана начальная функция масс сверхмассивных черных дыр, образующихся в ядрах галактик. Коллапсирующая область моделируется однородным эллипсоидом. Предполагается, что набор протообъектом углового момента происходит под действием внешних приливных сил, а преодоление центробежного барьера и последующий гравитационный коллапс осуществляются за счет турбулентной вязкости. Для определения функции масс предварительно найдена функция распределения образующихся объектов по угловым моментам для произвольного спектра начальных возмущений плотности. Начальная функция масс сопоставлена с имеющимися наблюдениями, и указаны некоторые процессы, ведущие к ее трансформации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данные, полученные с помощью телескопа «Хаббл» и ряда наземных телескопов [1], свидетельствуют в пользу того, что в ядрах десяти галактик имеются сверхмассивные черные дыры (ЧД) с массами $M_h \sim (10^6 - 10^{11})M_\odot$. Имеются также менее определенные указания на наличие ЧД еще в нескольких десятках других галактик. Методика определения масс ЧД основана на изучении динамики звезд и газа вблизи центров галактик и ряде других подходов. Есть основания полагать, что доля галактик, содержащих в своих ядрах ЧД, не менее 20% [1, 2], так что образование ЧД в ядре является не исключительным, а, скорее, закономерным явлением в истории почти каждой галактики.

Было предложено несколько моделей образования ЧД [3–5]. Эти модели не исключают друг друга, поэтому ЧД в различных диапазонах масс и даже при одинаковых массах, возможно, имеют различное происхождение. Согласно одной из моделей, которую мы будем использовать в данной статье, ЧД возникает в результате коллапса газового облака задолго до формирования звездной галактики [5]. Возможность такого коллапса зависит от величины углового момента, набираемого под действием внешних приливных сил. В центре вириализованного гало темной материи барионное вещество образует самогравитирующий вращающийся диск. Сжатие центральной области диска до релятивистского состояния происходит благодаря передаче наружу углового момента за счет турбулентной вязкости. ЧД образуется, если диск успеет сжаться до момента его фрагментации на звезды и до разрушения его вспышками сверхновых. Таким образом, коллапсируют лишь объекты с достаточно малым угловым моментом.

* E-mail: erosh@td.lpi.ac.ru

† E-mail: zelnikov@td.lpi.ac.ru

Накопление статистического материала в последнее время позволило заметить определенные корреляции между массами ЧД и характеристиками содержащих их галактик. В работе [6] получено приближенное соотношение $M_h \simeq 0.003M_b$ между массой ЧД M_h и массой M_b звездной компоненты галактики. Аналогичная связь $M_h \simeq 0.006M_b$ получена в работе [2] на основе изучения тридцати двух галактик. Корреляции подобного рода (хотя и приближенные) вместе с известной функцией светимости галактик позволили получить оценку для распределения ЧД по массам [7]. Перед теорией формирования галактик встает задача определения функции масс ЧД. Попытки вычислить функцию масс предпринимались, например, в [8, 9], однако в подходах, предложенных в этих работах, недостаточно полно учтены статистические аспекты формирования ЧД. В [8] не учитывалось распределение объектов по угловым моментам. В [9] в рамках линейной теории найдена лишь асимптотика распределения по угловому моменту L при больших L и предполагалась ее справедливость при $L \rightarrow 0$. Кроме того, в [9] использовался неадекватный критерий формирования ЧД (ЧД формируются всякий раз, когда L не превосходит максимального углового момента кэрровской ЧД). Целью данной статьи является более точное вычисление функции масс ЧД посредством предварительного нахождения распределения по L в области малых L с учетом нелинейной стадии эволюции возмущения плотности. В отличие от [9] мы используем, как нам представляется, более правдоподобный критерий формирования ЧД.

Модель аккреции вещества на ЧД успешно объясняет многие наблюдаемые свойства квазаров (высокая светимость, переменность и спектр излучения). Аккреция в эддингтоновском режиме приводит, как известно, к экспоненциальному росту массы ЧД. Другим источником трансформации спектра масс являются столкновения и слияния галактик при больших красных смещениях [10, 11]. Взаимодействующие галактики, а также следы таких взаимодействий непосредственно наблюдаются. Черные дыры, существовавшие в центрах галактик до слияния, за счет динамического трения должны быстро оседать к центру новой галактики и также сливаться. Оба процесса — рост массы при аккреции и слияние ЧД — ведут к перераспределению функции масс ЧД в сторону больших масс. Поэтому наблюдаемый в настоящее время спектр масс ЧД должен отличаться от спектра масс образующихся ЧД. Сравнение вычисленной нами начальной функции масс ЧД и наблюдаемой функции масс, подвергшейся трансформации, может, таким образом, оказаться полезным в исследованиях слияний галактик и механизмов аккреции вещества в квазарах.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 изучена временная зависимость момента приливных сил и получена приближенная формула для интеграла этого момента по времени. В разд. 3 найдено совместное распределение вероятности для величин, характеризующих внутреннее и внешнее распределения плотности. В разд. 4 выполнено статистическое усреднение и получено распределение объектов по угловым моментам. В разд. 5 кратко описаны некоторые физические процессы, ведущие к формированию ЧД, и оценено критическое значение углового момента. В разд. 6 вычислена начальная функция масс и дана интерпретация полученных результатов. На протяжении статьи мы рассматриваем плоскую космологическую модель с холодной темной материей без Λ -члена.

2. МОДЕЛЬ ПРОТООБЪЕКТА

Рассмотрим отдельный пик в распределении плотности вещества, из которого после коллапса образуется гравитационно-связанный объект. Разделим область пространства вблизи пика на внутреннюю и внешнюю части сферой такого радиуса R , чтобы большая часть массы, которая впоследствии попадет в объект, оказалась внутри. Потенциал внешней части, представляющий поле приливных сил, можно разложить по сферическим гармоникам [12]:

$$\phi_{sh} = \sum_{l,m} \frac{4\pi G}{2l+1} a_{lm} Y_{lm} |r|^l, \quad (1)$$

где

$$a_{lm} = -\rho_b \int_{|r|>R} d^3r Y_{lm}^* \delta(\mathbf{r}) |r|^{-l-1}, \quad (2)$$

G — гравитационная постоянная, $\rho(\mathbf{r})$ — плотность в точке \mathbf{r} , ρ_b — средняя космологическая плотность, $\delta(\mathbf{r}) \equiv [\rho(\mathbf{r}) - \rho_b]/\rho_b$. Член с $l = 0$ не влияет на динамику сжатия, а член с $l = 1$ отвечает только за движение центра масс и не влияет на набор углового момента. Согласно [13], членами с $l \geq 3$ при рассмотрении приливных сил можно также пренебречь.

Внутреннюю коллапсирующую область будем моделировать однородным эллипсоидом. Для набора протообъектом углового момента решающее значение имеет наличие у него квадрупольного момента, взаимодействующего с приливными силами. Условно можно выделить два источника квадрупольного момента: несферичность формы протообъекта и неоднородность внутреннего распределения вещества [14]. Моделью однородного эллипсоида в значительной мере учитывается только первый из этих факторов. Несмотря на указанный недостаток, модель однородного эллипсоида — это единственная на сегодня модель, которая позволяет подробно аналитически проследить динамику нелинейного сжатия. Мы будем использовать ее в предположении, что она дает разумную количественную оценку по крайней мере для временной зависимости момента приливных сил.

Уравнения эволюции однородного эллипсоида приведены, например, в [12, 15]. В процессе эволюции сохраняется полная масса внутри эллипсоида: $M = \rho_i V_i = M_e + \rho_b V$, где V — объем эллипсоида, а M_e — избыток массы в эллипсоиде над фоном. Индекс i здесь и в дальнейших формулах означает, что величина взята в некоторый начальный момент t_i , который можно выбрать близким к моменту рекомбинации. Введем параметризацию координаты r^α элемента вещества эллипсоида:

$$r^\alpha = S^{\alpha\beta}(t) x^\beta, \quad (3)$$

где $|x| \leq 1$. Квадратичный потенциал

$$\phi = \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\beta}(t) r^\alpha r^\beta \quad (4)$$

состоит из потенциала однородного эллипсоида, потенциала однородного фона и потенциала приливных сил:

$$\Phi = \Phi_{el} + \Phi_b + \Phi_{sh}, \quad (5)$$

$$\Phi_b = 4\pi G \rho_b(t) I, \quad (6)$$

I — единичная матрица. Пусть полуоси эллипсоида равны a , b и c . В декартовой системе координат, связанной с главными осями эллипсоида, имеем

$$S = \begin{vmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{vmatrix}, \quad \Phi_{el} = 2\pi G \rho_e \begin{vmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где

$$A_1 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{1/2}}, \quad (8)$$

A_2 и A_3 записываются аналогично, $\rho_e \equiv M_e/V$.

Уравнения эволюции эллипсоида:

$$\frac{d^2 S^{\alpha\beta}}{dt^2} = -\Phi^{\alpha\gamma} S^{\gamma\beta}. \quad (9)$$

Образованию ЧД соответствуют малый угловой момент и, соответственно, малый момент приливных сил. Мы будем считать их настолько слабыми, что их влиянием на динамику самого гало темной материи можно пренебречь. В этом случае обусловленный приливыми силами угловой момент становится значительным фактором лишь при дальнейшем сжатии барионной компоненты. Начальные скорости задаются в виде

$$\left. \frac{dS^{\alpha\beta}}{dt} \right|_i = \left[HS^{\alpha\beta} - \frac{2}{3H} (\Phi^{\alpha\gamma} - \Phi_b^{\alpha\gamma}) S^{\gamma\beta} \right]_i, \quad (10)$$

где H — постоянная Хаббла.

ЧД происходят из относительно высоких пиков плотности. В этой ситуации отклонение формы объекта от сферически-симметричной невелико [16]. Поэтому будем искать решение уравнений (9) и (10) в пределе малых отклонений формы эллипсоида от сферически-симметричной, т. е. представим $S^{\alpha\beta}$ в виде

$$S^{\alpha\beta} = IR + q, \quad (11)$$

где

$$q = \begin{vmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & \\ & & q_3 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

причем $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \ll R^2$. Обозначим $p \equiv q_1 + q_2 + q_3$, тогда матрица Φ в правой части (9) примет вид

$$\Phi = 2\pi G \left\{ \rho_i \frac{R_i^3}{R^3} \left(1 + \frac{p_i}{R_i} \right) - \rho_b(t) \left(1 + \frac{p}{R} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{2p}{5R} \right) I - \frac{4q}{5R} \right\} + \frac{4\pi}{3} G \rho_b(t) I. \quad (13)$$

В нулевом приближении пренебрежем несферичностью, положив $q = 0$ и $p = p_i = 0$. Решение в этом случае известно [15] и выражается параметрически формулами

$$R = R_i \frac{3}{5\delta_i} \cos^2 \vartheta, \quad (14)$$

$$\vartheta + \frac{1}{2} \sin \vartheta = \frac{2}{3} \left(\frac{5\delta_i}{3} \right)^{3/2} \frac{t - t_s}{t_i},$$

где t_s — момент максимального расширения:

$$t_s = t_i \left[1 + \frac{3\pi}{4} \left(\frac{5\delta_i}{3} \right)^{-3/2} \right], \quad (15)$$

δ_i — относительная флуктуация плотности в момент t_i .

Рассмотрим в следующем линейном по q приближении эффекты несферичности. Складывая уравнения системы (9) и начальные условия (10), получим

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= a_1 p + a_2 p_i, \\ \dot{p}(t_i) &= a_3 p_i, \\ p(t_i) &= p_i, \end{aligned} \quad (16)$$

где величины a_1 , a_2 и a_3 не зависят от компонент q . Если мы в начальный момент t_i выберем сферу такого радиуса R , что $p_i = 0$, то, как следует из (16), в любой момент $p(t) = 0$. Тогда q удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= q \frac{4\pi G}{5} \left(\frac{1}{3} \frac{R_i^3}{R^3} \rho_i - 2\rho_b(t) \right), \\ \dot{q}(t_i) &= \frac{2}{3t_i} \left(1 + \frac{\delta_i}{15} \right) q_i, \\ q(t_i) &= q_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Связь R и t задается формулами (14). Данную систему дифференциальных уравнений можно проинтегрировать численно, например, методом Рунге—Кутты. Решение понадобится нам в связи с вычислением углового момента. Выясним, как зависит момент приливных сил от q .

Момент сил, действующий на эллипсоид, выражается интегралом по его объему:

$$K_\alpha = - \int d^3r \rho_b \delta(\mathbf{r}) [\mathbf{r} \nabla \phi_{sh}(\mathbf{r})]_\alpha = - \frac{M_e}{5} e_{\alpha\beta\gamma} \Phi_{\gamma\sigma}(t) S_{\sigma\epsilon}(t) S_{\beta\epsilon}(t). \quad (18)$$

Подставляя выражения для Φ_{sh} и S , получим

$$K_\alpha = - \frac{2\sqrt{6\pi} G M_e}{5\sqrt{5}} \left\| \begin{array}{l} (c^2 - b^2) \text{Im} a_{21} \\ (c^2 - a^2) \text{Re} a_{21} \\ (a^2 - b^2) \text{Im} a_{22} \end{array} \right\|. \quad (19)$$

Временная зависимость a_{2m} в линейном приближении имеет вид [14]

$$a_{2m}(t) = a_{2m,i} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-4/3}. \quad (20)$$

Формула (20) применима для достаточно уединенных пиков плотности, что и должно иметь место для большинства случаев формирования ЧД.

Запишем приближенно $a^2 - b^2 \approx 2R(q_1 - q_2)$ и аналогично для $c^2 - b^2$ и $c^2 - a^2$. Уравнения (17) линейны по q , поэтому временная зависимость $q_i - q_j$ такая же, как q_1 . Примем, что вириализация объекта наступает при его сжатии по радиусу примерно вдвое, начиная от момента максимального расширения [15]. Момент вириализации t_v зависит только от δ_i , и ему соответствует $\vartheta = \pi/4$. Таким образом,

$$L_\alpha = K_{\alpha,i} t_i \int_1^{t_v/t_i} \frac{R}{R_i} \frac{q_1(t)}{q_{1,i}} \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-4/3} \left[1 + \delta_i - \left(\frac{t_i}{t}\right)^2 \left(\frac{R}{R_i}\right)^3\right] d\left(\frac{t}{t_i}\right) = K_{\alpha,i} t_i f(\delta_i). \quad (21)$$

Выражение в квадратных скобках представляет зависимость M_e от времени в формуле (19). Численным интегрированием с приемлемой для дальнейших расчетов точностью получаем

$$f(\delta_i) \approx 1.9 \cdot 10^{-2} \delta_i^{-1}. \quad (22)$$

3. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ЧД формируются вблизи пиков поля плотности

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (23)$$

Возмущения плотности предполагаются гауссовыми, их статистика определяется заданием спектра мощности $P(k)$:

$$\langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (24)$$

где $\delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ — дельта-функция Дирака, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Спектральные моменты определены как

$$\sigma_j^2 \equiv \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} P(k) k^{2j}. \quad (25)$$

Разложим (23) в степенной ряд в точке \mathbf{r}_p :

$$\delta(\mathbf{r}_p + \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_p) + \eta_i r_i + \frac{1}{2} \zeta_{ij} r_i r_j + \dots \quad (26)$$

Если \mathbf{r}_p — координаты экстремума плотности, то $\eta = 0$. Выражение для распределения концентрации максимумов поля плотности, полученное в [16] и обобщенное с учетом наличия углового момента, имеет вид

$$n(\mathbf{r}, L_{z0}, \nu_0) dL_z d\nu = |\det(\zeta_{ij})| \delta_D^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) \theta(\lambda_1) \theta(\lambda_2) \theta(\lambda_3) \delta_D(\nu - \nu_0) \delta_D(L_z - L_{z0}) dL_z d\nu, \quad (27)$$

где $\nu \equiv \delta(\mathbf{r}_p)/\sigma_0$, λ_i — собственные значения матрицы ζ_{ij} , θ — функция Хевисайда.

Нашей ближайшей целью является построение совместного распределения вероятности для величин, характеризующих поле плотности внутри сферы радиуса R с центром в точке \mathbf{r}_p , и величин, характеризующих приливные силы, т. е. переменных $\delta(\mathbf{r}_p)$, η_i , ζ_{ij} и a_{2m} либо других, которые через них выражаются. Найдем коррелятор

$$\langle \zeta_{ij} a_{2m} \rangle = C \int d\Omega_k n_i n_j Y_{2m}^*(\Omega_k), \quad (28)$$

где $n_i = k_i/k$, Ω_k — телесный угол в импульсном пространстве,

$$C \equiv \frac{\rho_b}{16\pi^5} \int_0^\infty dk k^4 P(k) \frac{kR \cos(kR) - \sin(kR)}{(kR)^3}. \quad (29)$$

В процессе расчета проводилось разложение в интеграл Фурье, для усреднения использовалась формула (24) и применялось соотношение

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = 4\pi Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k) i^l j_l(kr), \quad (30)$$

где $j_l(x)$ — сферические функции Бесселя, $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Если взять некоторые определенные линейные комбинации корреляторов (28) с фиксированным m , то соответствующие им линейные комбинации выражений $n_i n_j$ дадут сферические функции Y_{2n} . Ввиду ортогональности сферических функций таким способом можно свести к нулю большую часть корреляторов. Вид необходимых линейных комбинаций можно усмотреть из записи Y_{2n} в декартовых координатах r_1, r_2 и r_3 , заменяя $r_1 r_1$ на ζ_{11} , $r_1 r_2$ на ζ_{12} и т. п. Итак, введем новые переменные ξ :

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_0 \\ \xi_{-1} \\ \xi_{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_2} \begin{pmatrix} -(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \\ -(\zeta_1 - \zeta_2)/2 + i\zeta_6 \\ \zeta_5 + i\zeta_4 \\ -(\zeta_1 - 2\zeta_3 + \zeta_2)/2 \\ \zeta_5 - i\zeta_4 \\ (\zeta_1 - \zeta_2)/2 - i\zeta_6 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Здесь мы перешли к обозначениям $\zeta_{ij} \rightarrow \zeta_A$, $A = \overline{1,6}$: $\zeta_1 \equiv \zeta_{11}$, $\zeta_2 \equiv \zeta_{22}$, $\zeta_3 \equiv \zeta_{33}$, $\zeta_4 \equiv \zeta_{23}$, $\zeta_5 \equiv \zeta_{13}$, $\zeta_6 \equiv \zeta_{12}$. Выбор нормировочных коэффициентов осуществлен таким образом, чтобы существовало соответствие с обозначениями работы [16], некоторые результаты которой мы будем использовать в дальнейшем. Обратное преобразование запишем в виде

$$\zeta_A = \sigma_2 \sum_{n=-2}^3 U_A^{(n)} \xi_n, \quad (32)$$

где $U_A^{(n)}$ — постоянная матрица. С помощью $U_A^{(n)}$ выразим $n_i n_j$ через Y_{2n} :

$$n_i n_j = \left(\sum_{n=-2}^2 U_{ij}^{(n)} D^{(n)} Y_{2n} \right) + U_{ij}^{(3)} D^{(3)} Y_{00}, \quad (33)$$

где вектор

$$D^{(n)} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left(-\sqrt{\frac{15}{2}}; 1; -1; \frac{\sqrt{6}}{2}; 1; 1 \right). \quad (34)$$

Найдем корреляторы:

$$\langle \xi_m a_{2n} \rangle = \frac{CD^{(n)}}{\sigma_2} \delta_{mn}, \quad \langle \xi_m \xi_n^* \rangle = \frac{D^{(n)2}}{4\pi} \delta_{mn}, \quad \langle a_{2m} a_{2n}^* \rangle = \Psi \delta_{mn}, \quad (35)$$

где

$$\Psi \equiv \frac{\rho_b^2}{4\pi^4} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \left[\frac{kR \cos(kR) - \sin(kR)}{(kR)^3} \right]^2. \quad (36)$$

Для дальнейшей диагонализации матрицы корреляторов введем вместо a_{2m} новые переменные

$$v_n = \alpha(a_{2n}^* - f_n \xi_n), \quad n = -\bar{2}, \bar{2}. \quad (37)$$

Из требования $\langle v_n \xi_m^* \rangle = 0$ следует $f_n = \alpha(a_{2n} \xi_n) / \langle \xi_n \xi_n^* \rangle$. При таком выборе f_n имеем

$$\langle v_m v_n^* \rangle = \alpha^2 (\Psi - 4\pi C^2 / \sigma_2^2) \delta_{mn} = \delta_{mn}, \quad (38)$$

если взять $\alpha = (\Psi - 4\pi C^2 / \sigma_2^2)^{-1/2}$. Нормируем ξ_n : $w_n \equiv \sqrt{4\pi} \xi_n / D^{(n)}$, тогда $\langle w_m w_n \rangle = \delta_{mn}$. Совместное распределение величин v_n и w_n (пока без w_3) имеет вид

$$P_v P_w d^5 v d^5 w = (2\pi)^{-5} \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{v}^+ \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{w}^+ \vec{w} \right) d^5 v d^5 w, \quad (39)$$

крест обозначает эрмитово сопряжение, а \vec{v} и \vec{w} — векторы с компонентами соответственно v_n и w_n .

4. УГЛОВОЙ МОМЕНТ

Ввиду изотропии распределения поля плотности, функция распределения F по компонентам углового момента зависит только от модуля углового момента $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Обозначим

$$\tilde{F}(L_z^2) \equiv \int F(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) dL_x dL_y = 2\pi \int_0^\infty F(L_*^2 + L_z^2) L_* dL_*, \quad (40)$$

где $L_*^2 = L_x^2 + L_y^2$. Дифференцируя по L_z^2 , получаем

$$F(L^2) = - \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{F}(L_z^2)}{dL_z^2} \Big|_{L_*^2=L^2} \quad (41)$$

Таким образом, для нахождения полной функции распределения $F(L^2)$ достаточно знать распределение по L_z .

Введем оператор углового момента $\hat{l}_z = -i[\mathbf{r}\nabla]_z$. Сферические функции являются собственными функциями этого оператора. Тогда z -компонента момента приливных сил примет вид

$$K_z = - \int_{|\mathbf{r}|<R} d^3r \rho_b \delta(\mathbf{r}) [\mathbf{r}\nabla \phi_{sh}(\mathbf{r})]_z = -i \rho_b \int_{|\mathbf{r}|<R} d^3r \delta(\mathbf{r}) \hat{l}_z \phi_{sh}(\mathbf{r}). \quad (42)$$

Как указано в предыдущем разделе, достаточно ограничиться членами с $l = 2$. Делая замены переменных, получаем

$$\begin{aligned} K_z &= -i \frac{2\pi G \rho_b}{5} \sum_{m=-2}^2 a_{2m} \sum_{ij} \zeta_{ij} \int_{|\mathbf{r}|<R} d^3r r^2 r_i r_j \hat{l}_z Y_{2m}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \\ &= i \frac{2\pi G \rho_b R^7}{35} \sum_{m=-2}^2 \sum_{A=1}^6 \sum_{k=-2}^2 m a_{2m} \sigma_2 \xi_k U_A^{(k)} U_A^{(m)*} D^{(m)} = \\ &= -i \frac{2\pi G \rho_b R^7}{35\sqrt{4\pi}} \sum_{m=-2}^2 \sum_{A=1}^6 \sum_{k=-2}^2 \left[\frac{m}{\alpha} w_k D^{(k)} U_A^{(k)} U_A^{(m)*} D^{(m)} v_m^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{4\pi} m C}{\sigma_2} w_k D^{(k)} U_A^{(k)} U_A^{(m)*} D^{(m)} w_m^* \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Чтобы вычислить интеграл по времени от этого выражения, воспользуемся результатами разд. 2. Следует отметить, что при таком подходе мы для определения начальной величины момента приливных сил пользуемся квадратичной аппроксимацией точного профиля пика, а для нахождения временной зависимости — приближением однородного эллипсоида. Таким образом, получаем, что угловой момент равен $L_z = K_{zi} t_i f(\delta_i)$, где $f(\delta_i)$ дается формулой (22). Запишем его условно в виде

$$L_z = w_k^* E_{km} v_m + w_k^* E'_{km} w_m, \quad (44)$$

где E_{km} и E'_{km} — матрицы, не зависящие от \vec{v} и \vec{w} .

При усреднении выражения (27) возникнет следующее среднее от дельта-функции:

$$\begin{aligned} &(\delta_D(L_z - L_z(\vec{v}, \vec{w})))_{P_v} = \\ &= \int \frac{d^5v}{(2\pi)^{5/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{v}^+ \vec{v}\right) \int \frac{ds}{2\pi} \exp[is(L_z - w_k^* E_{km} v_m - w_k^* E'_{km} w_m)] = \\ &= \int \frac{ds}{2\pi} \exp\left[is(L_z - w_k^* E'_{km} w_m) - \frac{1}{2} s^2 w_k E_{km}^* E_{lm} w_l^*\right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} 2^{3/2} X y} \exp\left(-\frac{L_z^2}{16X^2 y^2}\right), \quad (45) \end{aligned}$$

где

$$X \equiv \frac{\pi^{1/2} G \rho_b R^7}{35} \left(\frac{8\pi}{15}\right)^2 (\sigma_2^2 \Psi - 4\pi C^2)^{1/2} t_i f(\delta_i). \quad (46)$$

После интегрирования по d^5v координатные оси можно направить вдоль собственных векторов матрицы ζ_{ij} , что значительно упрощает процесс интегрирования по s . В последнем равенстве в (45) мы перешли к следующим обозначениям (см. также [16]):

$$\sigma_2 x = -(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3), \quad \sigma_2 y = -(\zeta_1 - \zeta_2)/2, \quad \sigma_2 z = -(\zeta_1 - 2\zeta_3 + \zeta_2)/2, \quad (47)$$

$$\gamma \equiv \sigma_1^2/\sigma_2\sigma_0, \quad x_* \equiv \gamma\nu, \quad R_* \equiv \sqrt{3}\sigma_1/\sigma_2. \quad (48)$$

Дальнейшее статистическое усреднение выражения (27),

$$N(L_z, \nu) = \langle n(\mathbf{r}, L_z, \nu) \rangle \quad (49)$$

проводится следующим интегрированием по x, y и z (способ получения нормировочного множителя см. в [16]):

$$\begin{aligned} N(L_z, \nu, x, y, z) dL_z d\nu = \\ = \int \frac{5^{5/2} 3^{1/2}}{(2\pi)^{7/2} 2^{3/2}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^3 \frac{1}{Xy(1-\gamma^2)^{1/2}} e^{-Q} F(x, y, z) \chi dL_z d\nu dx dy dz, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$Q \equiv \frac{\nu^2}{2} + \frac{(x - x_*)^2}{2(1-\gamma^2)} + \frac{5}{2}(3y^2 + z^2) + \frac{L_z^2}{16X^2y^2}, \quad (51)$$

$$F(x, y, z) = y(x - 2z)[(x + z) - (3y)^2](y^2 - z^2). \quad (52)$$

Характеристическая функция χ задает область интегрирования:

$$\chi: \quad y \geq 0, \quad y \geq z \geq -y, \quad x + z \geq 3y. \quad (53)$$

Интегрирование по y можно выполнить аналитически. Мы не будем выписывать результат интегрирования ввиду его громоздкости.

Нас интересуют объекты с угловым моментом много меньшим среднего. Введем параметр малости

$$\varepsilon \equiv \frac{L_z^2}{16X^2} \ll 1 \quad (54)$$

и разложим выражение (50), проинтегрированное по y , в ряд по ε . Допустимость такого разложения проверяется разложением (50) по степеням x и z в точке $x = z = 0$. Ввиду дальнейшего дифференцирования (41) нулевой член разложения (не зависящий от ε) вклада не дает. Ограничимся линейным по ε членом. Интегрирование по z и x проведем численно и найдем аппроксимирующую функцию, дающую зависимость от переменных γ и x_* при изменении их величин в интересующих нас пределах. В итоге, используя (41), получаем распределение

$$N(L, \nu) dL d\nu = 2.4 \cdot 10^{-2} (1 - \gamma^2)^{0.17} \frac{x_*^{2.84}}{X^3 R_*^3} e^{-\nu^2/2} L^2 dL d\nu. \quad (55)$$

Точность аппроксимационного выражения (55) при используемых нами далее значениях входящих в него величин не хуже 20%. В следующих разделах на основе этого распределения мы исследуем статистику ЧД в ядрах галактик.

5. ФОРМИРОВАНИЕ ЧЕРНЫХ ДЫР

Основные процессы, ведущие к формированию в центрах галактик ЧД, обсуждались, в частности, в работах [5, 17, 18]. Наше рассмотрение близко к [5], за исключением того что мы использовали уравнения для самогравитирующего диска без доминирования центральной массы. Рассмотрим объект с полной массой M (темное вещество + барионы). Пусть барионное вещество составляет f_g часть массы: $M_g = f_g M$. Газовое облако быстро охлаждается благодаря как обратному комптоновскому рассеянию на фотонах реликтового излучения, так и излучению при свободно-свободных и свободно-связанных переходах. В процессе охлаждения барионное вещество опускается к центру объекта и достигает центробежного барьера на радиусе

$$r_d \simeq \frac{L^2}{GM^3 f_g}, \quad (56)$$

где L — полный угловой момент объекта массы M . Предполагается, что плотность L на единицу массы одинакова для барионов и темного вещества.

В центре объекта барионное вещество образует самогравитирующий вращающийся диск. Дальнейшее сжатие центральной области диска происходит благодаря передаче наружу углового момента. Будем предполагать, что основным фактором передачи момента является турбулентная вязкость. Обычно турбулентность характеризуют параметром $\alpha_t = v_t/v_s \sim 0.1$ [19], где v_t — скорость турбулентных пульсаций, $v_s = (5k_B T/3m_p)^{1/2}$ — скорость звука, k_B — постоянная Больцмана, m_p — масса протона.

Толщина самогравитирующего диска:

$$H_d \simeq r_d \frac{v_s^2}{v_\phi^2}, \quad (57)$$

где v_ϕ^2 — круговая скорость вращения диска. Коэффициент кинематической вязкости и характерное время сжатия равны соответственно

$$\mu \simeq \frac{\alpha_t r_d^2 v_s^3}{GM_g}, \quad t_{vis} \simeq \frac{GM_g}{\alpha_t v_s^3}. \quad (58)$$

Чтобы найти v_s , необходимо рассмотреть процесс лучистого переноса выделяющейся при сжатии гравитационной энергии наружу. Темп энерговыделения

$$\frac{dE_{grav}}{dt} \simeq E_{grav} t_{vis}^{-1} \simeq 2\pi r_d^2 \sigma T_s^4, \quad (59)$$

где $E_{grav} \simeq GM_g^2/r_d$, σ — постоянная Стефана—Больцмана, T_s — температура на поверхности диска. Связь эффективных температур в центре, T_c , и на поверхности, T_s , имеет вид $T_c^4 \sim \tau T_s^4$ [20], где $\tau = \sigma_T M_g / 2\pi r_d^2 m_p \gg 1$ — оптическая толщина плазменного диска, σ_T — томсоновское сечение.

Из выписанных соотношений можно получить время t_{vis} сжатия диска за счет вязкостной передачи углового момента. Будем считать, что ЧД формируется в том случае, если это время не превышает характерное время звездообразования [21]

$$t_* = \tilde{t} \left(\frac{M_c}{M_\odot} \right)^{-\beta}, \quad (60)$$

где M_c — характерная масса звездного зародыша. В простейшей модели $\tilde{t} \approx 5 \cdot 10^7$ лет, $\beta \approx 2.8$ [21]. Если звезды имеют стандартную функцию масс Солпитера, то следует ожидать $M_c \sim 0.5 M_\odot$. Однако условия в компактном диске существенно отличаются от условий в обычных областях звездообразования в галактиках, поэтому M_c на данной стадии развития теории следует считать свободным параметром.

Из условия $t_{vis} < t_*$ получаем $L < J$, где

$$J \left[\frac{\text{Г} \cdot \text{СМ}^2}{\text{с}} \right] = 6.1 \cdot 10^{68} \left(\frac{\alpha_t}{0.1} \right)^{4/15} \left(\frac{f_g}{0.03} \right)^{2/3} \left(\frac{\tilde{t}}{5 \cdot 10^7 \text{ лет}} \right)^{1/6} \times \\ \times \left(\frac{M_c}{M_\odot} \right)^{-\beta/6} \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right)^{23/15}. \quad (61)$$

Если выполняется обратное неравенство, то диск фрагментирует на звезды и вместо ЧД образуется звездное скопление.

Второе ограничение возникает из требования ионизованности газа после момента вириализации темного гало. В противном случае не будет происходить охлаждение и сжатие барионов. Ионизация может являться следствием вторичной ионизации Вселенной первым догалактическим поколением звезд [17, 18]. В этом случае, однако, концентрация образующихся ЧД малых масс значительно превышает наблюдательные пределы. Другой источник ионизации — разогрев газа при вириализации объекта под действием ударных волн и бурного перемешивания. Будем считать этот источник ионизации определяющим. Температуру находим из соотношения $m_p v^2/2 = 3k_B T/2$, где v — вириальная скорость. Из условия $T > T_{ion} \sim (1 \div 5) \cdot 10^4$ К получаем

$$\delta_i \equiv \delta_i(1 + z_i) > \frac{27}{5\sqrt{2}} \frac{k_B T_{ion}}{m_p} \left(\frac{t_0}{GM} \right)^{2/3}, \quad (62)$$

где T_{ion} — температура ионизации, t_0 — настоящий момент времени, $1 + z_i \equiv (t_0/t_i)^{2/3}$.

Формирование ЧД мы исследовали в рамках простой модели без подробного рассмотрения внутренней структуры и эволюции диска. Выбор такой модели обусловлен отсутствием подробных исследований реальных моделей самогравитирующих дисков. Например, в работе [22] найдено автомодельное решение для эволюции изотермического диска в пределе слабой аккреции и при условии, что $\mu(r)H_d(r)/r = \text{const}$. Полученное решение правильно отражает некоторые качественные моменты эволюции диска, однако использование количественных результатов работы [22] вряд ли оправдано в реальной ситуации. Для точного решения задачи, возможно, потребуются сложные трехмерные гидродинамические расчеты с учетом тепловых процессов. Для дальнейших расчетов нам важен сам факт наличия максимального значения углового момента. При количественных оценках будем использовать результаты, полученные в рамках приведенной выше модели.

6. СПЕКТР МАСС ЧЕРНЫХ ДЫР

В разд. 3 и 4 спектр мощности $P(k)$ предполагался произвольным. Для конкретных расчетов будем использовать спектр, возникающий в модели с холодной темной

материей при постоянной Хаббла $H = 75 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$ [16]:

$$P(k) = \frac{a[\ln(1 + 4.164k)]^2}{k(1 + 6.947k + 828.9k^2 + 925.4k^3 + 20710k^4)^{1/2}}, \quad (63)$$

где k берется в сопутствующих координатах и в единицах Мпк^{-1} . Нормировочная постоянная $a \approx 2.13 \cdot 10^5$ выбирается, как обычно, из требования, чтобы относительная флуктуация массы в масштабе 8 Мпк составляла единицу.

Сгладим поле плотности с помощью двух фильтров:

$$\delta_R(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{r}_1) W_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) W_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (64)$$

где

$$W_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta\left(1 - \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{R}\right), \quad W_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi \tilde{R}^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|^2}{2\tilde{R}^2}\right). \quad (65)$$

Использование фильтра W_1 позволяет непосредственно интерпретировать $\nu\sigma_0$ как плотность, усредненную по шару радиуса R . Именно эта величина определяет момент коллапса и в разд. 2 (формула (22)) обозначена как δ_i . В окончательных расчетах мы переходим к сопутствующим координатам и выражаем все величины через величины в настоящий момент t_0 . Гауссов фильтр W_2 с $\tilde{R} = R/10^{1/3}$ имеет лишь техническое значение и позволяет избежать проблем с быстрыми осцилляциями подынтегрального выражения при численном вычислении величин σ_j . Ввиду того что в W_2 сглаживание проводится по массе $M/10 \ll M$, наличие фильтра W_2 слабо влияет на результат.

Используемый в расчетах параметр малости ε (54) при изменении массы в пределах $10^7 M_\odot < M_h < 5 \cdot 10^{11} M_\odot$ не превосходит $5 \cdot 10^{-4}$, что оправдывает сделанное предположение (54). Набранный объектом угловой момент зависит от ориентации его квадрупольного момента относительно внешнего распределения плотности. Однако, как показывает расчет, эти величины коррелируют слабо. Действительно, их взаимная корреляция в (46) характеризуется величиной $4\pi C^2$. Для рассматриваемых нами масс отношение $4\pi C^2/\sigma_2^2 \Psi < 1/700$. Таким образом, внешнее распределение плотности можно считать статистически независимым от внутреннего. Объяснением данного факта является, по-видимому, статистическая независимость флуктуаций разных масштабов. Об этом же свидетельствуют результаты работы [13], где получено, что приливные силы, генерируемые сферическими слоями радиусов r и $2r$, антикоррелируют, а основной вклад дают флуктуации плотности, удаленные от объекта радиуса R на расстояние $5R$ и соответствующие массе $5^3 M$.

В исследованиях иерархического механизма формирования крупномасштабной структуры Вселенной известна проблема «облако в облаке» [23]. Она состоит в том, что объект массы M_1 в более поздний момент времени может войти в состав объекта массы $M_2 > M_1$. В связи с этим возникает задача вычисления концентрации независимых объектов. Формулу (55) естественно интерпретировать как концентрацию объектов с массой $> M$. Для вычисления распределения по M необходимо продифференцировать (55) по M . Зависимость от ν в формуле (55) имеет вид $\nu^{5.84} \exp(-\nu^2/2)$; эта функция достигает максимума при $\nu \approx 2.4$ в соответствии с тем, что ЧД образуются из относительно высоких пиков плотности. Итоговое распределение дается формулой

$$\phi(M)dM = dM \int_0^J dL \frac{d}{dM} \int_{\bar{\delta}/\sigma_0}^{\infty} d\nu N(L, \nu), \quad (66)$$

где $\bar{\delta} \equiv \max\{\delta_c, \delta_l\}$. Значение $\delta_c = 1.69$ соответствует коллапсу в настоящий момент времени. Для перехода к распределению по массам ЧД $M_h = f_g M$ необходимо сделать соответствующую замену переменных:

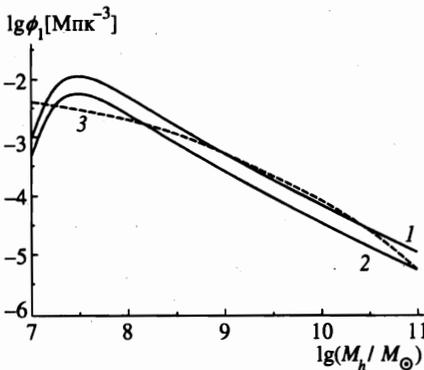
$$\phi_1(M_h)d(\ln M_h) = \phi(M_h/f_g)d(M_h/f_g).$$

Результат вычислений показан на рисунке. Для сравнения штриховой кривой 3 изображено предполагаемое распределение, полученное в работе [7] на основе наблюдательных данных. Различие кривых можно отнести на счет неточности наблюдений или последующей трансформации функции масс. Рисунок демонстрирует возможные направление и величину такой трансформации. Любопытно отметить, что в области масс $M_h > 10^8 M_\odot$ начальный спектр ЧД по формуле (66) близок к степенному: $\phi \propto M^{-1.84}$.

Величина (66) пропорциональна следующей комбинации параметров нашей модели:

$$\left(\frac{\alpha_t}{0.1}\right)^{4/5} \left(\frac{f_g}{0.03}\right)^2 \left(\frac{\bar{t}}{5 \cdot 10^7 \text{ лет}}\right)^{1/2} \left(\frac{M_c}{M_\odot}\right)^{-\beta/2}. \quad (67)$$

Для определенности все параметры, кроме M_c , зафиксируем равными нормировочным величинам в (67). Тогда в зависимости от величины массы соотношение начальной функции масс и распределения [7] может быть понято следующим образом. Из рисунка видно, что если $M_c \approx 0.3 M_\odot$, то рассчитанная функция масс достаточно хорошо воспроизводит распределение из [7] при $5 \cdot 10^8 M_\odot < M_h < 5 \cdot 10^{10} M_\odot$. Отметим, что именно в этом диапазоне масс зарегистрировано наибольшее число ЧД. Статистика вне указанного диапазона недостаточно полна. Различие распределений может быть также связано с наблюдательной селекцией при малых массах ЧД. Если $M_c > 0.3 M_\odot$, то при малых массах начальная функция масс также существенно больше получаемой из наблюдений величины [7], но при больших массах она существенно меньше этой функции. Процессы, которые могут приводить к подобной трансформации, указаны во Введении — это рост масс ЧД в результате их слияний и в результате аккреции. В иерархической картине формирования крупномасштабной структуры Вселенной каждая



Распределение ϕ_1 ЧД в ядрах галактик по массам. Линиями 1 и 2 показаны результаты расчетов по формуле (66) соответственно при $M_c = 0.3 M_\odot$ и $M_c = 0.5 M_\odot$. Для сравнения штриховой кривой 3 изображено распределение, полученное в работе [7]

галактика за время своего существования могла испытать до десяти слияний с другими галактиками.

Похожая картина трансформации функции масс получена нами на основе сопоставления наблюдательной оценки распределения ЧД по массам и распределения квазаров по светимостям и красным смещениям. Принципиальное значение имеет вопрос о длительности t_q стадии эддингтоновской аккреции. При $t_q \ll t_{Ed}$ (t_{Ed} — эддингтоновское время) массы ЧД после их образования почти не меняются. Напротив, при $t_q \geq t_{Ed}$ массы значительно возрастают и наблюдаемый в настоящее время спектр масс ЧД сильно отличается от спектра масс образующихся ЧД. Расчеты показывают, что почти все ЧД с массами $M > 3 \cdot 10^8 M_\odot$ возникли из менее массивных ЧД в результате аккреции вещества. Концентрацией изначально образующихся ЧД с массами $M > 3 \cdot 10^8 M_\odot$ можно пренебречь по сравнению с концентрацией ЧД, перешедших в этот диапазон со стороны меньших масс.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку по грантам № 96-15-96614 и № 96-02-16670.

Литература

1. R. P. Van Der Marel, in *Proceedings IAU Symposium 186*, Kioto, August 1997, ed. by D. B. Sanders and J. Barnes, Kluwer Academic Publishers, (in press); E-prints archive, astro-ph/9712076.
2. J. Magorrian, S. Tremaine, D. Richstone et al., *Astron. J.* **115**, 2285 (1998).
3. M. J. Rees, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **22**, 471 (1984).
4. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, *ЖЭТФ* **97**, 20 (1990).
5. D. J. Eisenstein and A. Loeb, *Astrophys. J.* **443**, 11 (1995).
6. J. Kormendy and D. Richstone, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **33**, 581 (1995).
7. P. Salucci, E. Szuszkiewicz, P. Monaco, and L. Danese, E-prints archive astro-ph/9811102.
8. M. G. Haehnelt and M. J. Rees, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **263**, 168 (1993); E-prints archive astro-ph/9712259.
9. H. Susa, M. Sasaki, and T. Tanaka, *Prog. Theor. Phys.* **92**, 961 (1994).
10. D. S. Krivitsky and V. M. Kontorovich, E-prints archive astro-ph/9801195.
11. M. G. Haehnelt, E-prints archive astro-ph/9809328.
12. D. J. Eisenstein and A. Loeb, *Astrophys. J.* **439**, 520 (1995).
13. T. Quinn and J. Binney, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **255**, 729 (1992).
14. B. S. Ryden, *Astrophys. J.* **329**, 589 (1988).
15. Ф. Дж. Э. Пиблс, *Структура Вселенной в больших масштабах*, Мир, Москва (1983).
16. J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
17. A. Loeb, *Astrophys. J.* **403**, 542 (1993).
18. A. Loeb and F. A. Rasio, *Astrophys. J.* **432**, 52 (1994).
19. N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *Astron. Astrophys.* **24**, 337 (1973).
20. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Физматгиз, Москва (1963).
21. В. Г. Сурдин, *Рождение звезд*, УРСС, Москва (1997).
22. S. Mineshige and M. Umemura, *Astrophys. J.* **480**, 167 (1997).
23. J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser, *Astrophys. J.* **379**, 440 (1991).