

РАЗВИТИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА

А. В. Гуревич^{а*}, К. П. Зыбин^а, Г. А. Эль^б

^а Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма
Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

^б Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
Российской академии наук
142092, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 15 июня 1998 г.

Рассмотрено поведение решения КдВ при заданных на всей оси x крупномасштабных осциллирующих неперидических начальных условиях. Показано, что возникающая в системе КдВ структура мелкомасштабных осцилляций при $t \rightarrow \infty$ теряет свои динамические свойства вследствие размешивания фаз. Этот процесс можно назвать генерацией солитонной турбулентности. Развивающаяся при этом бесконечная система взаимодействующих солитонов со случайными фазами приводит к колебаниям, носящим стохастический характер. Такая система может быть описана в терминах непрерывного случайного процесса: плотности вероятности, корреляционной функции. Показано, что для этого достаточно определить, исходя из заданных начальных условий, функцию распределения солитонов по амплитудам и их среднюю пространственную плотность. Найдены предельные стохастические характеристики размешанного состояния для задачи с начальными данными в виде бесконечной последовательности отдельных крупномасштабных импульсов. Также полностью решена задача стохастического размешивания при произвольных начальных условиях в бездисперсионном пределе (уравнение Хопфа).

1. ВВЕДЕНИЕ

Основные особенности структуры асимптотических решений уравнения Кортевега—де Вриза (КдВ)

$$u_t + 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

определяются видом начального потенциала $u(x, 0) = u_0(x)$. В классической теории интегрирования этого уравнения методом обратной задачи рассеяния [1] необходимым условием является достаточно быстрое обращение в нуль функции $u_0(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ (локализованные начальные данные). Асимптотическое решение такой задачи описывает при $t \rightarrow \infty$ упорядоченную цепочку расходящихся солитонов, определяемых дискретным спектром квантовомеханической задачи рассеяния на потенциале $-u_0(x)$. Вкладом непрерывного спектра является осциллирующий волновой «хвост», амплитуда которого убывает пропорционально $t^{-1/2}$. В квазиклассическом случае $\varepsilon^2 \ll 1$ [2, 3]

* E-mail: alex@td.lpi.ac.ru

число солитонов (порядка $1/\varepsilon$) хотя и велико, однако фиксировано, и асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$ остается регулярной независимо от детального вида функции $u_0(x)$.

Начальные данные $u_0(x)$ в виде гладкой функции с различными асимптотиками на бесконечности $u_0(-\infty) > u_0(+\infty)$ приводят к появлению непрерывно расширяющейся во времени осцилляторной области [4]. Важное отличие от классической задачи заключается в том, что число солитонов теперь неограниченно возрастает со временем. Однако их структура при $t \rightarrow \infty$ устанавливается регулярной.

Фундаментально отличается от описанных случаев решение периодической задачи

$$u_0(x) = u_0(x + X_0),$$

где X_0 — период. Эта задача точно проинтегрирована лишь в условиях, когда $u_0(x)$ выбирается в специальном классе периодических функций, являясь так называемым конечнозонным потенциалом [1, 5–8]. Асимптотическая динамика осцилляций в периодической задаче может носить весьма сложный многомодовый характер (в случае $\varepsilon \ll 1$ число нелинейных мод велико, порядка $1/\varepsilon$), что внешне выглядит как неупорядоченная система волн различной амплитуды. Несмотря на это точное решение такой задачи всегда явно проявляет свою динамическую природу, строго сохраняя периодичность в пространстве — в любой момент времени выполняется условие $u(x, t) = u(x + X_0, t)$.

Целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения решений уравнения КдВ в квазиклассическом пределе $\varepsilon \ll 1$ для осциллирующих на всей оси непериодических начальных функций $u_0(x)$. Более точное определение класса начальных данных будет дано ниже.

Как будет показано, этот случай принципиально отличается от всех рассматривавшихся ранее решений уравнения КдВ. Хотя в любой конечный момент времени t структура решения носит по-прежнему динамический характер, его асимптотика при $t \rightarrow \infty$ вследствие процесса эргодического размешивания фаз полностью теряет динамические свойства. Развивающаяся при этом бесконечная система взаимодействующих солитонов со случайными фазами приводит к колебаниям, носящим стохастический характер. Такая система может быть описана в терминах непрерывного случайного процесса. А именно, в асимптотике при $t \rightarrow \infty$ точное динамическое значение $u(x, t)$ теряет смысл и можно говорить лишь о $f(u; x, t)$ — плотности вероятности найти в точке x, t данное значение u в интервале $[u, u + du]$ или о $f(u, u'; x, t, x', t')$ — двухточечной функции распределения, т.е. совместной плотности вероятности иметь значения $[u, u + du]$ в точке x, t и значение $[u', u' + du']$ в точке x', t' ; или о трехточечной функции распределения и т.д. Замечательно, что, как мы увидим ниже, при этом возникает возможность значительного упрощения описания асимптотического поведения решения. В частности, для однородной в пространстве начальной функции $u_0(x)$ плотность вероятности $f_\infty(u)$ зависит только от скорости u , а пространственная корреляционная функция $K = K(s)$, где $s = |x - x'|$.

Отметим, что эволюция случайных начальных данных в интегрируемых системах изучалась ранее в ряде работ, однако в них речь шла об учете влияния малого стохастического возмущения на солитонные решения (см., например, [9, 10]). Вопрос о возникновении стохастического режима в результате чисто динамической эволюции интегрируемой системы ставится в настоящей работе впервые.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе формулируется начальная задача для однородной в пространстве осциллирующей функции $u_0(x)$. Рассматривается ее решение в бездисперсионном пределе, описываемом уравнением Хопфа, не

содержащим ни диссипации, ни дисперсии. Нелинейное опрокидывание приводит в этом случае к появлению многопоточковых течений. При этом число потоков, а следовательно, и их плотность в пространстве скоростей u непрерывно увеличивается со временем. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ с точностью порядка $O(1/t)$ во всем пространстве устанавливается стационарная функция распределения потоков по скоростям $f(u)$. Найдено общее решение задачи, позволяющее определить вид функции распределения $f(u)$ для любой начальной функции $u_0(x)$. Определено асимптотическое поведение корреляционных функций, которое показывает, что при $t \rightarrow \infty$ фактически устанавливается полностью некоррелированное в пространстве распределение.

В третьем разделе исследуется квазиклассическая задача КдВ для рассматриваемого начального условия $u_0(x)$. Вследствие наличия дисперсионного члена $\varepsilon^2 u_{xxx}$ многопоточковые течения здесь никогда не возникают. Однако в окрестности точек опрокидывания начального профиля появляются зоны регулярных мелкомасштабных (с периодом $\sim \varepsilon$) колебаний. С течением времени осцилляторные области расширяются и перекрываются. Показано, что при $t \rightarrow \infty$ возникающая структура может быть представлена в виде однородной в пространстве и времени системы случайных взаимодействующих солитонов. Они описываются функцией распределения солитонов по амплитудам $f(a)$, а также средней плотностью солитонов в пространстве x , которая определяет интенсивность их взаимодействия. Приведены конкретные примеры вычисления функции $f(a)$ и средней плотности солитонов.

В следующем, четвертом разделе рассматривается случай, когда начальная функция $u_0(x)$ представляет собой бесконечную последовательность отдельных импульсов. Найдена установившаяся функция распределения по скоростям $f_\infty(u)$, которая, с одной стороны, имеет определенные общие черты с функцией распределения $f(u)$, полученной для той же начальной задачи в холфовском пределе, но, с другой стороны, значительно от нее отличается. Наконец, в последнем, пятом разделе определена для той же задачи устанавливающаяся при $t \rightarrow \infty$ стационарная корреляционная функция $K(s)$ и, соответственно, спектральная мощность процесса.

В заключении сформулированы основные особенности рассматриваемого процесса — генерации солитонной турбулентности в динамике сплошной одномерной недиссипативной среды, описываемой интегрируемым уравнением КдВ. Кроме того, проведено краткое сопоставление с другими известными механизмами возникновения хаотического состояния в динамических системах. Разумеется, строгое обоснование рассматриваемых здесь стохастических систем требует специального математического исследования.

Отметим также, что интегрирование уравнения КдВ методом обратной задачи рассеяния устанавливает прямую связь рассматриваемой динамической теории со спектральной теорией неупорядоченных систем, предметом которой является квантовомеханическое уравнение Шредингера с так называемыми «метрически транзитивными случайными потенциалами» [11, 12]. Можно поэтому предполагать, что развиваемые здесь методы будут представлять интерес не только для нелинейной динамики, но и для теории указанных квантовых систем.

2. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЙ ПРЕДЕЛ

Основные особенности процесса эргодического размешивания могут быть проиллюстрированы на примере бездисперсионной эволюции, описываемой уравнением Хопфа

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $u_0(x)$ — произвольная гладкая осциллирующая непериодическая функция, заданная на всей оси x . Будем считать также, что расстояния l между нулями заключены в промежутке

$$l_{min} \leq l \leq l_{max}, \tag{3}$$

где l_{min} и l_{max} — произвольные конечные величины. Функция $u_0(x)$ имеет конечные максимальное u_{max} и минимальное u_{min} значения:

$$u_{0min} \leq u_0(x) \leq u_{0max}. \tag{4}$$

Предположим, кроме того, что $u_0(x)$ однородна в пространстве, т.е. что существует сколь угодно большой, но конечный масштаб L , начиная с которого все основные свойства функции $u_0(x)$ повторяются. Последнее условие исключает возможность особого поведения функции $u_0(x)$ на бесконечности. Необходимо также, чтобы значение

$$u_0(x) = u_{0min} \tag{5}$$

не менее одного раза повторялось на масштабе L . Условиям (2)–(5) удовлетворяют, например, почти периодические или квазипериодические функции $u_0(x)$.

Эволюция (2), (3), как известно [13], приводит за конечное время $t = t_k$ к появлению особенности (рис. 1а)

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_k} \rightarrow \infty. \tag{6}$$

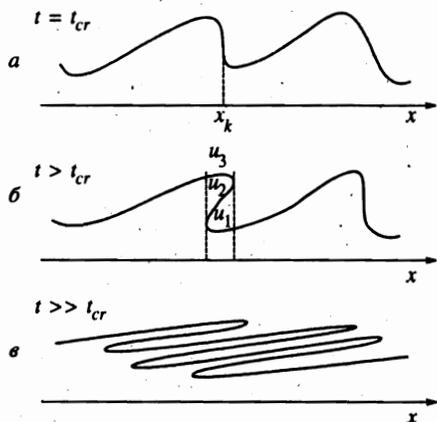


Рис. 1. Возникновение многопоточных течений в уравнении Хопфа

В условиях отсутствия диссипации и дисперсии в системе допустимо многопотокное движение. В этом случае при $t > t_k$ в окрестности особенности (6) образуются три потока u_i ($i = 1, 2, 3$), каждый из которых по-прежнему описывается уравнением Хопфа

$$\partial_t u_i + V_i \partial_x u_i = 0, \quad V_i = u_i. \quad (7)$$

В особых точках — точках каустик, определяемых условием (6), — потоки сшиваются (см. [14]) и многопотокная система замыкается (рис. 1б). Такое описание, разумеется, эквивалентно неявному решению уравнения Хопфа

$$x = ut + x_0(u), \quad (8)$$

описывающему эволюцию $u(x, t)$ в терминах многозначных функций. Здесь $x_0(u)$ — функция обратная $u_0(x)$. Отметим, что принципиально другой подход к решению уравнения Хопфа, рассматриваемого как предел диссипативного уравнения Бюргерса, осуществлен в работе Синая [15].

Для начальной задачи (2), как нетрудно убедиться, образующиеся области трехпотокного течения с ростом t при $t > t_k$ постепенно расширяются; затем вследствие пересечения областей опрокидывания начального профиля $u_0(x)$ последовательно появляются области пятипотокного течения, семипотокного течения и т. д. (рис. 1в). Для описания процесса размножения потоков удобно использовать функцию распределения плотности числа потоков $f(u, x, t)$ в фазовом пространстве (u, x) системы (2), удовлетворяющую уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Динамической постановке соответствуют начальные условия в виде δ -функции:

$$f_0(u, x, 0) = \delta(u - u_0(x)). \quad (10)$$

В нашем случае $u_0(x)$ — осциллирующая непериодическая функция (2)–(5).

Система (2), (10) имеет очевидное решение

$$f(u, x, t) = f_0(u, x, t) = \delta(u - u_0(x - ut)). \quad (11)$$

Нули δ -функции (11) — суть потоки u_i в возникающей многопотокковой системе (7). Они определяются как ветви многозначной кривой $u(x, t)$, задаваемой неявным решением уравнения Хопфа (8). Решение (11) можно представить при этом в виде [14]:

$$f(u, x, t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(x, t) \delta(u - u_i(x, t)), \quad (12)$$

где N — полное число потоков в данной точке x в момент t , а $\rho_i(x, t)$ — относительный вес (или плотность) i -го потока:

$$\rho_i(x, t) = \frac{1}{1 + |dx_0/du|_i^{-1} t}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что вес ρ_i в любой момент времени t определяется непосредственно начальной функцией $u_0(x)$.

Укажем теперь основные асимптотические свойства решения (11), (12) для начальной функции (2).

1. Число потоков N в любой точке x при $t \rightarrow \infty$ растет пропорционально времени:

$$N \propto at, \quad \frac{\langle |u_0| \rangle}{l_{min}} < a < \frac{\langle |u_0| \rangle}{l_{max}}, \quad (14)$$

где $\langle |u_0| \rangle$ — среднее значение модуля начальной функции, а l_{min} и l_{max} — полупериоды, определенные согласно (3).

2. В любой данной точке x для любого значения u , принадлежащего интервалу (4), на котором определена начальная функция u_0 , всегда найдется поток u_i такой, что

$$|u - u_i| < \delta, \quad \delta = O(1/t). \quad (15)$$

3. Из (8), (12) следует асимптотика для каждого потока u_i при $t \gg 1$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = O(1/t), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = O(1/t).$$

В силу указанных свойств асимптотически при $t \rightarrow \infty$ функция распределения $f(u, x, t)$, как следует из (12)–(15), может быть представлена в виде

$$f(u, x, t) = f(u) + O(1/t).$$

Здесь

$$f(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \left| \frac{dx_0}{du} \right|_i \delta(u - u_i) \right\}, \quad N \propto t \quad (t \rightarrow \infty), \quad (16)$$

и суммирование идет по всем корням уравнения (8) при $t \rightarrow \infty$. Асимптотика (16) означает, что функция распределения (11), заданная в начальный момент времени $t = 0$ в виде δ -функции, т. е. одного потока в каждой точке x , с течением времени за счет размножения потоков равномерно размывается и при $t \rightarrow \infty$ обращается в первом приближении по $1/t$ в однородную в x -пространстве, но размазанную по всему интервалу начальных скоростей (4) функцию $f(u)$. Это и есть процесс эргодического размешивания.

Чтобы определить функцию $f(u)$, удобно воспользоваться усреднением основного уравнения (9) по пространственному интервалу $L \gg l_{max}$. Определяя

$$\bar{f}(u, t)_L = \frac{1}{L} \int_0^L f(u, x, t) dx, \quad (17)$$

находим из (9)

$$\frac{\partial \bar{f}(u, t)}{\partial t} = -\frac{u}{L} [f(u, L, t) - f(u, 0, t)].$$

Отсюда следует, что при $L \rightarrow \infty$

$$\left. \frac{\partial \bar{f}(u, t)}{\partial t} \right|_{L \rightarrow \infty} = 0$$

и, следовательно, усредненная функция от времени не зависит:

$$\bar{f}(u, t)_{L \rightarrow \infty} = \bar{f}(u). \quad (18)$$

Это означает, что предельная функция $f(u)$ может быть вычислена непосредственно в начальный момент $t = 0$ путем прямого пространственного усреднения начальной функции (11):

$$\begin{aligned} f(u) = \bar{f}_0(u) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \delta(u - u_0(x)) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{i=1}^{N(L)} \frac{\delta(x - x_i)}{|u'_0(x_i)|} dx = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N(L)} \frac{1}{|u'_0(x_i)|} = \left\langle \frac{1}{|u'_0|} \right\rangle_{x_i}. \end{aligned} \quad (19)$$

В последнем выражении скобки $\langle \dots \rangle_{x_i}$ означают усреднение по ансамблю корней $x_i = x(u)$ уравнения (2). Иначе говоря, значения $|u'_0|$ берутся в точках $x_i(u)$, определяемых соотношением

$$u = u_0(x). \quad (20)$$

Подчеркнем, что существование пределов (15), (17), (18) обеспечивается эргодичностью начальной функции (2)–(5) (точное определение эргодичности см., например, в [16]).

Аналогичным образом могут быть найдены двухточечная функция распределения, а также высшие вероятностные характеристики размешанного состояния. Действительно, учитывая, что предельная функция $f(u)$ не зависит от x , нетрудно убедиться, что тем же свойством обладает в размешанном состоянии и двухточечная функция распределения $F_2(v_1, v_2; x', x''; t)$. Действительно, функция F_2 удовлетворяет уравнению Лиувилля, аналогичному (9):

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F_2}{\partial x'} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial x''} = 0 \quad (21)$$

с начальными условиями

$$F_2(v_1, v_2; x', x''; 0) = \delta(v_1 - u_0(x')) \delta(v_2 - u_0(x'')). \quad (22)$$

В уравнении (21) удобно перейти к новым переменным

$$s = x' - x'', \quad x = x''.$$

Тогда оно примет вид

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + (v_1 - v_2) \frac{\partial F_2}{\partial s} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$$

Ввиду пространственной однородности задачи усредним функцию F_2 по x на отрезке $[0, L]$. Для усредненной функции $\langle F_2 \rangle_L$ при этом получим уравнение

$$\frac{\partial \langle F_2 \rangle_L}{\partial t} + (v_1 - v_2) \frac{\partial \langle F_2 \rangle_L}{\partial s} = O(1/L) \quad (23)$$

с начальным условием

$$\langle F_2 \rangle_L(v_1, v_2; s; 0) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \delta(v_1 - u_0(x)) \delta(v_2 - u_0(x + s)) dx. \quad (24)$$

Решение уравнения (23) легко найти, оно имеет вид

$$\langle F_2 \rangle_L(v_1, v_2, s, t) = \frac{1}{L^2} \int_0^L \delta(v_1 - u_0(x)) \delta(v_2 - u_0(x + s - (v_2 - v_1)t)) dx + O(1/L). \quad (25)$$

Выражение (25) можно представить в виде суммы дельта-функций:

$$\langle F_2 \rangle_L(v_1, v_2, s, t) = \frac{1}{L^2} \sum_{a,b}^{N(L)} \frac{\delta(s + x_0^a(v_1) - x_0^b(v_2) - (v_2 - v_1)t)}{|u_0'(x_0^a(v_1))| |u_0'(x_0^b(v_2))|}, \quad (26)$$

где, как и прежде, $x_0^a(u)$ являются корнями уравнения $u_0(x_0^a) = v_1$. Физический смысл аргумента дельта-функции (26) очевиден. Он описывает увеличение расстояния s между коррелированными соседними точками x_1 и x_2 со временем в предположении, что в начальный момент эти точки находились на расстоянии $s_{ab} = x_0^a - x_0^b$. При достаточно больших временах, если $v_1 \neq v_2$, начальным расстоянием s_{ab} можно пренебречь. Тогда из выражения (26), устремляя $L \rightarrow \infty$, получим

$$\langle F_2 \rangle(v_1, v_2, s, t) = \delta(s - (v_1 - v_2)t) f(v_1) f(v_2), \quad v_1 \neq v_2, \quad (27)$$

где $f(v_1), f(v_2)$ — одночастичные функции распределения (19). Отсюда видно, что парная корреляционная функция в нашем случае носит, фактически, характер δ -корреляции и полностью определяется одночастичным распределением. Как видно из (27), пространственные корреляции пропорциональны $(1/t)\delta(s/t - (v_1 - v_2))$ и, следовательно, при любом конечном s затухают со временем как $1/t$.

Заметим, что при выводе соотношения (27) предполагалось, что начальная функция $u_0(x)$ непериодическая. Легко видеть, что в случае периодической функции мы получим аналогичные соотношения, но в выражении (27) будет стоять сумма членов $\delta(s - (v_2 - v_1)t + X_0 n)$, где n — любое целое число, а X_0 — период. Аналогичные соотношения имеют место и для высших корреляционных функций F_n , которые описываются уравнением

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ существует лишь одна ненулевая функция $f(u)$. Это и означает полное размытие начального распределения $u_0(x)$. Предельное размешанное состояние (16), (19) является, таким образом, полностью некоррелированным.

Рассмотрим некоторые примеры процесса размешивания.

Пример 1. Начальные данные в виде периодической функции.

Зададим начальную функцию в виде

$$u_0 = a \sin x. \quad (28)$$

Из (28), (19) следует, что $x = \arcsin(u/a)$ и

$$f(u) = \frac{C}{a |\cos x(u)|} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - u^2}}. \quad (29)$$

Нормировочная константа в (29) выбрана из условия

$$\int_{-a}^a f(u) du = 1.$$

Подчеркнем, что хотя определенная согласно (29) вероятность $f(u)$ для периодической начальной функции $u_0(x + X_0) = u_0(x)$ имеет вполне реальный смысл, полного стохастического размешивания в этом случае не происходит: например, парная корреляционная функция при $v_1 = v_2$ и все высшие корреляции имеют в первом порядке по $1/t$ бесконечные пики при $x_k - x_m = nX_0$ (26).

Пример 2. Квазипериодические начальные данные.

Пусть начальная скорость задана в виде

$$u_0(x) = (a_0 + a_1 \sin(kx)) \sin x. \quad (30)$$

где k — произвольное иррациональное число, $k \ll 1$. Выделяя быстрые и медленные переменные, представим функцию $u_0(x)$ в виде

$$u_0(x) = a(X) \sin x,$$

где

$$X = kx, \quad a(X) = a_0 + a_1 \sin X.$$

Тогда с точностью $O(k)$ для функции $f_\infty(u)$ получим

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dX}{\sqrt{a^2(X) - u^2}}. \quad (31)$$

Эта функция может быть выражена через эллиптические интегралы.

Пример 3. Бесконечная последовательность отдельных импульсов.

Рассмотрим начальную динамическую задачу $u(x, 0)$ в виде бесконечной последовательности импульсов одинаковой формы F :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_i F \left(\frac{x - x_{0i}}{\theta} \right). \quad (32)$$

Здесь θ — ширина импульса, точка x_{0i} определяет положение максимума i -го импульса. Примем, что в максимуме $F(0) = 1$, тогда $0 \leq F \leq 1$. Среднее расстояние между соседними точками x_i равно l , а отношение ширины импульса θ к расстоянию между импульсами есть

$$\gamma = \frac{\theta}{l}. \quad (33)$$

Величина γ является характерным параметром рассматриваемой начальной задачи. Используя (19), находим функцию распределения в виде

$$f(u) = (1 - a^{(1)}\gamma)\delta(u) + \gamma f_1(u), \tag{34}$$

где функция $f_1(u)$ имеет обычный вид:

$$\gamma f_1(u) = \left\langle \left| \frac{du}{dx} \right|^{-1} \right\rangle_{x_i} = \frac{2}{l} \left| \frac{du}{dx} \right|^{-1}, \tag{35}$$

$x_i(u)$ — корни уравнения (19), определяемые формой начального импульса $F(\xi)$. Усреднение в (35) проведено по масштабу, превышающему ширину начального импульса θ . Наличие δ -функции в решении вполне понятно — начальное распределение (32) в качестве наиболее вероятного значения имеет $u = 0$. Постоянная $a^{(1)}$ определяется условием нормировки.

Например, если форма импульса имеет вид

$$F(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{(\theta/2)^2}, \quad u_0(x) = 1 - \frac{x^2}{(\theta/2)^2}, \tag{36}$$

то из (35) находим

$$x(u) = \pm \frac{\theta}{2} \sqrt{1-u}, \quad \left| \frac{du}{dx} \right| = \frac{4}{\theta} \sqrt{1-u}$$

и, соответственно,

$$f_1(u) = \frac{1}{2\sqrt{1-u}}, \quad a^{(1)} = \int_0^1 f_1(u) du = 1. \tag{37}$$

Пример 4. Случайная начальная функция.

Выше мы рассматривали чисто динамическую начальную модель. Вполне аналогично процесс размешивания протекает и тогда, когда начальное условие задано случайной функцией. Например, если начальная функция является периодической со случайной амплитудой a , то, как нетрудно видеть, для установившейся после размешивания функции распределения вместо (29) имеем

$$f(u) = \int \psi(a) \frac{da}{\pi \sqrt{a^2 - u^2}}, \tag{38}$$

где $\psi(a)$ — заданное распределение случайной величины a . Аналогично усреднение по параметрам a_0 , a_1 и k можно провести и для квазипериодической начальной функции (30).

3. СТОХАСТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ

Перейдем теперь к рассмотрению нашей основной задачи — исследованию асимптотических свойств решения уравнения КдВ (1) для случая непериодических осциллирующих начальных условий (2)–(5). Поскольку мы будем существенно использовать при этом особенности так называемых многофазных конечнозонных решений КдВ, вначале естественно напомнить структуру этих решений.

3.1. Многофазные решения КдВ

При интегрировании уравнения КдВ методом обратной задачи рассеяния определяющую роль играет структура начального потенциала $-u_0(x)$. В случае, когда начальный потенциал является периодической функцией специального класса, спектр задачи рассеяния состоит из конечного числа разрешенных зон (см. [5–7]). Построенные для таких начальных условий решения уравнения КдВ являются многофазными (g -фазными). Они находятся в теории конечнозонного интегрирования с помощью так называемой формулы следов (см. [17, 1])

$$u_g(x, t) = r_1 - 2 \sum_{j=1}^g \left(\mu_j(x, t) - \frac{r_{2j} + r_{2j+1}}{2} \right), \quad (39)$$

где константы $r_j > 0$, $j = 1, \dots, 2g + 1$, представляют собой точки ветвления спектральной поверхности комплексной переменной λ в конечнозонной задаче рассеяния. Эта поверхность задается алгебраическим уравнением

$$y^2 = R_g(\lambda) = - \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - r_j), \quad (40)$$

$$r_1 < r_2 < \dots < r_{2g+1},$$

и является двулистной римановой поверхностью рода g с разрезами вдоль разрешенных зон $(-\infty, r_1]$, $[r_2, r_3]$, ..., $[r_{2g}, r_{2g+1}]$.

Функции $\mu_j(x, t)$ (так называемый дополнительный спектр конечнозонной задачи рассеяния) описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений Дубровина

$$\varepsilon \frac{\partial \mu_j}{\partial x} = \frac{2i\sigma_j R_g^{1/2}(\mu_j)}{\prod_{j \neq k} (\mu_j - \mu_k)}, \quad j = 1, 2, \dots, g. \quad (41)$$

Здесь $\sigma_j = \pm 1$ — знаки квадратного корня функции $R_g(\mu_j)$. Каждое μ_j лежит в своей запрещенной зоне $[r_{2j-1}, r_{2j}]$ и осциллирует при изменениях x , причем каждый раз, когда μ_j достигает края зоны, σ_j меняет знак и движение переходит на другой лист римановой поверхности. Характерный период осцилляций функций μ_j , как ясно из (41), имеет порядок ε .

Уравнения (41) описывают в общем случае систему связанных нелинейных осцилляторов. При $g = 1$ осциллятор один и из (39), (41) следует единственное уравнение, решение которого выражается через эллиптическую функцию Якоби [18]:

$$u_1(x) = 2(r_2 - r_1) \operatorname{cn}^2 \left((r_3 - r_1)^{1/2} \frac{x}{\varepsilon} + \varphi_0 \mid m \right) + r_1 + r_3 - r_2, \quad (42)$$

где $m = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1)$ — параметр эллиптической функции, а φ_0 — произвольная начальная фаза (константа интегрирования). Решение $u_1(x)$ — периодическая функция x с амплитудой a и периодом T :

$$a = 2(r_2 - r_1), \quad T = 2^{1/2} \varepsilon (r_3 - r_1)^{-1/2} K(m), \quad (43)$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $m \rightarrow 1$ колебания вырождаются в цепочку отдельных солитонов высоты a , причем расстояние между солитонами растет с уменьшением разности $r_3 - r_2$, т. е. с уменьшением ширины разрешенной зоны:

$$T = 2^{-1/2} \varepsilon \ln \left(16 \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} \right). \quad (44)$$

При $g = 2$ система (41) описывает два связанных осциллятора, в частности, движение тяжелого волчка (случай Ковалевской) (см., например, [19]). Результаты численного интегрирования системы (41) для различных g приведены на рис. 2. Видно, что с ростом g форма колебаний (39) становится все более сложной, для достаточно больших g они внешне выглядят неупорядоченными. Это и понятно — если однозонное решение $g = 1$ содержит лишь один период и его нелинейные гармоники, то g -фазное решение является квазипериодической функцией и содержит g независимых периодов, а также все их нелинейные гармоники.

Следует, вместе с тем, подчеркнуть, что в многофазном решении, как и в случае (42) $g = 1$, сужение разрешенной j -ой зоны, $(r_{2j+1} - r_{2j}) \rightarrow 0$, приводит к выделению спе-

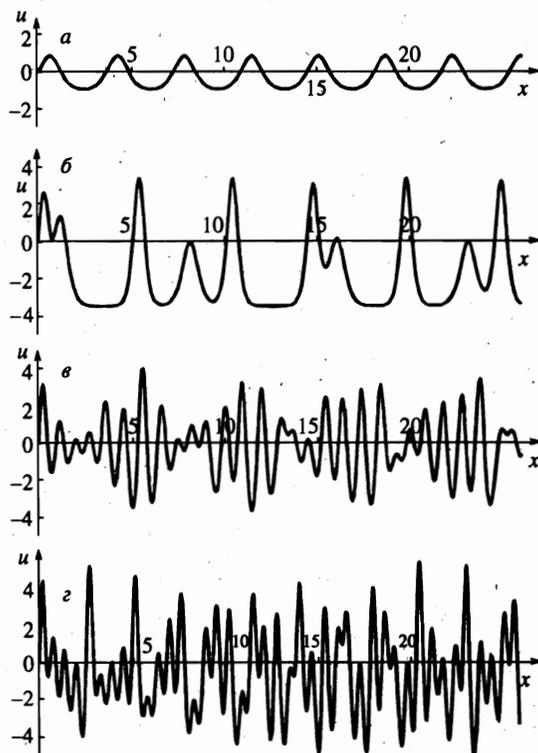


Рис. 2. Многофазные решения КдВ. а — Однофазное: $r_1 = 0; r_2 = 0.2; r_3 = 2$. б — Двухфазное: $r_1 = 0; r_2 = 0.001; r_3 = 3.5; r_4 = 3.5005; r_5 = 7$. в — Пятифазное: $r_1 = 0; r_2 = 1; r_3 = 2; r_4 = 3; r_5 = 4; r_6 = 5; r_7 = 6; r_8 = 7; r_9 = 10; r_{10} = 11; r_{11} = 14$. г — Шестифазное: $r_1 = 0; r_2 = 0.7; r_3 = 4; r_4 = 5.6; r_5 = 5.7; r_6 = 5.8; r_7 = 8.6; r_8 = 13.2; r_9 = 15.6; r_{10} = 22; r_{11} = 23.1; r_{12} = 23.11; r_{13} = 27.4$

циальных нелинейных осцилляций в виде соответствующих этой зоне солитонов, разделенных большим интервалом (44):

$$T_j \propto \varepsilon \ln(1/(r_{2j+1} - r_{2j})). \quad (45)$$

В случае же, когда все разрешенные зоны являются узкими, $r_{2j+1} - r_{2j} \rightarrow 0$, $j = 1, 2, \dots, g$, все g -фазное решение распадается на солитоны различной амплитуды (рис. 2б). При $\varepsilon g \ll T_j$ эти солитоны в первом приближении по параметру $\varepsilon g/T$ свободны.

Временная эволюция функций $\mu_j(x, t)$ описывается слабонелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial t} = 2(-u_g(x, t) + 2\mu_j) \frac{\partial \mu_j}{\partial x} \quad (46)$$

с начальными данными, которые находятся интегрированием стационарной системы (41).

Отметим также, что конечнозонное решение КдВ (39)–(41), (46) может быть выражено через алгебраическую функцию на g -мерном торе — тэта-функцию римановой поверхности (40) (см. [19]).

3.2. Процесс стохастизации

Начнем с краткого описания эволюции одиночного локализованного возмущения

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(+\infty) = u_0(-\infty) = 0. \quad (47)$$

Развитие со временем гладкого возмущения $u(x, t)$ описывается вначале уравнением Хопфа (2), так как член с высшей производной в изучаемом пределе слабой дисперсии $\varepsilon \rightarrow 0$ вначале несуществен. После прохождения в момент t_k критической точки опрокидывания x_k , где $|\partial u / \partial x| \rightarrow \infty$, в решении уравнения Хопфа в окрестности точки x_k появляются три потока (7), (12), т.е. при $t > t_k$ здесь возникает многопоточное течение (рис. 1). В решении уравнения КдВ определяющую роль начинает играть дисперсионный член с высшей производной $\varepsilon^2 \partial^3 u / \partial x^3$. Благодаря этому решение уравнения КдВ остается всегда однозначным, т.е. однопоточным, но зато в окрестности точки опрокидывания возбуждаются мелкомасштабные (с периодом $\sim \varepsilon$) колебания. Важно, что эти мелкомасштабные колебания могут быть представлены в виде однофазного решения уравнения КдВ (42), (43) с медленно изменяющимися в пространстве x и времени t точками ветвления на римановой поверхности — параметрами r_1, r_2, r_3 . Изменение параметров $r_i(x, t)$ описывается системой модуляционных уравнений Уизема [20]:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_i(r_1, \dots, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (48)$$

$$r_3 \geq r_2 \geq r_1 \geq 0, \quad V_3 \geq V_2 \geq V_1 \geq 0.$$

Мы видим, что система уравнений для римановских инвариантов r_1, r_2, r_3 в области осцилляций вполне аналогична уравнениям Хопфа для трех потоков, возникающих после опрокидывания (7). Эта аналогия распространяется и дальше в характере сшивки с неосциллирующей частью решения [4]: сшивка происходит в каустической точке

$x^-(t)$, где сливаются не только инварианты r_1 и r_2 , но и скорости V_1 и V_2 ; аналогичное слияние инвариантов r_2 и r_3 и скоростей V_2 и V_3 происходит в точке $x^+(t)$ (см. рис. 3а). Отличие от трехпоточковых уравнений Хопфа (7) состоит в том, что групповые скорости V_i зависят теперь от всех трех инвариантов, а не только от r_i . Однако выполнение условий (48) и условий сшивки инвариантов показывает, что динамика инвариантов Римана качественно вполне подобна развитию трехпоточкового течения. Это полностью подтверждают решения соответствующих задач, полученных при различных начальных условиях (см. [4, 21–26]).

Перейдем теперь к интересующему нас осциллирующему начальному условию (2)–(5). В этом случае опрокидывание происходит в каждой точке перегиба начальной кривой $u_0(x)$ (рис. 3б). Здесь развиваются зоны однофазных осцилляций. Затем с течением времени зоны однофазных осцилляций начинают перекрываться. При этом развиваются двухфазные, затем трехфазные осцилляции (рис. 3в) и т. д. Они описываются соответственно пятью, семью и т. д. римановыми инвариантами. Изменение римановых инвариантов r_i для g -фазной структуры описывается обобщенной системой уравнений Уизема (Флашка, Кричевер и др. [27, 3, 28, 29]):

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_i(r_1, \dots, r_{2g+1}) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, 2g + 1, \tag{49}$$

$$r_{2g+1} \geq r_{2g} \geq \dots \geq r_1 \geq 0, \quad V_{2g+1} \geq V_{2g} \geq \dots \geq V_1 \geq 0.$$

Уравнения (49) записаны в системе координат, движущейся со скоростью u_{0min} . При этом переход от g -фазной структуры к $(g+1)$ - или $(g-1)$ -фазной структуре совершается в каустических точках x_g^\pm , где, согласно правилу, описанному выше для однофазной системы, происходит слияние инвариантов [30]. Для начальной задачи (2)–(5) с течением времени количество фаз в каждой точке возрастает, $g \propto t$, а поскольку область определения параметров r_i задана начальными условиями (4) в ограниченном масштабе

$$u_{0max} - u_{0min} \geq r \geq 0, \tag{50}$$

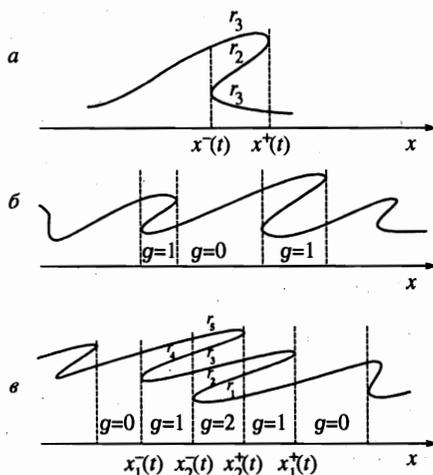


Рис. 3. Возникновение многофазной структуры

то это означает, что среднее расстояние между инвариантами $\langle \Delta r \rangle = \langle |r_{i+1} - r_i| \rangle$ убывает со временем пропорционально t :

$$\langle \Delta r \rangle \propto 1/t.$$

Описанный процесс полностью подобен размножению потоков в решении уравнения Хопфа и происходит равномерно во всем пространстве x . Поэтому по аналогии с многопотоковым решением уравнения Хопфа, исследованным в разд. 2, асимптотически при $t \rightarrow \infty$ устанавливается с точностью $O(1/t)$ вполне определенное стационарное распределение $F(r)$ по инвариантам r . Функция распределения $F(r)$ описывает относительную плотность инвариантов r_i в интервале от r до $r + dr$. Естественное правило нормировки имеет вид

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} F(r) dr = 1. \quad (51)$$

Значения r_{\min} и r_{\max} определены в соответствии с (50). Фазовые соотношения различных мод осцилляций при этом несущественны, так что переход при $t \rightarrow \infty$ к непрерывному распределению $F(r)$ представляет собой уже стохастическое описание системы. Определенным аналогом такого описания может быть континуальный предел Θ -функции, введенный Венакидесом [31].

3.3. Стохастическая многосолитонная структура

Остановимся теперь на одном важном отличии структуры римановых инвариантов решения КдВ для начальной задачи (2)–(5) от структуры многопотокового течения Хопфа. Вернемся для этого к анализу одиночного локализованного возмущения. При $t \gg 1$ асимптотическое поведение решения начальной задачи (47) принимает вид так называемой солитонной волны [23, 24] — набора солитонов, выстроенных по амплитуде: впереди солитон с наибольшей амплитудой, за ним солитон с меньшей амплитудой и т. д. Расстояние между солитонами линейно растет со временем, $T_s \propto t$, что является естественным следствием линейной зависимости скорости солитона от амплитуды [2]. Но, как следует из (44), это означает, что ширина разрешенной зоны $r_3 - r_2$ экспоненциально сужается со временем:

$$r_3 - r_2 = r_3 \exp\left(-\frac{t}{\tau(r_3)}\right), \quad r_1 \rightarrow 0, \quad t \gg 1. \quad (52)$$

Аналогичная ситуация имеет место и для двухфазной, трехфазной и любой многофазной системы при $t \rightarrow \infty$. Солитоны разной амплитуды a_{sj} , принадлежащие каждой данной фазе j , движутся с разной скоростью $V(a_{sj})$. Следовательно, со временем увеличивается период T_j и, соответственно, согласно (45), экспоненциально убывает ширина j -ой разрешенной зоны:

$$r_{2j+1} - r_{2j} \propto \exp(-t/\tau_j). \quad (53)$$

Таким образом, в исследуемой нами многофазной структуре при $t \rightarrow \infty$ ширины разрешенных зон в каждой точке x экспоненциально сжимаются, а ширины запрещенных зон (r_{2j}, r_{2j+1}) , (r_{2j+2}, r_{2j+3}) и т. д. убывают лишь как $1/t$. Эта особенность отличает

структуру распределения инвариантов в уравнении КдВ от структуры многопоточковых течений уравнения Хопфа, где все $2j + 1$ потока равноправны. Вместе с тем, из (53) вытекает важное следствие для хаотической структуры уравнения КдВ. Прежде всего, из выполнения условия (53) для каждой фазы следует, что развивающаяся при $t \rightarrow \infty$ из начального условия (2)–(5) структура представляет собой систему взаимодействующих солитонов (см. (45)). Далее из (53) вытекает, что солитоны, принадлежащие данной моде, т. е. связанные единым происхождением из одного горба начальной функции $u_0(x)$ (2) и, тем самым, связанные вначале определенным фазовым соотношением, находятся на большом и все возрастающем со временем расстоянии T_j друг от друга: $T_j \propto t$. Но это означает, что вследствие общего закона сохранения средней плотности пространство между ними заполняется солитонами, принадлежащими другим модам, т. е. солитонами, не связанными общим происхождением и обладающими, следовательно, случайными фазами. В результате при $t \rightarrow \infty$ во всем пространстве устанавливается фактически случайное распределение солитонов с равномерно распределенными фазами. Каждый солитон можно характеризовать поэтому лишь его амплитудой a . Максимальное значение амплитуды ограничено заданным начальным условием $u_0(x)$ (2), (43), (50):

$$a_m = 2(u_{0max} - u_{0min}).$$

При этом для непериодической осциллирующей начальной задачи (2)–(5) множество амплитуд солитонов счетное и всюду плотное на интервале $0 \leq a \leq a_m$. Возникающую хаотическую структуру можно описать поэтому функцией распределения по амплитудам:

$$f(a), \quad 0 \leq a \leq a_m. \tag{54}$$

В дальнейшем будем принимать $u_{0min} = 0$, $u_{0max} = 1$ и, соответственно, $a_m = 2$.

Существование при $t \rightarrow \infty$ не зависящего от x предела $f(a)$ является следствием эргодичности начальной функции $u_0(x)$. Функция распределения солитонов по амплитудам $f(a)$ определяется непосредственно видом начальной функции $u_0(x)$ (2). Действительно, согласно обратной задаче рассеяния, солитоны соответствуют уровням дискретного спектра уравнения Шредингера с потенциалом $-u_0(x)$. В силу малости параметра ϵ при решении уравнения Шредингера можно воспользоваться квазиклассическим приближением. Тогда распределение солитонов по амплитудам $f(a)$, описывающее число солитонов с амплитудами в интервале от a до $a + da$,

$$dW = f(a) da, \tag{55}$$

определяется формой каждой отдельной потенциальной ямы начальной функции. А именно [23]:

$$f(a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{a/2}^1 \frac{D'(z)}{\sqrt{z - a/2}} dz. \tag{56}$$

Здесь $D(z)$ — ширина начальной ямы на уровне $u = z$. Производная $D'(z)$ связана с начальной формой ямы $F(\xi)$ очевидным соотношением:

$$D'(z) = - \left(\frac{\theta}{|dF/d\xi|_{\xi_1(z)}} + \frac{\theta}{|dF/d\xi|_{\xi_2(z)}} \right), \quad (57)$$

где $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ — значения двузначной функции обратной к $F(\xi)$ в точке $F(\xi) = z$. В силу малости параметра ε систему уровней можно рассматривать независимо в каждой яме. В результате получим

$$f(a) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_k(a), \quad (58)$$

где f_k — функция распределения в k -ой яме.

Таким образом, функция $f(a)$ нормирована на среднее число солитонов в яме N . Согласно условию (4), можно ограничиться в этой сумме конечным числом ям начальной функции m на выделенном на оси x достаточно большом интервале L . При этом, согласно (2)–(5), функция распределения $f(a)$ с точностью $O(\theta/L)$ не зависит от того, на каком участке L начальной функции она вычисляется. Приведем примеры.

Пример 1. Пусть $u_0(x)$ представляет собой последовательность отдельных импульсов вида (38). Тогда, согласно (56), имеем

$$f(a) = \frac{\theta}{8\pi\varepsilon} \int_{a/2}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{z-a/2}} = \frac{\theta}{8\varepsilon}. \quad (59)$$

Будем считать, что ширина импульсов промодулирована:

$$\theta = \theta_0 (1 + b \cos^2(kx)), \quad k \ll 1.$$

В этом случае, усредняя по масштабу $L \gg 1/k$, получим непрерывное распределение солитонов

$$f(a) = \frac{\theta_0}{8\varepsilon} \left(1 + \frac{b}{2} \right).$$

Пример 2. Пусть $u_0(x) = b(1 - \cos x)$, тогда $D(z) = 2 \arccos(1 - z/b)$ и из (56) получим

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\varepsilon\sqrt{b}} \int_{\arccos(1-a/2b)}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-a/2b - \cos t}} = \frac{1}{\pi\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{ab}} F \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{a}{8b}} \right); \sqrt{\frac{8b}{a}} \right), \quad (60)$$

где $F(\phi; m)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода.

Рассматривая далее медленное изменение амплитуды колебаний начальной функции $u_0(x)$ вида $b = 1 + b_1 \sin(kx)$ ($b_1 < 1$; $k \ll 1$, иррациональное), можно и здесь получить непрерывное распределение $f(a)$, усредняя (60) по масштабу $L \gg 1/k$:

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2a}\pi^2\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz}{\sqrt{1+b_1 \sin z}} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{a}{8(1+b_1 \sin z)}}; \sqrt{\frac{8(1+b_1 \sin z)}{a}} \right).$$

Другим важным параметром является средняя пространственная плотность солитонов C , характеризующая их взаимодействие. Средняя пространственная плотность солитонов C также определяется непосредственно видом начальной функции $u_0(x)$. Действительно, полное число солитонов в одной отдельной яме, согласно (56), есть

$$N_i = \int f_i(a) da. \quad (61)$$

Определяя общее число солитонов во всех ямах на «представительном» масштабе L , находим среднюю плотность солитонов, соответствующую данной начальной задаче:

$$C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^m N_i. \quad (62)$$

По условиям (3)–(5) плотность C не зависит от выбора участка начального распределения. Например, для плотности солитонов в случае (59) имеем

$$C = \frac{\gamma}{4\varepsilon} \left(1 + \frac{b}{2} \right),$$

где в соответствии с (33) $\gamma = \theta_0/l$ (l — среднее расстояние между импульсами). Подчеркнем, что плотность ограничена — она не превосходит величины порядка $1/\varepsilon$. Например, в случае однофазной волны (42) минимальное значение периода колебаний T_{min} достигается при $m \rightarrow 0$ и равно (43)

$$T_{min} = \frac{\pi\varepsilon}{a^{1/2}}.$$

Соответственно, максимальное значение плотности равно

$$C_m = \frac{1}{T_{min}} = \frac{a^{1/2}}{\pi\varepsilon}.$$

Отсюда видно, что величина C_m уменьшается с уменьшением амплитуды солитонов. Заметим, что функция распределения солитонов, нормированная на пространственную плотность солитонов, есть $f_C(a) = Cf(a)$.

Подчеркнем, что возможность описания основных свойств рассматриваемой структуры с помощью хаотической системы солитонов, характеризуемых лишь распределением по амплитудам и средней плотностью, определена видом начальной функции $u_0(x)$. Важную роль играет при этом условие пространственной однородности начальной функции $u_0(x)$ и условие (5), благодаря которым исключается влияние особой точки на бесконечности ($x \rightarrow \pm\infty$).

Несмотря на то что, как указывалось выше, определенным аналогом рассматриваемой здесь системы является континуальный предел Θ -функции [31], необходимо обратить внимание и на их существенное различие. Дело в том, что в [31] рассматривается предел для g -зонной структуры, возникающий, например, в случае периодической начальной задачи. Эта структура образована большим числом $g \sim N \sim 1/\varepsilon$ солитонных решеток [29], каждая из которых соответствует определенной зоне. Ширина разрешенных зон, описывающих решетки, при этом экспоненциально мала по сравнению с шириной запрещенных зон, описывающих различие в уровнях солитонов, принадлежащих соседним решеткам. Иначе говоря, амплитуды солитонов в размещенной системе не произвольны, а изменяются мелкими ($\sim \varepsilon$) скачками.

В рассматриваемой нами системе в асимптотике при $t \rightarrow \infty$ не возникает выделенных солитонных решеток. Квантовые уровни начального распределения образуют

непрерывную систему. Соответственно при $t \rightarrow \infty$ возникает и непрерывное распределение солитонов по амплитудам (56)–(58). Подчеркнем, что хотя в квазиклассическом пределе, рассматриваемом в [31], континуализированное описание дискретного спектра тождественно описанию непрерывного распределения солитонов, но при более детальном анализе, например при рассмотрении корреляционных функций, между ними могут возникать принципиальные различия, что видно уже на примере уравнения Хопфа. Более подробному рассмотрению соответствующих математических вопросов посвящена работа Крылова и др. [32].

4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОТДЕЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ В УРАВНЕНИИ КдВ

Рассмотрим для уравнения КдВ со слабой дисперсией $\epsilon \ll 1$ начальную задачу в виде бесконечной последовательности импульсов одинаковой формы (32). Будем считать импульсы редкими:

$$\gamma = \frac{\theta}{l} \ll 1. \quad (63)$$

В течение времени $t \leq 1/\gamma \gg 1$ каждый импульс может рассматриваться независимо. За это время импульс превращается в солитонную волну, т. е. распадется на большое число солитонов $N \sim \theta/\epsilon$, выстроенных по амплитудам [23, 24]. Полное число солитонов, возникающих в результате распада одного импульса, равно

$$N = \int_0^2 f(a) da = \frac{\theta}{\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{F(\xi)} d\xi. \quad (64)$$

Каждый солитон движется со своей скоростью v_s , пропорциональной его амплитуде:

$$v_s = 2a. \quad (65)$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение решения уравнения КдВ с начальным условием (2) и с учетом (63) при $t \rightarrow \infty$. Как показано в разд. 3, вследствие эргодичности рассматриваемой задачи система перейдет в равномерно размешанное по оси x стохастическое состояние. Исследовавшийся в разд. 3 процесс размножения мод эквивалентен в нашем случае постепенному наложению друг на друга солитонных волн, возникающих вследствие различия в скоростях солитонов (65). Рассматриваемый процесс размешивания тем более очевиден, что в линейном по γ приближении взаимодействием солитонов можно пренебречь. Речь идет тогда о размешивании в одномерном пространстве идеального газа невзаимодействующих частиц (солитонов), имеющих спектр скоростей $f(v_s)$. Отметим, что кинетика газа солитонов с учетом их взаимодействия рассматривалась Захаровым [33].

Для интересующей нас задачи важно, что каждый солитон имеет вполне определенную зависимость формы u от x и t :

$$u = u_s(x) = a \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{x - v_s t}{\epsilon} \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2} \right). \quad (66)$$

Поэтому, для того чтобы, следуя результатам разд. 2, найти в главном приближении функцию $f_\infty(u)$ распределения по скоростям u в стохастически размешанном состоянии, необходимо рассмотреть вначале функцию распределения плотности вероятности в солитонной волне фиксированной амплитуды:

$$f_a(u) = \langle \delta(u - u_s(x)) \rangle_{x_i} = \frac{2}{l} \left| \frac{du_s}{dx} \right|^{-1},$$

а затем провести ее усреднение по амплитудам солитонов:

$$f_\infty(u) = \frac{2}{l} \left\langle \frac{1}{|du_s/dx|} \right\rangle_a = \frac{2}{l} \int_u^2 f(a) \left| \frac{du_s}{dx} \right|^{-1} da. \quad (67)$$

Здесь принято во внимание, что солитоны распределены по амплитудам согласно (55), (56) и что вклад в $f_\infty(u)$ дают лишь солитоны с амплитудой, большей чем u . Учтем теперь, что величина $|du/dx|$ для солитонов (66) имеет универсальный вид:

$$\left| \frac{du_s}{dx} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} u \sqrt{a - u}. \quad (68)$$

Подставляя (68) в (56) и выполняя интегрирование, приходим к универсальному выражению для установившейся функции распределения:

$$f_\infty(u) = \gamma \frac{C_1}{u} D \left(\frac{u}{2} \right). \quad (69)$$

Здесь C_1 — нормировочная константа.

Из (69) видно, что функция распределения $f_\infty(u)$ неограниченно растет при $u \rightarrow 0$ пропорционально $1/u$, так что распределение (69) ненормируемо. Следует, однако, иметь в виду, что при очень малых u использованное нами приближение невзаимодействующих солитонов нарушается.

Для вычисления взаимодействия между солитонами (см. [1]) отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ солитоны перекрываются в основном своими экспоненциальными хвостами.

Поэтому величина скорости $u(x)$ в области взаимодействия может быть представлена в виде суперпозиции двух экспоненциальных солитонных «хвостов»:

$$u(x) = a \exp \left(-\frac{x}{\varepsilon} \sqrt{\frac{a}{2}} \right) + a_2 \exp \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{a_2}{2}} \right). \quad (70)$$

Как следует из (67), нам надо вычислить $x'(u)$ как функцию u . Продифференцировав выражение (70), после некоторой перегруппировки членов получим связь между $u'(x)$ и u :

$$\begin{aligned} \ln \left[(\sqrt{au} + \varepsilon \sqrt{2}u')(u\sqrt{a_2} - \varepsilon \sqrt{2}u')\sqrt{a_2/a} \right] &= -\frac{x_0}{\varepsilon} \sqrt{a_2/2} + \\ + \ln \left[(a^{3/2} + a\sqrt{a_2})\sqrt{a_2/a} (a_2\sqrt{a} + a_2^{3/2}) \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

Ввиду малости параметра γ выполняется следующее условие:

$$\frac{x_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{a_2}{2}} \gg \ln \left[(a^{3/2} + a\sqrt{a_2})\sqrt{a_2/a} (a_2\sqrt{a} + a_2^{3/2}) \right].$$

Поэтому решение уравнения (71) можно представить в виде

$$(\sqrt{a}u + \varepsilon\sqrt{3}u')(u\sqrt{a_2} - \varepsilon\sqrt{2}u')\sqrt{a_2/a} = \exp\left\{-\frac{x_0}{\varepsilon}\sqrt{\frac{a_2}{2}}\right\}. \quad (72)$$

Анализ выражения (72) показывает, что существует минимальное значение u_{min} такое, что при $u < u_{min}$ решение отсутствует, где

$$u_{min} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{\frac{a_2}{a}}\right)^{-\sqrt{a_2/a}/(1+\sqrt{a_2/a})} \exp\left\{-\frac{x_0}{\varepsilon} \frac{\sqrt{a_2/2}}{1+\sqrt{a_2/a}}\right\}.$$

При этом для dx/du имеем следующее соотношение:

$$\left|\frac{dx}{du}\right|_{u \rightarrow u_{min}} \propto \frac{1}{\sqrt{u - u_{min}}}, \quad u \geq u_{min}.$$

Таким образом, мы видим, что полученная ранее расходимость $1/u$ в выражении (69) для $f_\infty(u)$ обрезается при малых u на величинах $u = u_{min}$. Поэтому для устранения расходимости в (69) необходимо при усреднении ввести обрезание при $u = u_{min}$. Отметим, что точный расчет показывает, что результат не зависит от способа обрезания. Поэтому проще всего провести обрезание, вводя ступенчатую функцию Хевисайда $H(x)$, которая, как обычно, равна нулю при $x < 0$ и равна единице при $x > 0$. Эту функцию необходимо усреднить по положению второго солитона x_0 и по амплитудам a, a_2 . Можно показать, что вероятность взаимного расположения солитонов в размешанном стохастическом состоянии подчиняется пуассоновской статистике независимо от вида начального распределения. Распределение Пуассона является пространственным аналогом равномерного распределения фаз по периоду. Иначе говоря, вероятность того, что расстояние между солитонами принимает значение x_0 , есть

$$P(x_0) = \frac{4\varepsilon}{\gamma} \exp\left(-x_0 \frac{\gamma}{4\varepsilon}\right) \quad (73)$$

Здесь учтено, что среднее расстояние между солитонами в нашем случае (32), (62), (63) равно $4\varepsilon/\gamma$. Усреднив по пуассоновскому распределению (73), получим

$$\langle H(u) \rangle_{x_0} = \int_0^\infty P(x_0) H(u - u_{min}(x_0, a_2, a)) dx_0 = u^{\gamma/2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right). \quad (74)$$

Далее надо усреднить выражение (74) по амплитудам солитонов a, a_2 . Это усреднение проводится с использованием функции распределения солитонов по амплитудам a . В результате вместо соотношения (56) для функции $f_\infty(u)$ получаем нормированное распределение $f_\infty(u)$:

$$f_\infty(u) = \frac{\gamma}{2} u^{-1+\gamma/2} D\left(\frac{u}{2}\right). \quad (75)$$

Нормировочная константа в (75), как обычно, определена из соотношения

$$\int_0^\infty f_\infty(u) du = 1.$$

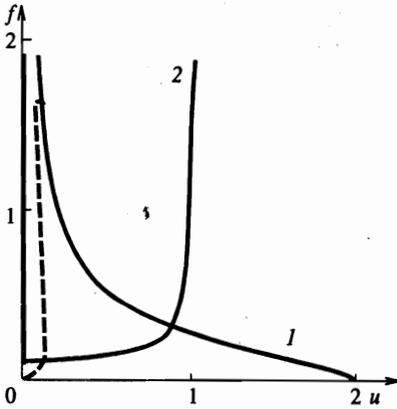


Рис. 4. Функция распределения по скорости $f(u)$ для начальной функции $u(x)$, определенной согласно (32), (36): 1 — уравнение КдВ (76). Штриховая линия — поправки $\propto \gamma^2$; 2 — бездисперсионный предел (34), (37) (уравнение Хопфа);

Так, например, для случая, когда начальная функция задается набором параболических импульсов (36), функция распределения при $\gamma \ll 1$ имеет вид

$$f_{\infty}(u) = \frac{\gamma}{2} u^{-1+\gamma/2} \sqrt{1 - \frac{u}{2}}. \tag{76}$$

Функция распределения (76) показана на рис. 4.

Отметим, что обращение функций распределения (75), (76) в бесконечность при $u \rightarrow 0$ является следствием использованного здесь линейного по γ приближения. В этом приближении не учитывается особая роль малоамплитудных солитонов. Действительно, как видно из (66), ширина солитона Δx_s растет с уменьшением его амплитуды:

$$\Delta x_s \approx \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

Среднее же расстояние между солитонами равно

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{l}{N} \sim \varepsilon \frac{l}{\theta} \sim \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Поэтому при $a \sim \gamma^2$ солитоны существенно перекрываются и их нельзя считать слабо взаимодействующими. Таким образом, функция распределения (75) справедлива лишь до значений $u \sim \gamma^2$, т.е. до значений $f_{\infty} \sim 1/\gamma$. При значениях $u < \gamma^2$ ее рост обрывается за счет сильного взаимодействия малоамплитудных солитонов. Благодаря этому и функция $f_{\infty}(u)$ принимает вид, качественно показанный штриховой линией на рис. 4. Ее точное вычисление требует полного учета эффектов $\sim \gamma^2$, что выходит за рамки настоящей работы.

Отметим в заключение, что при одинаковых начальных условиях (32) существует структурное подобие функций распределения в решении КдВ $f_{\infty}(u)$ (76) и Хопфа $f(u)$ (34): обе они имеют характерное значение порядка γ при $u \sim 1$ и высокий максимум при $u \rightarrow 0$ (см. рис. 4). Эти особенности отражают свойства начального распределения $u_0(x)$.

5. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

Перейдем теперь к изучению корреляционной функции в размешанном состоянии. Как обычно, определим ее соотношением

$$K(s) = \langle u(x+s)u(x) \rangle - \langle u(x) \rangle^2. \quad (77)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по пространству x . В соответствии с уже проведенным анализом функции вероятности $f_\infty(u)$ в квазиклассической задаче ($\varepsilon \rightarrow 0$) в случае разреженной последовательности начальных импульсов ($\gamma \rightarrow 0$) отчетливо выделяются две области. Первая — основная область значений $u \sim 1$, где решение распадается на систему редких солитонов, так что в первом приближении по параметру γ их можно считать невзаимодействующими. Корреляции здесь короткодействующие, определяются лишь масштабом солитона ε . Вторая область — область очень малых значений $u < \gamma^2$, где основную роль играют малоамплитудные солитоны $a \sim \gamma^2$. При этом взаимодействие между солитонами оказывается не только существенным, но и преобладающим. В этой области должны естественно возникать дальнедействующие корреляции.

Мы рассмотрим здесь первое приближение по параметру γ и, следовательно, только область короткодействующих корреляций. В этом приближении вклад порядка γ в функцию корреляции вносит только первое слагаемое в выражении (77). Его можно переписать в виде

$$K(s) = \int_0^2 f(a)K_a(s) da, \quad (78)$$

где $f(a)$ — функция распределения солитонов по амплитудам (56), а $K_a(s)$ — функция корреляции солитонов данной амплитуды a :

$$\begin{aligned} K_a(s) &= a^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \text{ch}^{-2} \left(\frac{x+s}{\varepsilon} \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2} \right) \text{ch}^{-2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2} \right) dx = \\ &= \frac{\varepsilon a^{3/2}}{\sqrt{2}l} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ch}^{-2}(x_1 + s_1) \text{ch}^{-2}(x_1) dx_1, \quad s_1 = \frac{s}{\varepsilon} \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Здесь l — среднее расстояние между импульсами. После интегрирования из (78) получим

$$K_a(s_1) = \frac{\sqrt{2}\varepsilon a^{3/2}}{l} \left[\frac{\text{ch } s_1}{(\text{sh } s_1)^3} s_1 - \frac{1}{\text{sh}^2 s_1} \right]. \quad (80)$$

Функция $K_a(s)$ имеет максимальное значение при $s = 0$. Вблизи максимума при $s \ll \varepsilon/a^{1/2}$ она представима в виде

$$K_a(s) = \frac{\sqrt{2}}{3} \varepsilon \frac{a^{3/2}}{l} \left(1 - \frac{a}{5\varepsilon^2} s^2 \right).$$

При $s \gg \varepsilon/a^{1/2}$ корреляционная функция экспоненциально уменьшается:

$$K_a(s)_{s \gg \varepsilon/a^{1/2}} = 4s \frac{a^2}{l} \exp\left(-\sqrt{2} \frac{sa^{1/2}}{\varepsilon}\right).$$

Полная функция корреляции зависит от распределения солитонов по амплитудам. Рассмотрим конкретный пример (36). В этом случае

$$D'(z) = \frac{2}{|u'(z)|} = \frac{\theta}{2\sqrt{1-z}}.$$

Поэтому

$$f(a) = \frac{\theta}{8\pi\varepsilon} \int_{a/2}^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z-a/2)}} = \begin{cases} \frac{\theta}{8\varepsilon}, & 2 \geq a \geq 0, \\ 0, & a > 2. \end{cases} \quad (81)$$

Из (78), (80), (81) следует

$$K(s) = \frac{\sqrt{2}\theta}{8l} \int_0^2 \left[\frac{\operatorname{ch} s_1}{(\operatorname{sh} s_1)^3} s_1 - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 s_1} \right] a^{3/2} da. \quad (82)$$

Из этого выражения находим асимптотики корреляционной функции:

$$K(s)_{s \ll \varepsilon} = \frac{2}{15} \gamma \left(1 - \frac{2s^2}{7\varepsilon^2}\right),$$

$$K(s)_{s \gg \varepsilon} = 3\gamma \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^5 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^5 \exp\left(-\frac{2s}{\varepsilon}\right)\right]. \quad (83)$$

Отсюда видно, что максимальное значение коррелятора $K(0) = (2/15)\gamma$, а при больших значениях параметра s он уменьшается как s^{-5} . Полный интеграл от корреляционной функции естественно пропорционален малому параметру $\gamma\varepsilon$:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} K(s) ds = \sqrt{2}\gamma\varepsilon.$$

Вид функции (82) показан на рис. 5а.

Существенный интерес представляет обычно и фурье-образ корреляционной функции — спектральная мощность процесса [34]:

$$S(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s) e^{iks} ds. \quad (84)$$

В рассматриваемом нами случае импульсного процесса с неперекрывающимися импульсами

$$S(k) = \frac{1}{l} \int_0^2 \langle |u_{sa}(k)|^2 \rangle f(a) da,$$

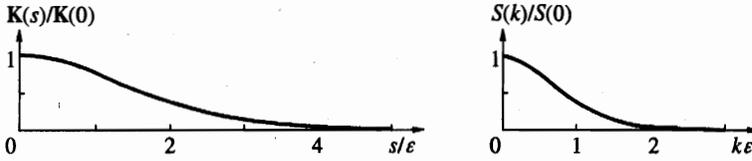


Рис. 5. а — Функция корреляции $K(s)$; б — фурье-спектр $S(k)$

где

$$u_{sa}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{sa}(x) e^{-ikx} dx = \frac{\epsilon^2 k}{2\pi \operatorname{sh} \left(k\epsilon \left(2/a \right)^{1/2} \right)}$$

— фурье-образ отдельного солитона.

В рассматриваемом выше примере (36) интегральный фурье-спектр имеет вид

$$S(k) = \frac{\theta}{8l\epsilon} \int_0^2 \frac{k^2 \epsilon^4}{4\pi^2 \operatorname{sh}^2 \left(\sqrt{2} k\epsilon / a^{1/2} \right)} da = \frac{1}{8\pi^2} \gamma\epsilon (k\epsilon)^4 \int_{k\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t^3 \operatorname{sh}^2 t}. \tag{85}$$

Выражение (85) имеет следующие асимптотики. При $k\epsilon \ll 1$ спектр стремится к постоянной:

$$S(0) = \frac{\gamma\epsilon}{32\pi^2}.$$

При $k\epsilon \gg 1$ спектр экспоненциально уменьшается:

$$S(k) = \frac{1}{4\pi^2} (\gamma\epsilon) (k\epsilon)^2 e^{-2k\epsilon}.$$

Общий вид фурье-спектра (85) показан на рис. 5б.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучаемый в настоящей работе процесс можно рассматривать как генерацию солитонной турбулентности в динамике сплошной одномерной недиссипативной среды, описываемой интегрируемым уравнением КдВ. Подчеркнем основные результаты теории.

1. При начальных условиях, имеющих вид крупномасштабных осцилляций $u_0(x)$, заданных на всей оси x , вследствие динамики КдВ асимптотически при $t \rightarrow \infty$ устанавливаются стохастические мелкомасштабные осцилляции, которые можно описывать в терминах непрерывного случайного процесса: плотности вероятности $f(u)$, корреляционной функции $K(s)$, другими высшими корреляциями.

2. Статистические характеристики $f(u)$, $K(s)$ и другие однозначно определяются видом начальной функции $u_0(x)$ и могут быть конкретно вычислены. Они являются устойчивыми, т. е. остаются неизменными при произвольных конечных возмущениях J начальной функции $u_0(x)$:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta u(x)| dx < \infty, \quad \delta u = \bar{u}_0(x) - u_0(x). \quad (86)$$

Общее доказательство последнего утверждения состоит в том, что конечное возмущение начального условия (86) соответствует конечному возмущению начальной солитонной структуры и поэтому оно не может изменить функцию распределения $f(a)$, определяемую бесконечным количеством солитонов.

3. Все динамические свойства системы описываются поправками, имеющими малость $O(1/t)$. При $t \rightarrow \infty$ они асимптотически исчезают и остается возможным только статистическое описание.

Разумеется, точное доказательство сформулированных утверждений требует детального математического исследования, которое выходит за рамки настоящей работы. Подчеркнем также, что полученные здесь окончательные выражения для конкретных простых примеров могут быть обобщены с использованием как аналитических методов минимизации многосолитонного взаимодействия, развитых в [3, 31, 25], так и численных методов. Отметим также, что предлагаемая теория может быть обобщена на другие полностью интегрируемые системы.

В заключение несколько замечаний о связи рассмотренного здесь процесса с другими известными моделями возникновения хаотического движения.

1. Можно усмотреть некоторую аналогию между механизмом Ландау—Хопфа последовательных бифуркаций в развитии неустойчивости течения диссипативной сплошной среды [13] и последовательным увеличением числа мод многозонной структуры в рассматриваемой здесь теории. Следует также отметить и существенное различие между ними. В то время как бифуркации Ландау—Хопфа развиваются как линейные неустойчивости течения, в нашем случае определяющую роль играют сингулярные точки в x -пространстве. Именно возникновение сингулярностей вследствие последовательного опрокидывания профиля скорости u приводит к генерации новых мод, которые сразу развиваются как сильнонелинейный процесс в локальной окрестности данной сингулярной точки x_k . Отметим, что на важную роль сингулярностей для высших корреляций указывается и в современной теории гидродинамической турбулентности (см., например, [35]).

2. Поскольку $u(x, t)$ является скоростью, траектория каждой данной точки x в системе координат, движущейся с постоянной средней скоростью $\bar{u} = \langle u_0(x) \rangle$, описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) - \bar{u}. \quad (87)$$

В нашем случае все траектории $x(t)$ начинаются крупномасштабным движением, определяемым уравнением (87) с начальным условием (2)–(5), но затем с ростом t стягиваются к мелкомасштабным осцилляциям $x(t)$ с характерным масштабом порядка ε . Этот процесс компактизации траекторий $x(t)$, возможно, имеет аналогию с аттракторами, рассматриваемыми в теории диссипативной турбулентности.

3. В согласии с теорией интегрируемости уравнения КдВ произвольную крупномасштабную финитную функцию $u_0(x) > 0$ можно с высокой степенью точности (порядка $\exp(-1/\varepsilon)$) аппроксимировать многосолитонным решением с $N \sim 1/\varepsilon$ [3]. Важно, что каждый солитон имеет определенную амплитуду a_i , а местоположение его центра x_i

при этом жестко фиксировано. При рассмотрении осциллирующей начальной функции $u_0(x)$ (2)–(5) можно говорить, что положение солитона внутри каждой крупномасштабной осцилляции имеет фиксированную фазу $\varphi_i(x_i)$. Таким образом, в начальный момент имеется жесткая связь амплитуд a_i и фаз φ_i солитонов. Согласно динамике КдВ, начальные солитоны сохраняют свои амплитуды a_i . Их движение в пространстве x происходит с различными скоростями, зависящими от амплитуды солитонов. В результате строгая начальная связь между амплитудами a_i и фазами φ_i нарушается. Подчеркнем, что солитоны движутся не свободно, а взаимодействуют друг с другом, причем тем сильнее, чем больше их средняя плотность. Несмотря на это, солитоны большей амплитуды движутся в среднем быстрее, чем меньшей, что вытекает непосредственно из соотношений (48), (52). В результате при $t \rightarrow \infty$ происходит полное размешивание фаз. Значение фазы φ от 0 до 2π для любого солитона становится равновероятным. Такое состояние и соответствует установившейся солитонной турбулентности.

С этой точки зрения процесс турбулизации одномерной сплошной среды, описываемой уравнением КдВ, может рассматриваться как эргодический. Этот факт подчеркивается и указанной в разд. 3.2 аналогией с решением уравнения Хопфа (2). С другой стороны, нельзя не отметить, что сдвиги фаз возникают и как следствие взаимодействия между солитонами [1, 33]. Этот процесс усиливает фазовое размешивание.

4. Мы не касаемся здесь огромной литературы, посвященной теории плазменной турбулентности. Основное отличие нашей работы состоит в анализе динамики точно интегрируемой системы.

Авторы глубоко благодарны А. Л. Крылову, без многократных ценных обсуждений с которым данная работа не могла бы быть выполненной. Мы признательны также С. Венакидесу, Н. Г. Мазуру, В. В. Геогджаеву и М. О. Птицыну за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке международного фонда CRDF (грант № RM1-145). Г. А. Э. благодарит также Российский фонд фундаментальных исследований за частичную финансовую поддержку (грант № 96-01-01453).

Литература

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980)
2. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
3. P. D. Lax and C. D. Levermore, *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 253, 571, 809 (1983).
4. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
5. С. П. Новиков, *Функ. ан. прил.*, **8**, 54 (1974).
6. P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.* **26**, 141 (1975)
7. Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН* **31**, 59 (1976).
8. S. Venakides, *AMS Transaction* **301**, 189 (1987).
9. J. N. Elgin, *Phys. Lett. A* **110**, 441 (1985).
10. F. Kh. Abdullaev, *Phys. Rep.* **179**, 1 (1989).
11. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, А. Л. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
12. Л. А. Пастур, А. Л. Фиготин, *Случайные и почти периодические самоспряженные операторы*, Наука, Москва (1991).

13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* Наука, Москва (1988).
14. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **94**, 3 (1988); УФН **165**, 723 (1995).
15. E. Weinan, K. Khanin, A. Mazel, and Ya. Sinai, Phys. Rev. Lett. **78**, 1904 (1997).
16. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, Москва (1980).
17. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма—Лиувилля*, Наука, Москва (1984).
18. Дж. Уизем *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
19. Б. А. Дубровин, УМН **36**, 215 (1981).
20. G. V. Whitham, Proc. Roy. Soc. A **283**, 238 (1965).
21. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, ЖЭТФ **101**, 1797 (1992).
22. F. R. Tian, Comm. Pure Appl. Math. **46**, 1093 (1993).
23. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Н. Г. Мазур, ЖЭТФ **95**, 1674 (1989).
24. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Н. Г. Мазур, Г. А. Эль, ДАН **37**, 198 (1992).
25. Н. Г. Мазур, ТМФ **106**, 44 (1996).
26. P. Deift, S. Venakides, and X. Zhou, Intern. Math. Research. J. № 4, 285 (1997).
27. H. Flaschka, G. Forest, and D. W. McLaughlin, Comm. Pure Appl. Math. **33**, 739 (1979).
28. И. М. Кричевер, Функ. ан. прил. **22**, 37 (1988).
29. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, УМН **44**, 35 (1989).
30. G. A. El, Phys. Lett. A **222**, 393 (1996).
31. S. Venakides, Comm. Pure Appl. Math. **42**, 711 (1989).
32. А. Л. Крылов, Г. А. Эль, А. В. Гуревич, in: Proc. Conf. in honor of Prof. S. Novikov, Moscow (1998), p. 17.
33. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **60**, 1012 (1971).
34. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
35. L. Sirovich, L. Smith, and V. Yahot, Phys. Rev. Lett. **72**, 344 (1994).