

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ДВУМЕРНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

А. А. Жмудский, Б. А. Иванов\*

*Институт магнетизма Национальной академии наук Украины  
252680, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 19 августа 1998 г.

Показано, что для широкого класса двумерных моделей анизотропных ферромагнетиков можно построить стабильные динамические солитоны типа скирмионов. Эти солитоны стабилизируются за счет сохранения различных интегралов движения:  $z$ -проекции полного спина  $S_z$  или орбитального момента поля намагниченности  $L_z$ . Для чисто одноосной модели (как в смысле спиновых, так и пространственных вращений) с максимальной симметрией можно указать класс двухпараметрических солитонов с достаточно сложной (почти периодической) динамикой поля намагниченности. Для ферромагнетиков с более низкой симметрией (сохраняется только  $S_z$ , или  $L_z$ , или полный момент импульса  $J_z = L_z + S_z$ ) существуют стабильные солитоны с периодической динамикой намагниченности.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные возбуждения — топологические магнитные солитоны (см. [1]) — играют важную роль в физике низкоразмерных магнетиков [2, 3]. В частности, известен вклад магнитных вихрей в физические свойства двумерных магнетиков с непрерывным вырождением основного состояния [4–6] (см. также [2, 3]). В двумерных магнетиках с дискретным вырождением основного состояния, т. е. в магнетиках с анизотропией типа легкая ось (или ромбических) решения типа вихрей невозможны. Для этих магнетиков существен учет локализованных, стабильных (достаточно долго живущих) двумерных солитонов [2, 3]. Согласно экспериментам [7, 8], они определяют релаксацию магнитных возмущений и могут приводить к появлению пиков в функциях отклика [9]. Такие топологические (нетривиальная гомотопическая группа  $\pi_2$ ) статические солитоны для двумерных изотропных магнетиков были построены Белавиным и Поляковым [10]. Они характеризуются нетривиальными топологическими свойствами относительно отображения плоскости двумерного магнетика  $xy$  на сферу  $S^2$ :  $m^2 = 1$ , где  $m$  — нормированная намагниченность ферромагнетика (см. [1–3]). В последние годы интерес к таким состояниям еще более возрос в связи с их применением к описанию квантового эффекта Холла [11].

Основная проблема, возникающая в солитонной физике двумерных магнетиков, связана со стабильностью локализованных солитонов. Согласно теореме Хобарта—Деррика [12], для моделей нелинейных полей, энергия которых зависит от компонент поля и квадратична по градиентам компонент поля (см. ниже (1)), не существует стабильных статических неоднородных солитонов с конечной энергией и конечным ра-

\*E-mail: vbaryakhtar@bitp.kiev.ua

диусом (солитоны нестабильны относительно коллапса). В частности, это справедливо для модели одноосного двумерного ферромагнетика, который характеризуется энергией вида:

$$W = \frac{1}{2} \int d^2x \{A(\nabla\mathbf{m})^2 + K(m_x^2 + m_y^2)\} \quad (1)$$

где  $A$  — константа обменного взаимодействия,  $K$  — константа анизотропии, ось  $z$  выбрана вдоль оси легкого намагничивания ферромагнетика. Точные решения Белавина—Полякова [10] для модели (1) существуют только в изотропном случае ( $K = 0$ ). Отметим, что модель (1) с анизотропией ( $K \neq 0$ ) принципиально отличается от изотропного случая ( $K = 0$ ). В изотропной модели задача является масштабно-инвариантной, описывается уравнением самодуальности и в статическом случае является точно интегрируемой [10].

Ее простейшее решение описывает солитон с топологическим зарядом  $\nu$ . В угловых переменных для вектора намагниченности ( $m_z = \cos\theta$ ,  $m_x + im_y = \sin\theta \exp(i\varphi)$ ) оно имеет вид [10]

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \left(\frac{R}{r}\right)^\nu, \quad \varphi = \nu\chi + \varphi_0, \quad (2)$$

где  $r, \chi$  — полярные координаты в плоскости магнетика,  $R$  и  $\varphi_0$  — произвольные константы. Энергия такого солитона в обменном приближении определяется формулой

$$E_n^{(0)} = E_0|\nu|, \quad E_0 = 4\pi A. \quad (3)$$

Тот факт, что энергия не зависит от  $R$ , обусловлен масштабной инвариантностью модели (1) при  $K = 0$ . При учете анизотропии (в частности, такого типа, как в (1)), а также зеемановской энергии  $w_H \sim (1 - \cos\theta)H$  во внешнем поле  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$  в выражении для энергии солитона возникает слагаемое, пропорциональное  $R^2$ , энергия не имеет минимума при любом  $R \neq 0$ . Это означает отсутствие статических солитонных решений. Иногда об этом факте говорят как о неустойчивости солитона относительно коллапса.

Однако для ряда моделей могут существовать динамические стационарные, стабильные солитоны, см. [1, 2, 12]. Их существование обусловлено, в конечном счете, наличием некоторого интеграла движения, значение которого не обращается в нуль в статическом случае [1–3, 12]. В частности, для одноосного ферромагнетика (1) существование таких солитонов может быть обусловлено сохранением  $z$ -проекции полного спина  $S_z$  [1–3] или  $z$ -проекции орбитального момента поля намагниченности  $L_z$  [13, 14]. Поскольку в солитоне при  $\nu > 0$  величина  $L_z$  отрицательна (см. [1, 2]), удобно пользоваться величиной  $L = -L_z$ . В единицах постоянной Планка  $\hbar$  (далее мы считаем  $\hbar = 1$ ) величины  $S = S_z$  и  $L$  выражаются формулами (см. [1–3]):

$$L = -L_z = \frac{s}{a^2} \int d^2x (1 - \cos\theta) [r\nabla\varphi]_z, \quad S = \frac{s}{a^2} \int d^2x (1 - \cos\theta), \quad (4)$$

где  $s$  — спин атома,  $a$  — постоянная решетки.

Еще один естественный интеграл движения — импульс  $\mathbf{P}$  — может приводить к стабилизации трехмерных солитонов с ненулевым индексом Хопфа [15], двумерных топологических солитонов в антиферромагнетиках [16], а также нетопологических двумерных

солитонов типа скирмион-антискирмионных пар в изотропном [17] и легкоплоскостном ферромагнетике. Однако сохранение  $P$  не приводит к стабилизации двумерных топологических солитонов в ферромагнетике, поэтому мы рассмотрим стабилизацию солитонов только за счет сохранения момента импульса (4).

Мы рассмотрим модель (1) с максимально допустимой симметрией (сохраняются обе величины  $L$  и  $S$ ), а также модели с более низкой симметрией, например, описываемые энергией вида

$$W = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} A_{ik} \nabla_i \mathbf{m} \nabla_k \mathbf{m} + W_a(m_x, m_y) \right\}. \quad (1')$$

Здесь вид тензора обменных постоянных  $A_{ik}$  и энергии анизотропии  $W_a$  определяется симметрией магнетика. В зависимости от формы  $A_{ik}$  и  $W_a$  может сохраняться либо  $S$  (если  $W_a = W_a(\theta)$ ), либо  $L$  (если  $A_{ik} \propto \delta_{ik}$ ). Мы обсудим также модель, в которой  $L \neq \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ , но сохраняется  $z$ -проекция полного момента импульса  $J = L_z + S_z = S - L$ . Проведенный анализ показал, что для всех перечисленных случаев при наличии хотя бы одного интеграла движения  $L$ ,  $S$  или  $J$  существуют стабильные динамические солитоны, а для наиболее симметричной модели (1) — солитоны с почти периодической динамикой намагниченности.

## 2. ВИД ДИНАМИЧЕСКИХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

Солитоны определяются локализованными ( $\theta \rightarrow 0$ ,  $\nabla\theta \rightarrow 0$  при  $|r| \rightarrow \infty$ ) решениями уравнения Ландау—Лифшица. В угловых переменных для вектора намагниченности оно имеет вид системы двух нестационарных уравнений в частных производных для функции  $\theta = \theta(x, y, t)$ ,  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ . Для модели (1'):

$$\begin{aligned} A_{ik} [\nabla_i \nabla_k \theta - \sin \theta \cos \theta (\nabla_i \varphi) (\nabla_k \varphi)] - \frac{\partial W_a}{\partial \theta} &= -\frac{M_0}{\gamma} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ A_{ik} \nabla_i (\sin^2 \theta \nabla_k \varphi) - \frac{\partial W_a}{\partial \varphi} &= \frac{M_0}{\gamma} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\gamma = 2|\mu_B|/\hbar$ ,  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $M_0$  — намагниченность насыщения. Для модели (1)  $W_a = K \sin^2 \theta$  и не зависит от  $\varphi$ ,  $A_{ik} \propto \delta_{ik}$ .

Обсудим возможный вид динамических стационарных решений уравнений (5). Характер распределения намагниченности в таком солитоне и ее зависимость от времени можно указать, не решая динамических уравнений для намагниченности, а исходя только из симметрии задачи, см. рис. 1. Прежде всего, отметим, что группа симметрии энергии (1) включает повороты спинов вокруг оси  $z$  и, независимо, поворот координатных осей  $x, y$ . Наличие некоторой непрерывной симметрии приводит к появлению соответствующего интеграла движения. В частности, возможность спиновых вращений имеет место для всех магнетиков с  $W_a = W_a(\theta)$ . Эта симметрия приводит к сохранению  $S$ . Если  $W_a = W_a(\theta)$ , уравнения (5) не содержат  $\varphi$ , и возможно существование прецессионных солитонов, которые имеют вид [1–3]

$$\theta = \theta(x, y), \quad \varphi = \omega_p t + \psi(x, y). \quad (6)$$

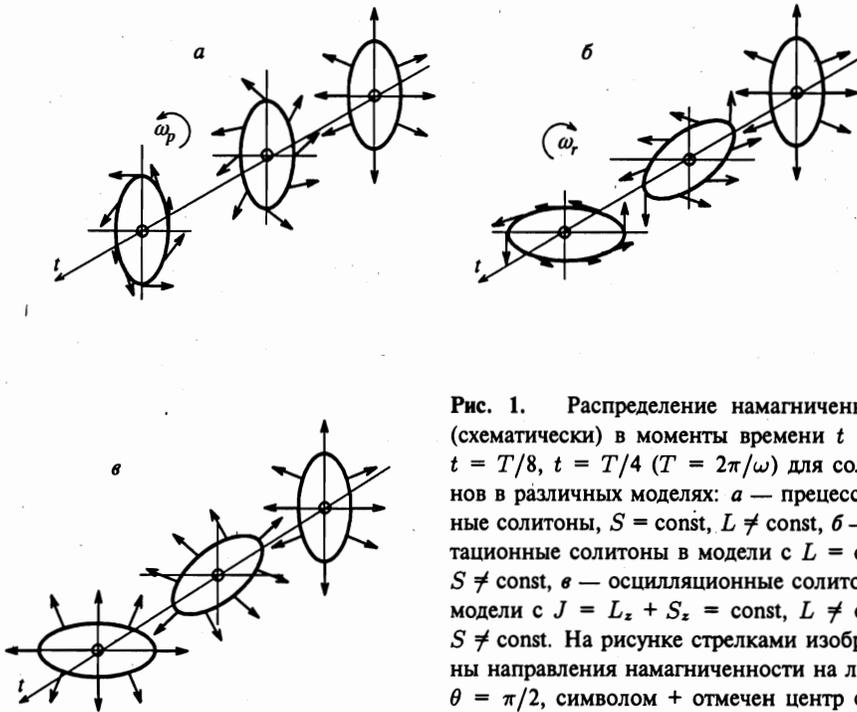


Рис. 1. Распределение намагниченности (схематически) в моменты времени  $t = 0$ ,  $t = T/8$ ,  $t = T/4$  ( $T = 2\pi/\omega$ ) для солитонов в различных моделях: *a* — прецессионные солитоны,  $S = \text{const}$ ,  $L \neq \text{const}$ , *б* — ротационные солитоны в модели с  $L = \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ , *в* — осцилляционные солитоны в модели с  $J = L_z + S_z = \text{const}$ ,  $L \neq \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ . На рисунке стрелками изображены направления намагниченности на линии  $\theta = \pi/2$ , символом + отмечен центр солитона, в котором  $\theta = \pi$

Здесь  $\theta(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  определяются уравнениями, не содержащими производных по времени, в силу чего солитон типа (6) является динамическим, но стационарным. Инвариантность задачи относительно поворота координатных осей при  $A_{ik} = A\delta_{ik}$  в (1'), (5) ведет к сохранению  $z$ -проекции орбитального момента  $L$  и может приводить к существованию ротационных солитонов (рис. 1б) [13, 14]. Этому солитону отвечает динамическое, но стационарное во вращающейся системе координат

$$\tilde{x} = x \cos \omega_r t - y \sin \omega_r t, \quad \tilde{y} = x \sin \omega_r t + y \cos \omega_r t \tag{7}$$

решение уравнения Ландау—Лифшица вида

$$\theta = \theta(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \varphi = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{8}$$

Ранее обсуждались лишь однопараметрические солитоны типа (6) или (8). Однако понятно, что для модели (1) с максимально допустимой симметрией можно рассмотреть двухпараметрическое решение вида

$$\theta = \theta(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \varphi = \omega_p t + \psi(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{9}$$

где  $\omega_p$  и  $\omega_r$  — два независимых параметра. В этом случае при  $n\omega_r \neq m\omega_p$ , ( $n, m$  — целые числа) намагниченность является почти периодической функцией времени.

Легко видеть, что при использовании подстановок (6)–(9) нестационарное уравнение Ландау—Лифшица при определенной симметрии энергии может стать (во вращающейся системе координат  $\tilde{x}, \tilde{y}$ ) стационарным. Определив полярные координаты

$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ ,  $\tilde{\chi} = \text{arctg}(\tilde{y}/\tilde{x})$  и учитывая, что  $d\tilde{\chi}/dt = \omega_r$ , правые части (5) легко записать в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_p + \omega_r \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\chi}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega_r \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\chi}}. \quad (10)$$

Анализ (8)–(10) позволяет наглядно объяснить возможность использования той или иной подстановки для различных моделей ферромагнетиков. В частности, в модели (1) плотность энергии ферромагнетика не зависит от угловой переменной  $\varphi$  (см. ниже формулу (16)), а также (поскольку  $A_{ik} \propto \delta_{ik}$ ) от координаты  $\tilde{\chi}$ . Ясно, что в этом случае подстановка общего вида (9) приводит к стационарному уравнению для функций  $\theta(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Если разрушена инвариантность системы относительно спиновых вращений, т. е. энергия явно зависит от  $\varphi$  ( $L = \text{const}$ , но  $S \neq \text{const}$ ), то возможны только ротационные солитоны (8) с  $\omega_p = 0$ . Для магнетика с  $L \neq \text{const}$ , но  $S = \text{const}$  (например, при  $W_a = W(\theta)$ , но  $A_{xx} \neq A_{yy}$ ), энергия явно зависит от  $\chi$ . В этом случае допустимы только прецессионные солитоны (6) с  $\omega_r = 0$ .

Если модель такова, что возможен только одновременный поворот в спиновом и координатном пространстве, то сохраняется только полный момент  $J = S - L$ . Солитоны для физически содержательной модели магнетика, в которой  $S \neq \text{const}$ ,  $L \neq \text{const}$  но  $J = S - L = \text{const}$ , были рассмотрены в работе [18] на основе прямого численного моделирования. В энергии такого магнетика, записанной в полярных координатах, есть слагаемые, зависящие от  $(\varphi - \chi)$ . Ясно, что в этом случае естественно использовать подстановку (10) с  $\omega_p = \omega_r$ , что приводит к солитону типа приведенного на рис. 1в. Для этого случая величина  $(\varphi - \chi)$  не зависит явно от времени во вращающейся системе координат.

Важно отметить, что для модели (1) всегда существует простое центрально-симметричное решение  $\theta = \theta_0(r)$ ,  $\varphi = \nu\chi + \varphi_0$ , где  $\nu$  — топологический заряд,  $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ . В этом случае выражения (6) и (8) фактически совпадают, уравнение (10), содержащее  $\delta W/\delta \varphi$ , превращается в тождество, а функция  $\theta_0(r)$  определяется уравнением в обыкновенных производных, см. [1–3],

$$\frac{d^2 \theta_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta_0}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) \sin \theta_0 \cos \theta_0 = (\Omega_p + \Omega_r) \sin \theta_0, \quad (11)$$

где  $x = r/\Delta$ ,  $\Omega_p = \omega_p/\omega_0$ ,  $\Omega_r = \omega_r/\omega_0$ ;  $\Delta = \sqrt{A/K}$  и  $\omega_0 = 2\gamma K/M_0$  — характерная длина и частота естественного ферромагнитного резонанса в поле анизотропии  $H_a = 2K/M_0$ ,  $M_0$  — намагниченность насыщения. Для центрально-симметричного солитона различие между прецессионными и ротационными солитонами исчезает. Для этого солитона при  $\nu = 1$  значение  $S = L$  и  $J = 0$  [1–3], и в уравнение (11) входит только сумма частот  $\omega_p$  и  $\omega_r$ .

Если в этом уравнении опустить анизотропию (последнее слагаемое в левой части) и положить  $\Omega_{p,r} = 0$ , то легко получается уравнение самодуальности  $d\theta_0/dx = -(\nu/x) \sin \theta_0$ , решение которого дает солитон Белавина—Полякова (2) (далее мы будем рассматривать только солитон с  $\nu = 1$ , обладающий наименьшей энергией). При учете эффектов анизотропии уравнение (11) легко может быть проинтегрировано методом стрельбы.

Таким образом, структура центрально-симметричного солитона может быть легко исследована, см. [1, 2]. Однако мы покажем, что наибольший интерес представляют

солитоны без центральной симметрии. Только такие солитоны существуют для магнетиков с анизотропией в базисной плоскости. Кроме того, такие несимметричные солитоны реализуются даже для наиболее симметричной модели (1).

Исследование солитонных решений, не обладающих центральной симметрией, значительно сложнее. Структура солитона определяется двумя нелинейными уравнениями (5) с учетом (9) в частных производных для функций  $\theta(r, \chi)$  и  $\psi(r, \chi)$ . Общего метода анализа локализованных решений таких уравнений и их устойчивости не существует. Солитонные решения могут строиться численно методами молекулярной динамики, но это требует длительной работы компьютера [18]. Для анализа структуры и устойчивости солитона весьма эффективными оказались прямые вариационные методы [14].

### 3. МЕТОД АНАЛИЗА И УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОНА

Уравнения для  $\theta(r, \chi)$  и  $\varphi(r, \chi)$  могут быть получены как условие экстремальности вспомогательного функционала  $\mathcal{L}\{\theta, \varphi\} = W - \omega_r L - \omega_p S$ ,  $W$  — энергия ферромагнетика. Мы будем исходить из выражения:

$$\mathcal{L}\{\theta, \varphi\} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} A [(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2] + \frac{1}{2} K \sin^2\theta + \Delta W(\theta, \varphi) - \frac{M_0}{\gamma} (1 - \cos\theta) [\omega_p + \omega_r(\partial\varphi/\partial\chi)] \right\}. \quad (12)$$

Здесь первые два слагаемых представляют энергию (1) в угловых переменных, последнее определяет динамическую часть. Слагаемое  $\Delta W(\theta, \varphi)$  представляет добавку в энергию ферромагнетика, понижающую его динамическую симметрию, и описывает разрушение некоторого интеграла движения.

Заметим, что при учете выражений (6), (9) или (10) функционал  $\mathcal{L}$  совпадает с лагранжианом ферромагнетика, и поэтому решения уравнения Ландау—Лифшица вида (6)–(9) являются и экстремалами функционала  $\mathcal{L}$ . С другой стороны, из (12) следует, что солитон отвечает условному экстремуму энергии при заданных  $L$  и  $S$ . Величины  $\omega_r$  и  $\omega_p$  имеют смысл множителей Лагранжа.

Таким образом, анализ структуры солитона сводится к поиску экстремалей функционала  $\mathcal{L}\{\theta, \varphi\}$ . Для простоты будем считать, что  $\mathcal{L}$  зависит не от непрерывных функций  $\theta(r, \chi)$ ,  $\varphi(r, \chi)$ , а от набора большого, но конечного числа дискретных параметров  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Такое упрощение не является принципиальным. Фактически, мы будем искать экстремум  $\mathcal{L}$  на классе пробных функций, зависящих от произвольного числа параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , но для общего анализа, проведенного в этом разделе, происхождение параметров  $a_i$  несущественно. В частности, такая ситуация возникает при анализе дискретных моделей на большой, но конечной решетке. Кроме того, для системы конечного размера можно рассматривать  $a_i$  как коэффициенты разложения решений по какому-то полному набору функций. При этом в силу экспоненциального убывания решения вдали от солитона параметры  $a_i$  с большими  $i$  несущественны.

Если состояние магнетика описывается  $n$  параметрами  $a_i$ , то  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n, \omega_p, \omega_r)$  и условие экстремума имеет вид системы  $n$  алгебраических уравнений  $\partial\mathcal{L}/\partial a_i = 0$ . Найдя их решение  $a_i^{(0)}$ , можно вычислить значения интегралов движения  $E, S, L$ , характеризующих солитон при данных  $\omega_r$  и  $\omega_p$ . Исключая параметры

$\omega_r$  и  $\omega_p$ , можно построить зависимость  $E = E(L, S)$ . Легко показать, что выполняются соотношения

$$\frac{\partial E(L, S)}{\partial L} = \omega_r, \quad \frac{\partial E(L, S)}{\partial S} = \omega_p. \quad (13)$$

Заметим, что речь идет именно о поиске экстремума, а не обязательно минимума. Конечно, устойчивому солитону должен отвечать минимум энергии при фиксированных значениях интегралов движения  $L$  и  $S$ . Однако в используемом нами методе множителей Лагранжа вспомогательный функционал (лагранжиан)  $\mathcal{L}$  может и не иметь минимума. Действительно, ниже мы убедимся в том, что динамическим солитонам в ферромагнетиках (как устойчивым, так и неустойчивым) отвечает седловая точка функционала  $\mathcal{L}$ . Таким образом, вопрос о стабильности солитонов является весьма нетривиальным. К счастью, он может быть проанализирован в общем виде, а условие устойчивости может быть выражено через интегральные характеристики солитонов.

Для анализа устойчивости воспользуемся прямым методом Ляпунова (см. [19]), в соответствии с которым солитон стабилен, если существует функционал Ляпунова  $\Lambda\{\theta, \varphi\}$  такой, что 1) он положительно определен вблизи солитонного решения; 2) его производная по времени, найденная с учетом уравнений движения, отрицательна или равна нулю. Возьмем функционал Ляпунова в виде комбинации интегралов движения:

$$\Lambda = \mathcal{L} + \frac{1}{2}B_1(L - L_0)^2 + B_2(S - S_0)(L - L_0) + \frac{1}{2}B_3(S - S_0)^2, \quad (14)$$

где  $L_0$  и  $S_0$  суть значения  $L$  и  $S$  для солитона,  $B_1, B_2, B_3$  — константы, тогда условие 2) выполняется в виде  $d\Lambda/dt = 0$ . Функционал Ляпунова  $\Lambda$  в виде билинейной комбинации интегралов движения был выбран ранее для анализа устойчивости нетопологических магнитных солитонов [19] и ротационных однопараметрических солитонов в ромбических ферромагнетиках [14]. При этом оказалось, что если в некоторой области  $\Lambda < 0$ , то солитон неустойчив. Мы показали, что это условие неустойчивости справедливо и в данном случае (описывающий неустойчивость функционал Четаева, выбирается в том же виде, что и в [19]). Таким образом, солитоны устойчивы при выполнении условия  $\Lambda > 0$ , а нарушение этого условия свидетельствует об их неустойчивости.

Для анализа условия устойчивости ( $i$ ) исследуем  $\Lambda$  при малых отклонениях параметров  $a_i$  от  $a_i^{(0)}$ . Вводя  $\alpha_i = a_i - a_i^{(0)}$ , запишем значение функционала в квадратичном приближении по  $\alpha_i$ :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \mathcal{L}_{ik} \alpha_i \alpha_k + \frac{1}{2} B_1 \left( \sum_i L_i \alpha_i \right)^2 + B_2 \left( \sum_i L_i \alpha_i \right) \left( \sum_i S_i \alpha_i \right) + \frac{1}{2} B_3 \left( \sum_i S_i \alpha_i \right)^2, \quad (15)$$

где  $\mathcal{L}_{ik} = \partial^2 \mathcal{L} / \partial a_i \partial a_k$ ,  $L_i = \partial L / \partial a_i$ ,  $S_i = \partial S / \partial a_i$ . Приведем матрицу  $\mathcal{L}_{ik}$  к диагональному виду,  $\mathcal{L}_{ik} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Собственные значения  $\varepsilon_i$  квадратичной формы  $\Lambda$  определяются детерминантом системы линейных уравнений для  $\alpha_i$ :

$$(\varepsilon_i - \lambda_i) \alpha_i + \left( \sum_j L_j \alpha_j \right) (B_1 L_i + B_2 S_i) + (B_2 L_i + B_3 S_i) \left( \sum_j S_j \alpha_j \right) = 0. \quad (16)$$

Домножая эти уравнения на  $L_i/(\lambda_i - \varepsilon_i)$  и  $S_i/(\lambda_i - \varepsilon_i)$  и выполняя суммирование по  $i$ , можно записать уравнение для  $\varepsilon_i$  в виде условия разрешимости системы двух линейных уравнений для  $(\sum_j L_j \alpha_j)$  и  $(\sum_j S_j \alpha_j)$ . Далее надо рассмотреть большие значения,  $B_i \gg 1$  [19, 20], в основном приближении по  $1/B$  это условие можно представить в виде

$$F(\varepsilon) = \left( \sum_i \frac{S_i^2}{(\varepsilon_i - \lambda)} \right) \left( \sum_i \frac{L_i^2}{(\varepsilon_i - \lambda)} \right) - \left( \sum_i \frac{L_i S_i}{(\varepsilon_i - \lambda)} \right)^2 = 0. \quad (17)$$

Вид функции  $F(\varepsilon)$  практически такой же, как и в случае одного интеграла движения [14, 19, 20], а именно:  $F(\varepsilon) \rightarrow +0$  при  $\varepsilon \rightarrow -\infty$ , и при значениях  $\varepsilon$  близких  $\lambda_i$  ( $\lambda_i$  — собственным значениям матрицы  $\mathcal{L}_{ik}$ )  $F(\varepsilon)$  имеет полюсы вида  $F \simeq A/(\varepsilon - \lambda_i)$ ,  $A > 0$ . Следовательно, собственные значения  $\Lambda(\varepsilon_i)$  лежат между  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ . Поэтому, если матрица  $\mathcal{L}_{ik}$  имеет два или более отрицательных собственных значения, одно из значений  $\varepsilon < 0$  и условие 1) теоремы Ляпунова оказывается невыполненным. В этом случае можно построить функционал Четаева [14], что означает, что солитон неустойчив. Если же только одно собственное значение  $\lambda_i$  отрицательно, то устойчивость определяется знаком  $F(0)$ : при  $F(0) > 0$  одно значение  $\varepsilon < 0$ , а при  $F(0) < 0$  все значения  $\varepsilon$  положительны и солитон устойчив (см. рис. 1 работы [14]). Отметим, что если же все  $\lambda_i \geq 0$ , то все  $\varepsilon > 0$  и солитон устойчив (но в нашем случае оказалось, что по крайней мере одно  $\lambda_i < 0$ , см. ниже).

Величину

$$F(0) = \left( \sum_i \frac{L_i^2}{\lambda_i} \right) \left( \sum_i \frac{S_i^2}{\lambda_i} \right) - \left( \sum_i \frac{L_i S_i}{\lambda_i} \right)^2$$

можно записать через производные  $\partial L/\partial \omega_r$  и  $\partial S/\partial \omega_p$ . Действительно, продифференцировав соотношение  $\partial \mathcal{L}/\partial a_i = 0$  по  $\omega_p, \omega_r$ , легко получить, что

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_\alpha} = \sum \left( \frac{\partial F}{\partial a_i} \right) \left( \frac{\partial a_i}{\partial \omega_\alpha} \right),$$

где  $F = S$  или  $L$ ,  $\alpha = r, p$ . Тогда суммы, входящие в  $F(0)$ , легко могут быть выражены через  $\partial L/\partial \omega_\alpha, \partial S/\partial \omega_\alpha$ , и условие устойчивости принимает вид:

$$\frac{\partial(L, S)}{\partial(\omega_p, \omega_r)} = \frac{\partial L}{\partial \omega_r} \frac{\partial S}{\partial \omega_p} - \frac{\partial S}{\partial \omega_r} \frac{\partial L}{\partial \omega_p} < 0. \quad (18)$$

Отметим, что общие соотношения, по структуре совпадающие с (18), возникают в задаче об устойчивости движущегося солитона в одноосном антиферромагнетике [20] (интегралы движения —  $S$  и  $P$ , величина  $\partial L/\partial \omega_r \rightarrow \partial P_i/\partial v_i$ ,  $v$  — скорость солитона), а также для двухпараметрических оптических солитонов [21]. По-видимому, соотношение (18) имеет столь же общий характер, что и хорошо известное условие устойчивости  $\partial S/\partial \omega < 0$  для однопараметрических солитонов, см. [12, 14, 19]. Заметим, что после простых алгебраических преобразований условие  $\partial S/\partial \omega < 0$  получается из (18) в случае однопараметрических центрально-симметричных решений, когда  $S \rightarrow L$ .

Таким образом, периодические во времени (или почти периодические для наиболее симметричной модели (1)) солитонные решения устойчивы, если только одно  $\lambda_i < 0$  и

выполняется условие (18) (а также в случае, когда все  $\lambda_i > 0$ , но этот случай не реализуется для солитонов, рассмотренных в данной работе). Устойчивость с учетом выхода из класса периодических решений требует особого анализа, который выходит за рамки данной работы, тем более что в известных нам работах по динамическим солитонам авторы ограничивались случаем периодических решений, см. [1–3, 12, 21].

#### 4. ВЫБОР ПРОБНОЙ ФУНКЦИИ

В любом вариационном расчете выбор пробной функции является решающим фактором. Для задачи о солитоне хорошим решением было бы заменить энергию (1) ее дискретным аналогом, рассмотрев  $N$  классических спинов, расположенных в узлах достаточно большой решетки, и выбрать углы  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  для спина  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  как пробные параметры. Такой подход для нетопологических движущихся солитонов был реализован в [17] с  $N = 249 \times 249$ . Однако расчеты с большим числом параметров  $n = 2N$  требуют достаточно мощных компьютеров, и, кроме того, возникает неконтролируемый эффект дискретности. В частности, для дискретных моделей обязательно нарушается сохранение  $L$  (см. ниже).

В рассматриваемой модели дополнительные сложности возникают из-за того, что искомый экстремум  $\mathcal{L}$  не является минимумом. Стандартные программы минимизации обычно ищут абсолютный минимум, поэтому в данном случае они неприменимы. Таким образом, для поиска экстремума необходимо решать (как правило, итерационными методами) систему  $n = 2N$  нелинейных трансцендентных уравнений  $\partial \mathcal{L} / \partial a_i = 0$ .

С другой стороны, как мы показали выше, условие устойчивости топологического солитона может быть записано через его глобальные характеристики — характер зависимости его интегралов движения от параметров  $\omega_r$ ,  $\omega_p$ . Поэтому можно надеяться, что использование даже достаточно простых пробных функций даст хорошие результаты при условии, что выбранная пробная функция допускает достаточно широкий класс возмущений, которые могут быть «опасными» с точки зрения устойчивости солитона. Это, прежде всего, изменение размеров солитона, эллиптическая деформация его формы, а также распределения вектора намагниченности на плоскости  $xy$  при фиксированном  $\theta(r, \chi)$ .

Для конкретных вычислений мы выбирали пробную функцию вида:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r}{b}\right) (1 + C_1 \cos 2\chi), \quad \varphi = \chi + C_2 \sin 2\chi + \varphi_0, \quad (19)$$

которая зависит от пяти пробных параметров  $R$ ,  $b$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi_0$  и дает хорошее приближение структуры солитона [22]. Действительно, зависимость  $\theta(r)$  (19) обеспечивает описание предела Белавина—Полякова, адекватного при  $R \ll \Delta$ , а также экспоненциальное убывание  $\theta(r)$  при  $r > \Delta$ , где  $\Delta = \sqrt{A/K}$  — характерная длина (см. [1–3]). Поэтому (19) хорошо описывает вид функции  $\theta(r)$ , см. ниже. Угловые зависимости согласуются с полученными аналитически в предельных случаях  $R \gg \Delta$ ,  $R \ll \Delta$  или малой асимметрии солитона,  $C_{1,2} \ll 1$  [22]. Параметр  $C_1$  контролирует анизотропию функции  $\theta(r, \chi)$ , т. е. эллиптические искажения формы солитона,  $C_2$  — анизотропию угловой зависимости  $\varphi(\chi)$ .

Как отмечалось, критерий устойчивости солитона (18) записан через его интегральные характеристики. Поэтому можно надеяться, что анализ этого критерия с использованием более точных, чем (19), функций может привести лишь к малому (в меру

малости отклонения  $E(L)$  или  $E(S)$  от их истинных значений) смещению точек потери устойчивости, найденных с помощью (19), и не изменит картины бифуркаций решений.

Система уравнений  $\partial \mathcal{L} / \partial a_i = 0$  решалась итерационным методом Ньютона, начальные значения параметров  $a_i$  задавались вручную. Вычисления двумерных интегралов выполнялось подпрограммой, использующей в качестве основы рекурсивный алгоритм подпрограммы QUADREC [23]. По найденным  $a_i^{(0)}$  вычислялись  $E, L, S$  и строились зависимости  $E(L, S)$  или  $E(S), E(L), E(J)$ , см. ниже. Одновременно вычислялись собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $\mathcal{L}_{ik} = \partial^2 \mathcal{L} / \partial a_i \partial a_k$ . Оказалось, что, по крайней мере, одно собственное значение  $\lambda_i$  меньше нуля, т.е. солитону всегда отвечает седловая точка  $\mathcal{L}$ . Для анализа устойчивости в случае двухпараметрических солитонов вычислялась также величина  $\partial(L, S) / \partial(\omega_r, \omega_p)$ .

### 5. АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛЯХ С ОДНИМ ИНТЕГРАЛОМ ДВИЖЕНИЯ

Конкретное исследование солитонов проводилось как для модели (1) с максимально возможной симметрией, так и для менее симметричных моделей, учитывающих дополнительные слагаемые, которые понижают симметрию задачи (т.е. разрушают некоторые интегралы движения (4)). Описание результатов удобно начать именно со случаев менее симметричных моделей, в которых сохраняется только орбитальный момент  $L$ , или полный спин  $S$ , или полный момент  $J = S - L$ . Двухпараметрические солитоны для наиболее симметричной модели (1) будут рассмотрены в следующем разделе.

5.1.  $L = \text{const}, S \neq \text{const}$ . Пусть сохранение  $S$  разрушено за счет наличия магнитной анизотропии в базисной плоскости. Для конкретного анализа выберем ромбическую анизотропию вида

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon K m_y^2 = \frac{1}{2} \varepsilon K \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \quad (20)$$

В этом случае  $L$  остается интегралом движения и возможны ротационные солитоны типа (8).

С учетом дополнительного слагаемого (20) наименьшая частота магнонов определяется формулой  $\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon}$ . Это значение частоты является максимально возможным в солитоне, т.е. ротационные солитоны существуют только при  $\omega_r < \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon}$ . Далее в этом подразделе при обсуждении ротационных солитонов мы будем опускать индекс  $r$ .

Расчет показал, что солитоны существуют при всех значениях  $0 < \omega < \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon}$ , см. рис. 2. При выполнении условия  $\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon} - \omega_r \ll \omega_0$  при любых значениях  $\varepsilon$  радиус солитона мал,  $R \ll \Delta$ , при этом  $L$  много меньше характерной величины  $N_0$  ( $N_0 \gg 1$  при  $\Delta \gg a$ ),

$$N_0 = 2\pi s(\Delta/a)^2. \quad (21)$$

При  $\omega \rightarrow \omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon}$  его энергия стремится к величине  $E_0 = 4\pi A$ , равной энергии солитона Белавина—Полякова. Значения параметров асимметрии  $C_1$  и  $C_2$  при  $L \ll N_0$  оставались малыми даже при  $\varepsilon \sim 1$  ( $C_1$  и  $C_2 < 10^{-2}$  при  $\varepsilon = 0.5$  и  $\omega > 0.8\omega_0$ , что соответствует  $L \leq 0.03N_0$ ).

При уменьшении частоты значения  $E$  и  $L$  растут, т.е.  $d\omega/dL < 0$ , см. рис. 2. Для ферромагнетика с  $\varepsilon \neq 0$  при этом также растут параметры  $C_1$  и  $C_2$ . При малых  $\varepsilon$

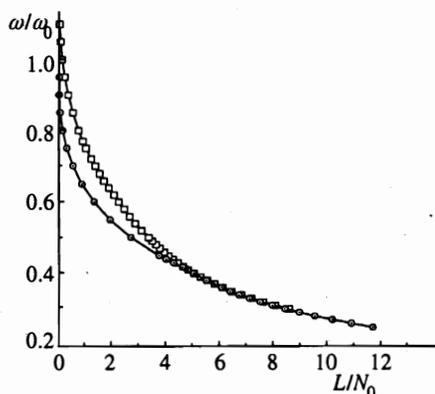


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость  $\omega(L)$  для ротационного солитона. Квадраты отвечают значению  $\varepsilon = 0.5$ , кружки —  $\varepsilon = 10^{-5}$

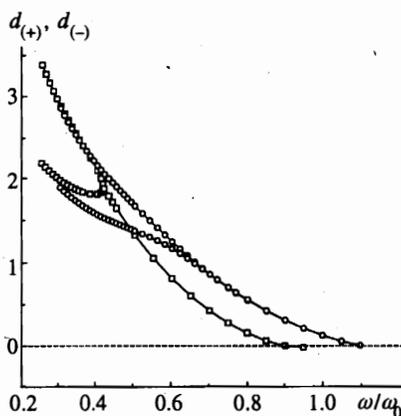


Рис. 3

Рис. 3. Зависимости  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$  от частоты для ротационного солитона в ферромагнетике с  $\varepsilon = 0.5$  (кружки) и  $\varepsilon = 10^{-5}$  (квадраты)

эти параметры нелинейно зависят от  $\varepsilon$ , т. е. при некотором значении  $\omega/\omega_0$  (или  $L/N_0$ ) наблюдается резкий рост асимметрии солитона, см. рис. 3. Здесь и далее мы описываем асимметрию распределения намагниченности  $m$  в солитоне с помощью двух параметров  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$ , которые определяют максимальный и минимальный размеры области, в которой  $\theta_0 \geq \pi/2$ . Связь этих параметров с параметрами пробной функции (19) для  $\theta = \theta(\tau, \chi)$  определяется соотношениями:

$$d_{\pm} = R(1 \pm C_1) \exp(-d_{\pm}/b).$$

При малых  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$ ) возникает интересный эффект, который полезен для понимания свойств солитона в изотропной модели (1). А именно, при  $\varepsilon \ll 1$  для всех значений  $\omega \leq \omega_0$  легко обнаруживаются почти центрально-симметричные солитоны с  $C_1, C_2 \ll 1$ . Для этих решений  $L(\omega) = |L_z| \approx S(\omega)$ . При этом функция  $E(S)$  с точностью порядка  $\varepsilon$  совпадает с полученной ранее путем интегрирования уравнения для  $\theta_0$  [1-3], что демонстрирует адекватность метода и пробной функции (19).

Оказалось, что решение может быть неоднозначным. Программа обнаруживала то или иное решение в зависимости от выбора начальных значений  $a_i$ . В частности, при малых  $\varepsilon$  (так же, как и при  $\varepsilon = 0$ ) при  $\omega \leq 0.418\omega_0$  наряду с центрально-симметричными солитонами были обнаружены также и асимметричные решения с существенно различающимися  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$ . Отметим, что если для солитона с немалым  $\varepsilon$  разность  $d_{(+)} - d_{(-)}$  плавно зависела от  $\omega$ , то при малых  $\varepsilon$  переход к асимметричному солитону выглядит как бифуркация, см. рис. 3.

Важно, что для асимметричных решений значение  $|L(\omega)|$  росло при уменьшении  $\omega$  гораздо быстрее, чем  $S(\omega)$ . Поэтому зависимости  $E(L)$  и  $S(L)$  принципиально различались: если рассматривать солитоны с фиксированным значением  $S$ , то меньшую

энергию имеют центрально-симметричные солитоны, если же фиксировать  $L$ , то — асимметричные.

Для всех рассмотренных солитонов производная  $dL/d\omega < 0$ , что необходимо для их устойчивости. Второе условие — только одно из собственных значений матрицы  $\mathcal{L}_{ik}$  может быть отрицательным — выполнялось только для солитона, энергия которого минимальна при данном  $L$ . В частности, при  $\varepsilon = 0$  для центрально-симметричного солитона в ферромагнетике второе собственное значение  $\lambda_2$  положительно только при  $\omega \geq 0.418\omega_0$ . При  $\omega \leq 0.418\omega_0$ , когда появляется асимметричное решение, знак  $\lambda_2$  меняется и центрально-симметричный солитон теряет устойчивость. При этом для асимметричного солитона отрицательно только одно собственное значение, и он устойчив во всей области своего существования. Таким образом, симметрия ротационных солитонов может быть ниже, чем симметрия модели. В кратком сообщении [14] этот эффект обсуждался в терминах спонтанного нарушения симметрии центрально-симметричного солитона относительно эллиптических деформаций и образования стабильного асимметричного солитона.

5.2.  $L \neq \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ . Этот случай отвечает ферромагнетику, в котором отсутствует магнитная анизотропия в базисной плоскости, ( $W_a = W_a(\theta)$  и не зависит от  $\varphi$ ), но отсутствует симметрия относительно пространственных вращений. В частности, такая ситуация всегда возникает при переходе от решеточных моделей к непрерывным. Например, для часто используемой в численном моделировании квадратной решетки несохранение  $L$  может иметь место за счет инвариантов вида  $(\partial^2 m / \partial x \partial y)^2$ . Для ромбического ферромагнетика несохранение  $L$  может возникать при учете различия обменного взаимодействия вдоль осей  $x$  и  $y$ . При этом в энергии появляются слагаемые вида

$$(A_{xx} - A_{yy}) (\partial m / \partial x)^2 = (A_{xx} - A_{yy}) \times \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] \cos^2 \chi + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \right)^2 \right] \sin^2 \chi \right\} \quad (22)$$

К такому же эффекту приводит добавление в энергию магнетика слагаемого более простой структуры:

$$\Delta J \sin^2 \theta \sin^2 \chi. \quad (23)$$

Для энергии (1) с учетом добавки (22) задача может быть решена точно, если ввести новые переменные  $x' = x / \sqrt{A_{xx}}$ ,  $y' = y / \sqrt{A_{yy}}$ . Тогда в полярных координатах, введенных для декартовых координат  $x'$ ,  $y'$  ( $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ,  $\chi' = \arctg(y' / x')$ ) задача имеет решение  $\theta = \theta(r')$ ,  $\varphi = \nu \chi' + \omega t$ . Ясно, что это решение в исходных физических координатах  $x$ ,  $y$  является асимметричным, его асимметрия жестко обусловлена значением параметра  $(A_{xx} - A_{yy}) / (A_{xx} + A_{yy})$ . Таким образом, в отличие от рассмотренного выше случая ротационного солитона, параметр асимметрии солитона  $d_{(+)} - d_{(-)}$  плавно увеличивается с ростом  $(A_{xx} - A_{yy}) / A_{xx}$  и эффекты типа спонтанного нарушения симметрии не возникают. Проведенный нами численный анализ показал, что такая же ситуация реализуется и для модели с добавкой вида (23).

Для магнетика с квадратной решеткой соответствующее слагаемое, разрушающее сохранение  $L$ , содержит дополнительный малый параметр  $(a/\Delta)^2$ . Поскольку влияние

дискретности на структуру солитона мало даже при  $\Delta \simeq 1.5a$  [24], в реальных слабоизотропных магнетиках с квадратной решеткой эффекты, связанные с разрушением сохранения орбитального момента при  $S = \text{const}$ , должны быть слабыми.

5.3.  $L \neq \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ ,  $J = \text{const}$ . Этот случай с точки зрения континуальных теорий нужно считать наиболее физичным. Однако его преимущества для реальных моделей двумерных магнетиков не очевидны. Из физически интересных взаимодействий, обладающих такой симметрией, можно указать дальнедействующую часть магнитного дипольного взаимодействия, которая не сводится к перенормировке магнитной анизотропии. Еще один пример — магнитоупругое взаимодействие, которое описывается слагаемым типа  $\lambda m_i m_k (\partial u_i / \partial x_k)$ ,  $\partial u_i / \partial x_k$  — тензор дилатации.

Динамические солитоны с топологическим зарядом  $\nu = 2$  с учетом добавки в энергию взаимодействия (1) слагаемого вида  $\delta(\text{div } \mathbf{m})^2$ , моделирующего дальнедействующую часть магнито-дипольного взаимодействия, были изучены численно в работе [18].

Для анализа эффектов такого нарушения симметрии мы выбрали добавку к энергии (1) в виде:

$$\delta \sin^2 \theta \sin^2(\varphi - \chi). \quad (24)$$

Слагаемое, пропорциональное  $\sin^2(\varphi - \chi)$ , возникает при записи  $(\text{div } \mathbf{m})^2$  в полярных координатах. Сделанный выбор допускает прямое сравнение эффектов взаимодействия типа (24) с рассмотренными ранее взаимодействиями вида (20) и (23). Обсудим результаты анализа этих моделей более подробно.

Прежде всего ясно, что солитонам в модели (1) с учетом (24) соответствуют решения типа (9) при  $\omega_r = |\omega_p| = \omega$ . Наложение двух типов динамики (прецессионной и ротационной) с  $\omega_r = |\omega_p|$  можно описать и как вращение «жесткого» солитона, см. рис. 1в, и как колебание его формы. Именно движение такого типа (вращение «жесткой» солитонной пары) наблюдалось в численных экспериментах [18].

Из анализа рис. 1в ясно, что в отличие от ротационных ( $\omega_r \neq 0$ ,  $\omega_p = 0$ ) или прецессионных ( $\omega_r = 0$ ,  $\omega_p \neq 0$ ) солитонов в этом случае глобальная динамика (типа прецессии намагниченности) в данной точке магнетика отсутствует. Иными словами, намагниченность в данной точке совершает лишь некоторые колебания вокруг определенного среднего направления без полного разворота даже при  $\theta \simeq \pi/2$ . Поэтому такие солитоны уместно назвать осцилляционными.

Различие свойств осцилляционных солитонов и рассмотренных выше ротационных и прецессионных наиболее ярко проявляется при анализе предельного случая центрально-симметричного солитона. Для осцилляционного солитона с  $\omega_p = |\omega_r|$  в этом случае динамика вообще отсутствует, и решение вырождается в статическое, в то время как ротационные и прецессионные центрально-симметричные солитоны являются динамическими. Понятно, что солитоны в модели  $J \equiv S_z + L_z = S - \dot{L} = \text{const}$ ,  $L, S \neq \text{const}$  не могут быть центрально-симметричными и обязательно характеризуются конечной асимметрией формы.

Численный анализ показал, что в данной модели возникает новое свойство, отсутствующее для прецессионных и ротационных солитонов, а именно то, что частота солитона  $\omega = |\omega_p| = \omega_r$  может быть значительно больше наименьшей частоты магнонов  $\omega_g$  ( $\omega_g \geq \omega_0$ ), рис. 4а. Значениям  $\omega \gg \omega_g$  отвечают солитоны с весьма малыми размерами,  $d_{(+)} , d_{(-)} \ll \Delta$ , и энергией близкой к  $E_0$ . Зависимость их энергии от  $|J|$  (см. рис. 4б) похожа на соответствующую зависимость  $E(L)$  для ротационных солитонов [14].

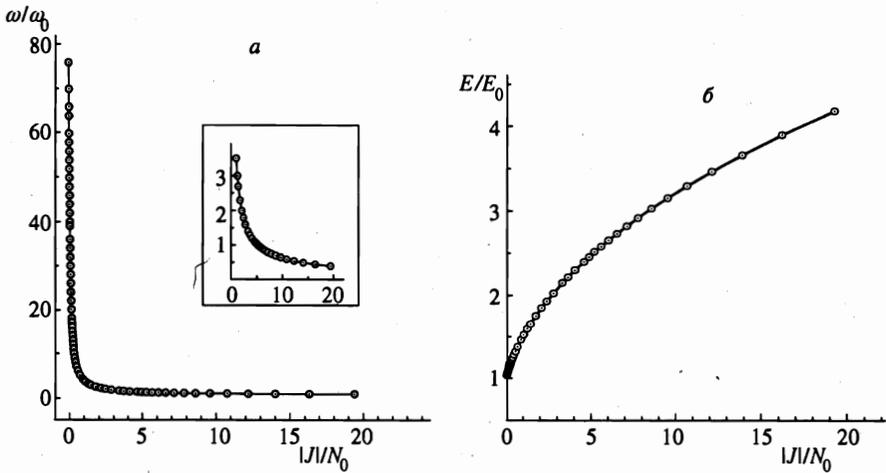


Рис. 4. Зависимость  $\omega(J)$  (а) и  $E(J)$  (б) для осцилляционного солитона с  $\delta = 0.5$

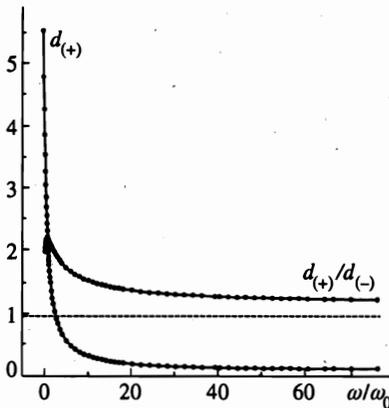


Рис. 5. Зависимость максимального размера области осцилляционного солитона  $d_{(+)}$ , в которой  $\theta \geq \pi/2$ , а также отношения  $d_{(+)}/d_{(-)}$  от частоты колебаний намагниченности в солитоне

Как отмечалось, солитонам малого радиуса в модели (1), (24) соответствуют весьма большие частоты  $\omega \gg \omega_0$ , которые попадают в непрерывный спектр магнонов. При этом  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$  различаются не очень сильно. Однако, в отличие от ротационных солитонов, величина  $d_{(+)}/d_{(-)}$  не уменьшается до значения меньшего 1.175 даже при  $\omega \simeq 75\omega_0$ , см. рис. 5.

Солитону с  $\omega \gg \omega_g$  и  $d_{(+)} \sim d_{(-)}$  отвечают колебания его формы малой амплитуды, но достаточно высокой частоты. Ясно, что существование солитона с  $\omega > \omega_g$  обусловлено отмеченным выше фактом, что в осцилляционном солитоне динамика намагниченности не имеет глобального характера. В принципе, такие колебания должны вызывать излучение магнонов непрерывного спектра, что приводит к релаксации солитона. Однако прямое компьютерное моделирование движения вихревых пар в легкоплоскостном ферромагнетике [6] с бесщелевым законом дисперсии магнонов ( $\omega_g = 0$ ) продемонстрировало медленность релаксации солитонов за счет излучения магнонов.

Следует ожидать, что подобные эффекты релаксации будут малы и в нашей модели, в которой магныоны имеют конечную щель  $\omega_g$ , но  $\omega > \omega_g$ . Эффекты релаксации такого типа были пренебрежимо малы и при изучении динамики солитонов немалой амплитуды в легкоплоскостном ферромагнетике [18].

При уменьшении частоты солитона до значений меньших  $\omega_0$  его энергия растет до значений порядка нескольких  $E_0$ . Растет также и разность величин  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$  (см. рис. 5), т.е. при  $\omega \leq \omega_0$  солитон в модели (1), (24) представляет собой возбужденное состояние с достаточно большой энергией и резко асимметричным распределением намагниченности, далеким от центрально-симметричного. При  $\omega < 0.3\omega_0$  значение параметра  $C_2$  становится большим чем  $\pi/2$  и в силу (19) зависимость  $\varphi(x)$  становится немонотонной. В этом случае второе значение  $\lambda$  меняет знак и солитон становится неустойчивым.

Таким образом, солитоны в ферромагнитных моделях с  $L = \text{const}$  или  $J = \text{const}$  демонстрируют два различных типа поведения. Ротационные солитоны ( $L = \text{const}$ ) могут быть как почти центрально-симметричные, так и характеризоваться немалой асимметрией формы. Им всегда отвечает медленная динамика намагниченности (частота  $\omega_r$  меньше щели в спектре магныонов).

Осцилляционные солитоны в ферромагнетике с  $L \neq \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ , но  $J = \text{const}$  при тех же значениях энергии более асимметричны, чем ротационные солитоны. Они могут характеризоваться достаточно быстрыми изменениями намагниченности  $\omega \gg \omega_0$ , которые в этом случае можно наглядно представить как малые колебания формы солитона. Такие солитоны могут существовать и как низкочастотные ( $\omega \leq \omega_0$ ), в этом случае они весьма асимметричны и имеют достаточно большую энергию.

Отличия «осцилляционной» ( $|\omega_p| = \omega_r$ ) динамики от прецессионной или ротационной проявляются для двухпараметрических солитонов в случае модели (1) с максимально возможной симметрией, для которой  $L = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ .

## 6. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В МОДЕЛИ С ДВУМЯ ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЯ

Как уже отмечалось, для модели (1) возможны солитоны со сложной, вообще говоря, почти периодической динамикой намагниченности. Для них в неподвижной системе отсчета изменение намагниченности характеризуется двумя независимыми частотами  $\omega_r$  и  $\omega_p$ .

Модель (1) допускает центрально-симметричные солитоны, для которых имеет значение только сумма частот  $\Delta\omega = \omega_p + \omega_r$ , см. (11). Однако в общем случае солитон не является центрально-симметричным. Рассмотрим свойства солитонов при изменении частот  $\omega_r$  и  $\omega_p$  таким образом, чтобы  $\Delta\omega = \omega_r + \omega_p = \text{const}$ . Анализ таких однопараметрических семейств решений наглядно демонстрирует изменение свойств солитонов при изменении частот  $\omega_r$  и  $\omega_p$ .

Прежде всего отметим, что солитонные решения существуют только при  $\Delta\omega < \omega_0$ . Это понятно, так как именно величина  $\Delta\omega$  определяет глобальную динамику намагниченности в солитоне, т.е.  $\Delta\omega$  играет ту же роль, что и  $\omega_p$  для прецессионного солитона или  $\omega_r$  для ротационного. Для малых значений  $\Delta\omega \ll \omega_0$  существуют солитонные решения с большими размерами ( $d_{(+)}, d_{(-)} \gg \Delta$ ), для  $\Delta\omega$ , близких к  $\omega_0$ , наблюдаются только центрально-симметричные солитоны.

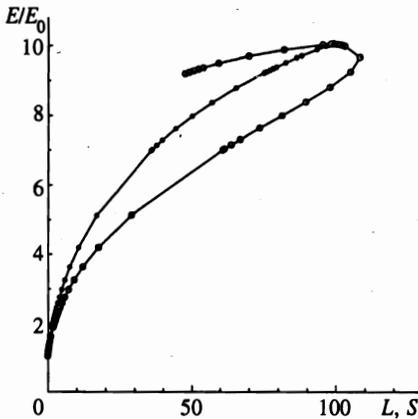


Рис. 6

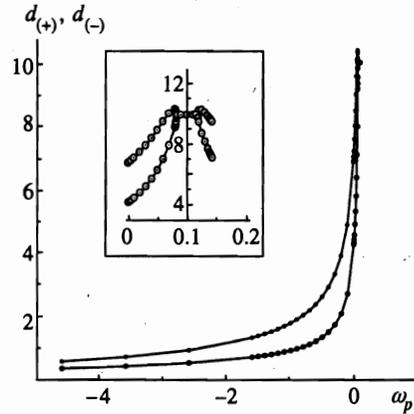


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость энергии солитона от значений интегралов движения  $L, S$  (в единицах  $N_0$ ) для солитона при  $\Delta\omega = 0.1\omega_0$ . Черные точки обозначают  $E(S)$ , светлые — две ветви зависимости  $E(L)$

Рис. 7. Параметры анизотропии солитона  $d_{(+)}, d_{(-)}$  при  $\Delta\omega = 0.1\omega_0$

Как и для осцилляторных солитонов значения частот  $\omega_r$  и  $|\omega_p|$  могут быть достаточно большими (мы наблюдали решения со значениями  $\bar{\omega} = (\omega_r - \omega_p)/2$  до  $100\omega_0$ ). При больших значениях  $\bar{\omega}$  (но при  $\Delta\omega < \omega_0$ ) свойства солитона слабо зависят от  $\Delta\omega$  и такие же, как для осцилляционного солитона с  $\omega_r = |\omega_p| \gg \omega_0$ : энергия солитона близка к  $E_0$ , размер солитона мал,  $|L_z| = L \simeq S \ll N_0$ . В этой области величины  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$  близки. Это понятно из анализа предыдущего раздела: при  $\bar{\omega} \gg \Delta\omega$  величина  $\bar{\omega}$  играет ту же роль, что частота  $\omega$  для осцилляционных солитонов, и описывает быстрые малые осцилляции формы солитона. Но для двухпараметрических солитонов эти осцилляции происходят на фоне медленной прецессии спинов с частотой  $\Delta\omega$ .

Уменьшая частоты  $\omega_r$  и  $|\omega_p|$  таким образом, что  $\Delta\omega$  не меняется, мы наблюдаем рост энергии солитона и значений  $L, S$ , см. рис. 6. Одновременно солитон становится более асимметричным (при  $\Delta\omega = 0.1\omega_0$  максимальное значение  $d_{(+)}/d_{(-)} \simeq 2.05$  при  $\omega_r = 0.7\omega_0, \omega_p = -0.6\omega_0$ ), однако отношение  $d_{(+)}/d_{(-)}$  растет медленнее, чем размер солитона, см. рис. 7. В области  $|\omega_p|, \omega_r < \omega_0$  характерные значения  $d_{(+)}$  и  $d_{(-)}$  изменяются на порядок величины.

Когда значение  $\bar{\omega}$  становится сравнимым с  $\Delta\omega$ , асимметрия солитона начинает резко уменьшаться, при том что его средний размер растет. Этот факт имеет достаточно ясное объяснение: в этой области в динамической части лагранжиана  $\mathcal{L}$  начинает доминировать слагаемое, связанное с  $S$ , и солитон ведет себя так, как прецессионный солитон в модели с  $S = \text{const}, L \neq \text{const}$ . При значениях  $\omega_r \ll |\omega_p| \simeq \Delta\omega$  резко (см. рис. 7) восстанавливается центральная симметрия солитона. При  $\omega_p \gtrsim \Delta\omega$  обнаруживаются только центрально-симметричные солитоны. Ясно, что динамика намагниченности в них не зависит от  $\omega_p$  и  $\omega_r$ , а их параметры и структура определяются только значением  $\Delta\omega$ .

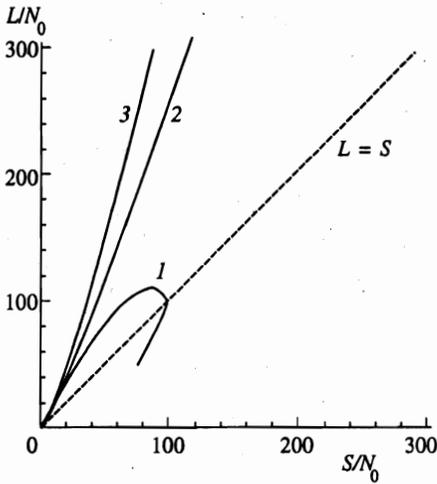


Рис. 8. Связь  $L$  и  $S$  для солитонов с различными значениями  $\Delta = \Delta\omega/\omega_0$ ; кривой 1 отвечает  $\Delta = 0.1$ , 2 —  $\Delta = 0.01$ , 3 —  $\Delta = -0.1$

Во всей области изменения параметров  $\omega_p$ ,  $\omega_r$  описанные выше солитоны (как асимметричные, так и центрально-симметричные, возникающие при малых  $\omega_r$ ) устойчивы в соответствии с полученными выше критериями. В частности, для всех них есть только одно значение  $\lambda_i < 0$ , и величина  $\partial(L, S)/\partial(\omega_r, \omega_p) < 0$ . Кроме этих солитонных состояний, в области существования асимметричных имеются также центрально-симметричные солитоны, которые, однако, нестабильны (для них отрицательны два собственных значения матрицы  $\mathcal{L}_{ik}$ ). Таким образом, ситуация здесь такая же, как для ротационных солитонов, при  $\varepsilon \ll 1$ : если существует асимметричный солитон, то именно он устойчив. Для модели (1) это можно описать как эффект спонтанного нарушения симметрии солитона.

При дальнейшем увеличении  $\omega_p$  опять появляются асимметричные солитоны. Этой ветви солитонов соответствуют большие значения параметров  $C_1, C_2 \geq 1$ . Для них  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , и они неустойчивы. Интересно отметить, что для этих неустойчивых солитонов зависимость  $E(S)$  точно такая же, как и для устойчивых, так что на графике  $E = E(S)$  эти две ветви совпадают, рис. 6. Основное качественное различие этих двух ветвей, которые разделены областью существования устойчивых центрально-симметричных солитонов, состоит в соотношении  $L$  и  $S$ . Для устойчивых солитонов  $|L_z| > S$ , а для неустойчивых  $S > |L_z|$ , см. рис. 8 (заметим, что для устойчивых ротационных солитонов всегда получалось, что  $|L_z|$  больше, чем среднее значение  $S$ ). Различие ветвей устойчивых и неустойчивых асимметричных солитонов не видно на зависимости  $d_{\pm}(\omega)$  (см. вставку на рис. 7), но отчетливо проявляется в зависимости  $E(L)$ . На зависимости  $E(L)$  (см. рис. 6) ясно видны две ветви этой кривой с характерной бифуркационной точкой при  $E = 10.003E_0$ ,  $|L| = S = 99.815N_0$ . Этой точке соответствует центрально-симметричный солитон, структура которого зависит только от  $\omega_p + \omega_r$ . В ней значение энергии солитона  $E$  и  $z$ -проекция спина  $S$  максимальны при данном  $\Delta\omega$ .

Описанные выше свойства солитонов были обсуждены для конкретного однопараметрического семейства солитонов с  $\Delta\omega = 0.1\omega_0$ . Проведенный нами анализ показал, однако, что для других не очень больших положительных значений  $\Delta\omega$  качественное поведение остается тем же. В частности, при  $\Delta\omega \leq 0.5\omega_0$  имеет место переход от асимметричных солитонов к центрально-симметричным при уменьшении значения  $\omega_p$  до

величины  $\Delta\omega$ . Для каждого значения  $\Delta\omega > 0$  существует максимально возможное значение  $E(\Delta\omega)$ , оно соответствует центрально-симметричному солитону. Естественно, это значение равно энергии центрально-симметричного прецессионного солитона с частотой  $\omega = \Delta\omega$ . Для таких  $\Delta\omega$  также существуют значения частот, при которых  $|L| < S$ , и соответствующие солитоны неустойчивы.

Ситуация меняется при достаточно больших  $\Delta\omega$  ( $\Delta\omega \simeq \omega_0$ ) и отрицательных  $\Delta\omega$ . При  $\Delta\omega$ , близких к  $\omega_0$ , нам удалось найти только центрально-симметричные решения. Поскольку соответствующие решения устойчивы, можно сделать вывод, что асимметричные солитоны в данном случае отсутствуют. Фактически, в этой области  $\Delta\omega$  решения являются однопараметрическими и каждому значению  $\Delta\omega$  отвечает только одно значение  $S$ ,  $|L_z| = S$  и энергии  $E$ . На плоскости  $(L, S)$  эти солитоны описываются точками на прямой линии  $L = S$ , расположенными в области с малыми  $L, S < N_0$ .

Решения при  $\Delta\omega = \omega_r + \omega_p < 0$  никогда не бывают центрально-симметричными, так как центрально-симметричные прецессионные солитоны в модели (1) существуют только при  $0 < \omega < \omega_0$ , см. [1–3]. При  $\Delta\omega < 0$  асимметрия формы солитона всегда выше, чем солитонов с тем же значением энергии  $E$  и  $\Delta\omega > 0$ . На плоскости  $(L, S)$  солитонам с фиксированным значением  $\Delta\omega < 0$  отвечает незамкнутая кривая, проходящая выше линии  $L = S$  (см. рис. 8) и нигде не пересекающая эту прямую линию.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим общие закономерности формирования двумерных топологических солитонов, их свойства и возможные их проявления в свойствах различных квазидвумерных упорядоченных систем.

Стабильные неподвижные топологические  $2D$ -солитоны существуют для широкого класса моделей. Необходимое условие — наличие хотя бы одного интеграла движения типа момента импульса ( $L, S$  или  $J$ ). В моделях с одним интегралом движения солитону отвечает периодическая динамика намагниченности.

В наиболее симметричной модели ферромагнетика с сохранением как  $L$ , так и  $S$  возможны двухпараметрические солитоны, где параметрами являются частота прецессии  $\omega_p$  и частота вращения солитона  $\omega_r$ . В этих солитонах динамика намагниченности в неподвижной системе отсчета при  $q\omega_p \neq p\omega_r$  ( $p, q$  — целые числа) описывается почти периодической функцией времени.

Солитоны в моделях с одним интегралом движения могут проявлять достаточно разнообразные свойства. Асимметрия формы прецессионных солитонов, существующих в моделях с  $S = \text{const}$ , диктуется интенсивностью того взаимодействия, которое разрушает сохранение  $L$ . В почти изотропной модели такие солитоны близки к центрально-симметричным. Для них, как и для ротационных солитонов, существующих в моделях с  $L = \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ , характерна только низкочастотная динамика намагниченности,  $\omega_p, \omega_r < \omega_g$ , где  $\omega_g$  — наименьшая частота магнонов линейной теории.

Однако для ротационных солитонов асимметрия формы не связана с интенсивностью взаимодействий, разрушающих симметрию модели. Хотя при весьма малом значении магнитной анизотропии в базисной плоскости существуют солитоны, близкие к центрально-симметричным, они оказываются неустойчивыми при энергиях  $E > 2.3E_0$ , при этом даже при слабой анизотропии в базисной плоскости устойчивы солитоны с немалой асимметрией формы.

Осцилляционные солитоны, существующие в моделях с сохранением  $z$ -проекции полного момента импульса  $J$  (при том, что  $L \neq \text{const}$ ,  $S \neq \text{const}$ ), отличаются от прецессионных и ротационных прежде всего тем, что динамика намагниченности в них может быть высокочастотной ( $\omega > \omega_0$ ). Асимметрия формы этих солитонов велика для низкочастотного случая ( $\omega < \omega_0$ ), но не очень мала и при высоких частотах, когда  $\omega \gg \omega_0$ ,  $J \ll N_0$ .

Такая же высокочастотная динамика проявляется и для двухпараметрических солитонов в наиболее симметричной модели с  $L = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ . Заметим, что это обстоятельство может оказаться существенным при анализе вклада солитонов, рассматриваемых как нелинейные тепловые возбуждения, в термодинамику и функции отклика квазидвумерных одноосных магнетиков. При низких температурах ( $T \leq J \sim A$ ) в основном возбуждены солитоны малого размера с  $d_{(+)} \simeq d_{(-)} \ll \Delta$  и  $E \simeq E_0$ . Поэтому в газе солитонов должны присутствовать солитоны с быстрыми осцилляциями, которые (в отличие от рассмотренных ранее [8, 9]) должны вносить специфический вклад типа высокочастотных пиков в функции отклика ферромагнетика. Детальный анализ данной проблемы выходит за рамки этой работы.

Анализ наиболее симметричной модели с чисто изотропной базисной плоскостью (по отношению как к пространственным, так и к спиновым вращениям) показал, что существующие в этой модели двухпараметрические солитоны могут быть асимметричны. Солитоны с малой энергией,  $E \simeq E_0$ , как правило, характеризуются наличием быстрых осцилляций. Таким образом, в этой физически интересной модели солитоны с  $R \ll \Delta$  и  $E \simeq E_0$  могут иметь асимметричную форму и характеризоваться быстрыми осцилляциями намагниченности. Солитоны с большей энергией ( $E$  больше нескольких  $E_0$ ) характеризуются медленной динамикой намагниченности,  $\omega_p, \omega_r \simeq \omega_0$ . Они могут быть как асимметричными, так и центрально-симметричными в зависимости от значений  $\omega_r, \omega_p$ .

В модели (1) существуют два интеграла движения,  $L_z$  и  $S$ . При наличии двух независимых интегралов движения  $L$  и  $S$  возникает вопрос, какие их значения являются допустимыми для солитона, т. е. для каких значений  $L$ ,  $S$  существует устойчивый солитон. Ответ на этот вопрос может быть дан путем анализа кривых, отвечающих  $\Delta\omega = \text{const}$ , на плоскости  $(L, S)$ , см. выше рис. 8.

На этой плоскости прямая  $L = S$  соответствует центрально-симметричным солитонам. Ей отвечают все значения  $\Delta\omega$ , близкие к  $\omega_0$  (при  $\Delta\omega \rightarrow \omega_0$  величины  $L$ ,  $S$  малы, а  $E \simeq E_0$ ), а также точки, соответствующие устойчивым центрально-симметричным солитонам при малых  $0 < \Delta\omega \ll \omega_0$  (величины  $L, S \gg N_0$ ,  $E \gg E_0$ ).

В области  $0 < L < S$  солитоны нестабильны, и мы их не обсуждаем, см. конец предыдущего раздела. Области  $L > S$  соответствуют устойчивым солитонам, получающиеся как при малых  $\Delta\omega > 0$ , так и при отрицательных  $\Delta\omega$ .

Эти кривые или пересекают линию  $L = S$ , переходя в область  $L < S$  и образуя характерный лепесток (при  $\Delta\omega > 0$ ), или уходят в бесконечность, оставаясь выше прямой  $L = S$ . Характерной особенностью всех этих кривых  $\Delta\omega = \text{const}$  является то, что при  $L, S \geq N_0$  для меньших  $\Delta\omega$  кривые проходят существенно выше, т. е. отношение  $L/S$  при данном  $S$  увеличивается с уменьшением  $\Delta\omega$ . Поэтому для таких значений  $L, S$  можно утверждать, что полуплоскость  $L > S$  покрывается соответствующими кривыми и солитон с заданным значением  $L > S \geq N_0$  может быть построен при соответствующем выборе  $\Delta\omega$  и одной из частот  $\omega_p, \omega_r$ . Исключением является область малых  $L, S \ll N_0$ , где кривые с разными  $\Delta\omega$  проходят близко друг от друга как при  $\Delta\omega > 0$ , так и при

$\Delta\omega < 0$ . Отсюда следует, что солитоны с  $L \gg S$ , но  $L, S \ll N_0$ , по-видимому, не существуют. Это понятно, если учесть, что малым  $L, S$  отвечают малые радиусы солитона,  $R \ll \Delta$ , а в этом случае анизотропия формы солитона не может быть велика, и  $L \simeq S$ .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований Украины (проект 2.4/27).

## Литература

1. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
2. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Soviet Scientific Rev. Sec. A — Phys.*, ed. by I. M. Khalatnikov, **16**, № 3 (1992).
3. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **21**, 355 (1995).
4. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **32**, 493 (1970).
5. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
6. A. R. Völkel, F. G. Mertens, A. R. Bishop, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. B* **43**, 5992 (1991).
7. F. Waldner, *J. Magn. Magn. Mater.* **31–34**, 1203 (1983); **54–57**, 873 (1986).
8. C. E. Zaspel, T. E. Grigorate, and J. E. Drumhellar, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4539 (1995); C. E. Zaspel and J. E. Drumhellar, *Int. J. of Modern Phys.* **10**, 3649 (1996).
9. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **16**, 335 (1990); А. К. Колежук, Д. В. Филин, *ФНТ* **20**, 1267 (1994).
10. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975); А. М. Переломов, *УФН* **134**, 577 (1981).
11. S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, *Phys. Rev. B* **47**, 16419 (1993).
12. V. G. Makhankov, *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978).
13. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **56**, 118 (1992).
14. А. А. Жмудский, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 899 (1997).
15. N. Papanicolaou, in *Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, NATO ASI Series, ed. by Gaflich, Springer (1992).
16. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **58**, 381 (1993).
17. N. R. Cooper, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4554 (1998).
18. N. Papanikolaou and W. J. Zakrzewski, *Physica D* **80**, 225 (1995).
19. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanskii, *Solid State Commun.* **50**, 523 (1984).
20. И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **85**, 328 (1983).
21. A. V. Buryak, Yu. S. Kivshar, and S. Trillo, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5210 (1996).
22. А. А. Жмудский, Б. А. Иванов, *ФНТ* **22**, 446 (1996).
23. A. N. Berlizov and A. A. Zhmudsky, *The recursive one-dimensional adaptive quadrature code Preprint KINR-98-4. Institute for nuclear research. Kyiv* (1998).
24. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 511 (1996).